Chapitre 1

Equations différentielles ordinaires

1.1 Généralités:

Définition: On appelle équation différentielle toute équation dans laquelle figurent une fonction inconnue y d'une variable x et ses dérivées de différents ordres

$$F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0, \qquad (1.1)$$

où F est une relation liant x à la fonction y et ses dérivés $y', \dots, y^{(k)}$.

On appelle ordre de l'équation différentielle, l'ordre de la dérivée la plus élevée, figurant dans l'équation.

Une telle équation différentielle (1.1) est dite équation différentielle ordinaire (EDO).

Exemple:

1) $y'' + (y')^3 + 2y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2
2) $xy''' + 2y + xe^x = 0$ est une équation différentielle d'ordre 3
3) $y' + xy + \frac{x}{x+1} = 0$ est une équation différentielle d'ordre 1
4) $y''' + 2y^{(8)} = xe^x y'$ est une équation différentielle d'ordre 8

Définition: On appelle solution (ou intégrale) de l'équation différentielle (1.1) tout couple (I, f) formé d'un intégrale I de $\mathbb{R}$ et d'une fonction f, vérifiant les conditions suivantes :

1) f est k- fois dérivable sur I
2) $\forall x \in I \quad F(x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(k)}(x)) = 0$

Si f est une solution de l'équation différentielle (1.1), alors le graphe de f est appelé courbe intégrale de cette équation.

Définition: Si la seule solution prolongeant f, est f elle même, On dira alors que f est une solution maximale

Exemple: $y = e^x$ est une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - y = 0$ ($y = e^x$ est une solution maximale)

Remarque. Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle c'est en trouver toutes les solutions quand elles existent.

1.2 Equation différentielles du premier ordre:

Définition: La forme générale d'une équation différentielle du premier ordre est $\quad F(x, y, y') = 0$

ou F est une relation liant x à la fonction y et sa dérivée y'.

Le plus souvent, les équations différentielles du premier ordre sont étudiées sous leurs formes résolues en $y' = f(x, y)$, où $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemple :

1) $xy' + 2y^4 + \ln x = 0$ est une équation différentielle d'ordre 1

2) $x(y')^3 + 2y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 1

3) $xy^3 + \frac{x}{x+1} = y'$ est une équation différentielle d'ordre 1

Problème de Cauchy : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$

Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

relatif à l'équation $y' = f(x,y)$ et à la condition $y_0 = y(x_0)$, $x_0 \in I$, consiste à chercher la solution maximale de l'équation $y' = f(x,y)$ telle que $y_0 = y(x_0)$.

1.2.1 Equations différentielles à variables séparées :

Définition : On appelle équation différentielle à variables séparées toute équation de la forme $f(y)y' = g(x)$

où f et g sont deux fonctions réelles définies et continues respectivement sur les intervalles I et J de $\mathbb{R}$

on a $y' = \frac{dy}{dx}$ donc l'équation peut s'écrire aussi comme

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx$$

Résolution d'une équation différentielle à variables séparées :

Une telle équation différentielle à variables séparées se résout par calcul de primitives de f et g comme suit on a $\frac{f(y)\,dy}{dx} = g(x) \Rightarrow f(y)\,dy = g(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow F(y) = G(x) + c \quad / \, c \in \mathbb{R}$$

où F et G primitives de f et g respectivement (sur I et J respectivement)

Enfin, on va résoudre cette équation (algébrique)

$F(y) = G(x) + c$ de l'inconnue y

Exemple Résoudre $xy' + e^{y} = 0$

$$xy' + e^{y} = 0 \Rightarrow xy' = -e^{y} \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = -e^{y} \Rightarrow \frac{dy}{e^{y}} = \frac{-dx}{x}$$

$(x \neq 0)$

$$\Rightarrow \int dy\, e^{-y} = \int -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int -e^{-y}\,dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow e^{-y} = \ln|x| + c \;/\; c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -y = \ln(\ln|x| + c) \;/\; c \in \mathbb{R} \quad (\ln|x| + c > 0)$$

$$\Rightarrow y(x) = -\ln(\ln|x| + c), \; c \in \mathbb{R}$$

donc $y(x) = -\ln(\ln|x| + c)$, $c \in \mathbb{R}$ est la solution générale de l'équation différentielle $xy' + e^{y} = 0$

1.2.2 Equation différentielle homogènes en x et y :

Définition : On appelle équations différentielles homogènes en x et y toute équation de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

Résolution d'une équation différentielles homogènes :

On utilise le changement d'inconnu $U = \frac{y}{x}$ $(y = Ux)$ qui donne $y' = U + xU'$.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow U + xU' = f(U)$$

$$\Rightarrow x\frac{dU}{dx} = f(U) - U$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{f(U) - U} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dU}{f(U) - U} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dU}{f(U) - U} = \ln|x| + c \quad | \, c \in \mathbb{R}$$

On détermine U puis y, on obtient la solution générale grâce à la relation $y = xU$

Exemple : Résoudre $xyy' - y^2 + x^2 = 0$

$$xyy' - y^2 + x^2 = 0 \Rightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{xy} \quad (xy \neq 0)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}$$

c'est une équation différentielle homogène

posons $y = xU \Rightarrow y' = xU' + U$ donc

$$xU' + U = U - \frac{1}{U} \Rightarrow x\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{U} \Rightarrow U\,dU = \frac{-dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int U\,dU = \int -\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}U^2 = -\ln|x| + c \quad | \, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow U = \pm\sqrt{-2\ln|x| + 2c} \quad | \, c \in \mathbb{R}$$

On a $y = xU$ d'où $y(x) = \pm x\sqrt{-2\ln|x| + 2c}$ $| \, c \in \mathbb{R}$

solution générale de l'équation différentielle $xyy' - y^2 + x^2 = 0$

1.2.3 Equation différentielle linéaires du premier ordre :

<u>Définition</u> : On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation de la forme

$$y' = a(x)y + b(x)$$

où a et b sont deux fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

On lui associe l'équation sans second membre

$$y' = a(x)y$$

l'équation $y' = a(x)y$ est dite équation différentielle homogène associée à l'équation $y' = a(x)y + b(x)$

<u>Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre</u> :

a) <u>Résolution de l'équation homogène $y' = a(x)y$</u> :

$$y' = a(x)y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = a(x)dx \quad (y \neq 0)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx \Rightarrow \ln|y| = \int a(x)dx + c$$

$$\Rightarrow |y| = e^{\int a(x)dx + c} \quad / \, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = K e^{\int a(x)dx} \quad / \, K = \pm e^{c} \; (K \in \mathbb{R})$$

D'où $y_h(x) = K e^{\int a(x)dx}$ $/ \, K \in \mathbb{R}$ solution générale de $y' = a(x)y$

b) <u>Résolution de l'équation avec second membre.</u>

<u>proposition</u> : La solution générale y de $y' = a(x)y + b(x)$ est la somme de la solution générale y_h de $y' = a(x)y$

et d'une solution particulière de $y' = a(x)y + b(x)$

$$y = y_h + y_p = K e^{\int a(x)dx} + y_p \quad / K \in \mathbb{R}$$

Recherche de la solution particulière (Méthode de la variation de la constante):

c'est une méthode générale pour trouver une solution particulière en se ramenant à un calcul de primitives.

On a $y_h(x) = K e^{\int a(x)dx}$ $/ K \in \mathbb{R}$, est la solution générale de $y' = a(x)y$ avec K une constante. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = K(x) e^{\int a(x)dx}$ où K est maintenant une fonction de la variable x à déterminer

posons $\quad y(x) = K(x) e^{\int a(x)dx}$

donc $\quad y'(x) = K'(x) e^{\int a(x)dx} + a(x)K(x) e^{\int a(x)dx}$

En remplaçant y et y' dans $y' = a(x)y + b(x)$ on obtient

$$K'(x) e^{\int a(x)dx} + \cancel{a(x)K(x) e^{\int a(x)dx}} = \cancel{a(x)K(x) e^{\int a(x)dx}} + b(x)$$

$$K'(x) = b(x) e^{-\int a(x)dx}$$

par conséquent $\quad K(x) = \int \left(b(x) e^{-\int a(x)dx}\right) dx + \gamma \quad / \gamma \in \mathbb{R}$

Finalement la solution générale de $y' = a(x)y + b(x)$ est

$$y(x) = \left(\int \left(b(x) e^{-\int a(x)dx}\right) dx + \gamma\right) e^{\int a(x)dx} \quad / \gamma \in \mathbb{R}$$

Exemple Résoudre $y' = 3y + 1 - 2e^{x}$

puis le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = 3y + 1 - 2e^{x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

L'équation homogène associée est $y' = 3y$

$y = 0$ est une solution de $y' = 3y$

$$\frac{dy}{dx} = 3y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 3dx \qquad (y \neq 0)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 3dx \Rightarrow \ln|y| = 3x + c \quad / c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |y| = e^{3x+c} \quad / c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = \pm e^{c} e^{3x} = K e^{3x} \quad / K = \pm e^{c} \in \mathbb{R}$$

donc $y_h(x) = K e^{3x}$ $/ K \in \mathbb{R}$ est la solution générale de $y' = 3y$

Maintenant on va utiliser la méthode de la variation de la constante. Posons $y_p(x) = K(x) e^{3x}$

donc $y_p'(x) = K'(x) e^{3x} + 3K(x) e^{3x}$

remplaçant y_p, y_p' dans $y' = 3y + 1 - 2e^{x}$ on obtient

$$K'(x) e^{3x} + \cancel{3K(x) e^{3x}} = \cancel{3K(x) e^{3x}} + 1 - 2e^{x}$$

$$K'(x) = \frac{1 - 2e^{x}}{e^{3x}} = e^{-3x} - 2e^{-2x}$$

$$\Rightarrow K(x) = -\frac{1}{3} e^{-3x} + e^{-2x} + \gamma \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

donc $y(x) = \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} + e^{-2x} + \gamma\right) e^{3x} = -\frac{1}{3} + e^{x} + \gamma e^{3x}$ $/ \gamma \in \mathbb{R}$

la solution générale de $y' = 3y + 1 - 2e^{x}$

pour le problème de Cauchy

$$y(0) = 2 \Rightarrow -\frac{1}{3} + 1 + \gamma = 2$$
$$\Rightarrow \gamma = \frac{4}{3}$$

donc $y(x) = -\frac{1}{3} + e^{x} + \frac{4}{3} e^{3x}$ la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = 3y + 1 - 2e^{x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

1.2.4 Équation différentielle de Bernoulli :

Définition: On appelle équation de Bernoulli toute équation de la forme $y' + a(x) y + b(x) y^{\alpha} = 0$

où $\alpha \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ et a, b sont deux fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Remarque: On sait déjà traiter les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ car $y' + a(x) y + b(x) y^{\alpha} = 0$ est alors une équation linéaire du premier ordre.

Pour chercher les solutions de l'équation différentielle de Bernoulli $y' + a(x) y + b(x) y^{\alpha} = 0$ on divise par y^{α}

$$y' + a(x) y + b(x) y^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y^{\alpha}} + a(x) \frac{y}{y^{\alpha}} + b(x) = 0$$

puis on pose $z = \frac{y}{y^{\alpha}} = y^{1-\alpha}$ comme changement de variable, et par conséquent $z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y'$ d'où $y' = \frac{y^{\alpha}}{1-\alpha} z'$. En remplaçant y et y' dans $y' + a(x) y + b(x) y^{\alpha} = 0$ on obtient

$$\frac{z'}{1-\alpha} + a(x) z + b(x) = 0$$ qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue z

Exemple : Résoudre $xy' + y + x^2y^2 = 0$

$$xy'+y+x^2y^2=0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y^2}+\frac{y}{xy^2}+x^2=0 \quad (xy\neq 0)$$

$$\frac{y'}{y^2}+\frac{1}{xy}+x^2=0$$

posons $z=\frac{1}{y}$ donc $z'=-\frac{y'}{y^2}$ $\quad y'=-z'y^2$.

Remplaçant y, y' dans $xy'+y+x^2y^2=0$

$$z'=\frac{1}{x}z+x$$

est une équation differentielle lineaire du premier ordre d'inconnue z

l'équation homogène associée $z'=\frac{1}{x}z$

$$z'=\frac{1}{x}z \Rightarrow \frac{z'}{z}=\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dz}{z}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|z|=\ln|x|+c \quad / \; c\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |z|=|x|e^{c} \quad / \; c\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow z=Kx \quad / \; K\in\mathbb{R}$$

d'où $z_h(x)=Kx \;/\; K\in\mathbb{R}$ la solution générale de $z'=\frac{1}{x}z$

On utilise la méthode de variation de la constante

$$z_p(x)=K(x)x \text{ donc } z_p'(x)=K'(x)x+K(x).$$

En remplaçant z_p, z_p' dans $z'=\frac{1}{x}z+x$ on obtient

$$K'(x)x+\cancel{K(x)}=\frac{1}{x}\cancel{K(x)}x+x$$

$$K'(x)=1 \Rightarrow K(x)=x+\gamma \quad / \; \gamma\in\mathbb{R}$$

D'où $z(x)=x(x+\gamma) \;/\; \gamma\in\mathbb{R}$ la solution générale de

$$z'=\frac{1}{x}z+x$$

Par conséquent $z = \frac{1}{y} = x(x+\gamma)$ / $\gamma \in \mathbb{R}$ c'est à dire

$$y(x) = \frac{1}{x(x+\gamma)} \quad / \ \gamma \in \mathbb{R}$$ la solution générale

de l'équation différentielle de Bernoulli $xy' + y + x^2y^2 = 0$

1.2.5 Equation de Riccati :

Définition: On appelle équation différentielle de Riccati toute équation de la forme $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$

où a, b et c sont trois fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Ce type d'équations différentielles n'est pas toujours résoluble de façon élémentaire. Mais si une solution particulière y_p pouvait être trouvée, on pourrait alors ramener la résolution de l'équation de Riccati à celle d'une équation différentielle linéaire. En effet, en posant le changement de variable $y = y_p + z$ donc $y' = y_p' + z'$. En remplaçant y et y' dans $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ on obtient :

$$y_p' + z' = a(x)(y_p + z)^2 + b(x)(y_p + z) + c(x)$$

$$\Leftrightarrow y_p' + z' = a(x)y_p^2 + 2a(x)y_p z + a(x)z^2 + b(x)y_p + b(x)z + c(x)$$

$$\Leftrightarrow \left(y_p' - (a(x)y_p^2 + b(x)y_p + c(x))\right) + z' = \left(2a(x)y_p + b(x)\right)z + a(x)z^2$$

on a $y_p' - (a(x)y_p^2 + b(x)y_p + c(x)) = 0$ car y_p solution $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$

Donc aura $z' = \left(2a(x)y_p + b(x)\right)z + a(x)z^2$

qui est une équation de Bernoulli.

Exemple : Résoudre $y' = -y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}$ (*)

($y_p = \frac{1}{x}$ est une solution particulière)

posons $y = \frac{1}{x} + z$ alors $y' = -\frac{1}{x^2} + z'$

En remplaçant y, y' dans (*) on obtient

$$(*) \iff -\frac{1}{x^2} + z' = -\left(\frac{1}{x}+z\right)^2 + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+z\right) - \frac{1}{x^2}$$

$$\iff z' + \frac{1}{x}z + z^2 = 0$$

d'où $\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{xz} + 1 = 0$

$\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{xz} + 1 = 0$ est une équation de Bernoulli $\alpha = 2$

posons $U = \frac{1}{z}$ donc $U' = -\frac{z'}{z^2}$ d'où $z' = -U'z^2$

En remplaçant z et z' dans l'équation de Bernoulli on obtient

$$-\frac{z^2U'}{z^2} + \frac{1}{x}U + 1 = 0 \iff -U' + \frac{1}{x}U + 1 = 0$$

d'où $U' = \frac{1}{x}U + 1$ (équation différentielle du premier ordre l'inconnu U)

L'équation homogène associée est $U' = \frac{1}{x}U$

$$U' = \frac{1}{x}U \Rightarrow \frac{dU}{dx} = \frac{U}{x} \Rightarrow \frac{dU}{U} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dU}{U} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|U| = \ln|x| + c \quad | c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |U| = e^c|x| \quad | c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow U = Kx \quad | K \in \mathbb{R}$$

Alors $U(x) = Kx$ $| K \in \mathbb{R}$ la solution générale de $U' = \frac{1}{x}U$

on utilise la méthode de la variation de la constante

posons $U(x) = K(x)x$ donc $U'(x) = K'(x)x + K(x)$

En remplaçant U et U' dans $U' = \frac{1}{x}U + 1$ on obtient

$$k'(x)x + \cancel{k(x)} = \frac{1}{x}\cancel{k(x)x} + 1 \Rightarrow k'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow k(x) = \ln|x| + \gamma \quad / \gamma \in \mathbb{R}$$

donc $U(x) = (\ln|x| + \gamma)\,x \quad / \gamma \in \mathbb{R}$ (solution générale de $U' = \frac{1}{x}U + 1$)

on a $U = \frac{1}{z}$ donc $z = \frac{1}{U}$ d'où $z = \frac{1}{(\ln|x| + \gamma)\,x}$ $\gamma \in \mathbb{R}$

(z solution générale de $\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{x}z + 1 = 0$.

Mais $y = \frac{1}{x} + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(\ln|x| + \gamma)}$ $/ \gamma \in \mathbb{R}$) solution générale de $y' = -y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}$

1.3 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants :

Définition : On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation de la forme

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

où a, b sont deux constantes réelles et f $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. On lui associe l'équation sans second membre $y'' + ay' + by = 0$ (Δ)

Problème de Cauchy :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \text{ où } x_0 \in I \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

relatif à l'équation $y'' + ay' + by = f(x)$ et aux conditions $y_0 = y(x_0)$ et $y'_0 = y'(x_0)$, $x_0 \in I$ consiste à chercher la solution maximale de l'équation $y''+ay'+by=f(x)$ telle que $y_0=y(x_0)$ et $z_0=y'(x_0)$

1.3.1 Résolution de l'équation linéaire homogène associée :

On cherche des solutions du type $y=e^{rx}$ ou $r\in\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

si $y=e^{rx}$ alors $y'=re^{rx}$, $y''=r^2e^{rx}$ en remplaçant dans (Δ) on obtient

$$(r^2+ar+b)e^{rx}=0 \quad , \forall x\in\mathbb{R}$$

on a l'équation suivante $r^2+ar+b=0$ (□)

l'équation (□) appelé l'équation caractéristique de l'équation différentielle $y''+ay'+by=f(x)$.

L'étude de l'équation caractéristique

Trois cas se présenter selon le signe de discriminant

$$\Delta=a^2-4b$$

Premier cas : Si $\Delta>0$ l'équation (□) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors la solution générale de (Δ) est de la forme $y_0=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$ où A,B deux constantes réelles

Deuxième cas : Si $\Delta=0$ l'équation (□) admet une racine double r, alors la solution générale de (Δ) est de la forme

$$y_0=(A+Bx)e^{rx}$$ où A,B deux constantes réelles

Troisième cas : Si $\Delta<0$, l'équation (□) admet deux racines complexes conjuguées $r_1=\alpha+i\beta$ et $r_2=\alpha-i\beta$ alors la solution générale de (Δ) est de la forme

$$y_0=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)e^{\alpha x}$$ où A,B deux constantes réelles

Exemple : Résoudre 1) $y''-3y'+2y=0$ (✱)

L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$

$\Delta = 1 > 0$ donc l'équation admet deux racine $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Donc la solution générale de $(\ast)$ est

$$y_0 = Ae^{x} + Be^{2x} \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

Résoudre 2) $y'' - 10y' + 25y = 0$ $(\ast_1)$

l'équation caractéristique est $r^2 - 10r + 25 = 0$

$\Delta = 0$ donc l'équation admet une racine double $r = 5$

donc la solution générale de $(\ast_1)$ est

$$y_0 = (A + Bx)e^{5x} \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

Résoudre 3) $y'' + 9y = 0$ $(\ast_2)$

l'équation caractéristique est $r^2 + 9 = 0$

$\Delta = -36 = 36i^2$ donc l'équation admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 3i$, $r_2 = -3i$

donc la solution générale de $(\ast_2)$ est

$$y_0 = (A\cos 3x + B\sin 3x)e^{0x} \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

$$= A\cos 3x + B\sin 3x$$

1.3.2 Résolution de l'équation linéaire non homogène :

Théorème : La solution générale maximale Y de l'équation linéaire non homogène $y'' + ay' + by = f(x)$ est la somme d'une solution maximale particulière y_p de l'équation $y'' + ay' + by = f(x)$ et de la solution générale y de l'équation homogène associée $(\ast)$ c'est à dire

$$Y = y + y_p$$

Recherche de la solution particulière y_p de $y''+ay'+by=f(x)$:

Le second membre est du type $e^{\alpha x}P(x)$:

Si $f(x)=e^{\alpha x}P(x)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$ et $P\in\mathbb{R}[x]$, alors on cherche la solution particulière sous la forme $y_p=x^m e^{\alpha x}Q(x)$ où Q est un polynôme de même degré que P et m la multiplicité de solution α dans l'équation caractéristique ($\square$) c'est à dire

$y_p=e^{\alpha x}Q(x)$ $(m=0)$ si α n'est pas racine de l'équation caractéristique ($\square$)

$y_p=xe^{\alpha x}Q(x)$ $(m=1)$ si α est une racine simple de l'équation caractéristique ($\square$)

$y_p=x^2e^{\alpha x}Q(x)$ $(m=2)$ si α est une racine double de l'équation caractéristique ($\square$)

Exemple: Résoudre $y''-4y'+4y=e^{2x}$ (1)

l'équation homogène associée est
$$y''-4y'+4y=0$$

l'équation caractéristique est $r^2-4r+4=0$ (Δ_1)

$\Delta=0$ donc l'équation (Δ_1) admet une racine double $r=2$

d'où $y_0=(A+Bx)e^{2x}$

Recherche de la solution particulière y_p

on a $f(x)=e^{2x}=1.e^{2x}$

$\alpha=2$ est une racine double de (Δ_1) donc nous devons chercher une solution particulière de la forme

$y_p(x) = kx^2 e^{2x} \qquad k \in \mathbb{R}$

$y_p'(x) = 2kx\, e^{2x} + 2kx^2 e^{2x} = (2kx + 2kx^2)\, e^{2x}$

$y_p''(x) = (2k + 4kx)e^{2x} + (4kx + 4kx^2)e^{2x} = (2k + 8kx + 4kx^2)e^{2x}$

On remplace y_p, y_p', y_p'' dans (1) on a

$(2k + 8kx + 4kx^2)e^{2x} + (-8kx - 8kx^2)e^{2x} + 4kx^2 e^{2x} = e^{2x}$

$e^{2x}\, 2k = e^{2x}$ d'où $k = \frac{1}{2}$

donc $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$

Alors $y = y_0(x) + y_p(x)$

$= (A + Bx)\, e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x} \quad (A, B \in \mathbb{R})$

Résoudre $y'' - 2y' + y = (x+2)e^x$ (2)

l'équation homogène associée

$y'' - 2y' - y = 0$

l'équation caractéristique $r^2 - 2r - 1 = 0$ (D_2)

$\Delta = 0$ donc $r = 1$ est la racine double de (D_2)

La solution générale de l'équation homogène est

$y_0(x) = (A + Bx)\, e^x \qquad A, B \in \mathbb{R}$

Recherche de la solution particulière y_p : $f(x) = (x+2)e^x$

$\alpha = 1$ est une racine double de (D_2) donc y_p est de la forme $y_p(x) = x^2 e^{1.x}(ax + b) = e^x(ax^3 + bx^2)$

$y_p'(x) = e^x(ax^3 + bx^2) + (3ax^2 + 2bx)e^x = e^x(ax^3 + (3a+b)x^2 + 2bx)$

$y_p''(x) = e^x(ax^3 + (3a+b)x^2 + 2bx) + (3ax^2 + (6a+2b)x + 2b)\, e^x$

$y_p''(x) = e^x\left(ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b)x + 2b\right)$

On remplace y_p, y_p', y_p'' dans (1) on obtient

$$(6ax+2b)e^x = (x+2)e^x$$

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = 1 \end{cases}$$

donc $y_p(x) = e^x\left(\frac{1}{6}x^3 + x^2\right)$

d'où $y = y_0(x) + y_p(x)$

$$y = (A+Bx)e^x + e^x\left(\frac{1}{6}x^3 + x^2\right) \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

<u>Le second membre est du type $(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x)\, e^{\alpha x}$</u>

Si $f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x]$ on cherche une solution particulière sous la forme

$y_p = e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$ si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de $(\square)$

$y_p = x e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$ si $\alpha + i\beta$ est une racine de $(\square)$

Dans les deux cas Q_1, Q_2 sont deux polynômes de degré n avec
$n = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$

<u>Exemple</u> Résoudre $y'' + 4y = \cos x$

l'équation homogène associée

$$y'' + 4y = 0$$

l'équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$

$\Delta = -16 < 0$ donc les deux racines complexes conjuguées sont $r_1 = 2i$

$r_2 = -2i$ donc

$$y_0(x) = (A \cos 2x + \beta \sin 2x)$$

Recherche de la solution particulière y_p

$f(x) = \cos x$ $\quad\quad \alpha = 0 \quad \beta = 1 \quad\quad \alpha + i\beta = i$

i n'est pas une racine de l'équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$

donc y_p est de la forme $y_p(x) = h \cos x + k \sin x \quad h, k \in \mathbb{R}$

$y_p'(x) = -h \sin x + k \cos x \quad , \quad y_p''(x) = -h \cos x - k \sin x)$

on remplace y_p, y_p'' dans $y'' + 4y = \cos x$ on obtien

$$-h \cos x - k \sin x + 4h \cos x + 4k \sin x = \cos x$$

$$3h \cos x + 3k \sin x = \cos x$$

$$\begin{cases} 3h = 1 \\ 3k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} h = \frac{1}{3} \\ k = 0 \end{matrix}$$

donc $y_p(x) = \frac{1}{3} \cos x$

d'où $Y = y_0(x) + y_p(x)$

$$Y = (A \cos 2x + \beta \sin 2x) + \frac{1}{3} \cos x \quad\quad A, \beta \in \mathbb{R}$$

Principe de superposition :

Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, une solution particulière y_p est donnée par

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

où y_{p_1} est une solution particulière de l'équation $y'' + ay' + by = f_1(x)$

et y_{p_2} est une solution particulière de l'équation $y'' + ay' + by = f_2(x)$