

développements limités

Définitions - exemples

Soit f une fonction définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0.

Définitions.

- La fonction f admet un **développement limité d'ordre n** (n entier naturel) au voisinage de 0 si, et seulement si, il existe un réel strictement positif h , une fonction polynôme de degré n ,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

et une fonction ε de limite nulle en 0 tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (0 < |x| < h) \Rightarrow (f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x)).$$

- $P_n(x)$ est la **partie régulière** du développement limité et $x^n \varepsilon(x)$ le **terme complémentaire**.

Propriétés des développements limités

- **Unicité.** — Pour un ordre donné, si f admet au voisinage de 0 un développement limité, celui-ci est unique.
- **Parité.** — Si f admet au voisinage de 0, un développement limité et si f est paire (resp. impaire), la fonction polynôme $x \mapsto P_n(x)$ est paire (resp. impaire).
- **Troncature.** — Si f admet au voisinage de 0, un développement limité à un ordre n , f admet au voisinage de 0 un développement limité à tout ordre h avec

$$h \leq n \quad \text{et} \quad P_h(x) = \sum_{i=0}^h a_i x^i.$$

Exemples

Si f est de classe \mathcal{C}^{n-1} sur un voisinage de 0, et admet en 0 une dérivée d'ordre n , il résulte de la formule de Taylor-Young que f admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^{(n)} \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = 0$.

On obtient ainsi les développements limités :

$$\bullet \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x),$$

$$\bullet \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x),$$

$$\bullet e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x),$$

$$\bullet \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x).$$

REMARQUES.

• Pour obtenir le développement limité d'une fonction f au voisinage d'un point x_0 , il suffit de chercher le développement limité au voisinage de 0 de la fonction g :

$$t \longmapsto g(t) = f(x_0 + t).$$

• De même, pour obtenir le développement limité d'une fonction f au voisinage de $+\infty$, il suffit de chercher le développement limité au voisinage de 0 de la fonction F définie par

$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right).$$

Opérations sur les développements limités

Soit f et g deux fonctions qui admettent au voisinage de 0 des développements limités d'ordre n

$$f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = Q_n(x) + x^n \varepsilon_2(x),$$

avec

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0.$$

Développement limité de la somme

La fonction $f + g$ admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n

$$[f + g](x) = [P_n(x) + Q_n(x)] + x^n \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

Développement limité du produit

La fonction $f \cdot g$ admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n

$$[f \cdot g](x) = R_n(x) + x^n \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0,$$

R_n désignant le polynôme obtenu en ne prenant que les termes de degré inférieur ou égal à n du polynôme $P_n \cdot Q_n$.

EXEMPLE. — Développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $f \cdot g$, où

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^x.$$

On a

$$\bullet \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2 \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_2(x).$$

$$\text{Il en résulte } P_2 \cdot Q_2 = 1 + 2x + 5 \frac{x^2}{2} + \left(3 \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2} \right) \text{ et, par suite,}$$

$$f(x) \cdot g(x) = 1 + 2x + 5 \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

Développement limité du quotient

Si $Q_n(0) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n :

$$\left[\frac{f}{g} \right](x) = Z_n(x) + x^n \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0,$$

Z_n désignant le quotient de la division puissances croissantes de P_n par Q_n

$$P_n = Q_n \cdot Z_n + x^{n+1} S.$$

EXEMPLE. — Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \operatorname{tg} x$.

On a

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x); \quad g(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_2(x).$$

$$\text{On en déduit } P_3 = Q_3 \left[x + \frac{x^3}{3} \right] + x^4 \times \frac{x}{6} \text{ et, par suite,}$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

Développement limité d'une fonction composée

Théorème. — Si $P_n(0) = 0$, la fonction $g \circ f$ admet au voisinage de 0, le développement limité d'ordre n

$$g \circ f(x) = T_n(x) + x^n \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = 0,$$

T_n désignant le polynôme obtenu en ne prenant que les termes de degré inférieur ou égal à n du polynôme $Q_n[P_n(x)]$.

EXEMPLE. — Développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction

$$x \longmapsto e^{\sin x}.$$

On a

$$f(x) = \sin x = x + x^2 \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_2(x).$$

Il en résulte $Q_2[P_2(x)] = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ et, par suite,

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

Développement limité d'une fonction dérivée

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n au voisinage de 0 qui admet une dérivée d'ordre $(n+1)$ en 0. La fonction f admet donc au voisinage de 0, un développement limité d'ordre $(n+1)$

$$f(x) = P_{n+1}(x) + x^{n+1} \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

Théorème. — La fonction dérivée f' admet au voisinage de 0, un développement limité d'ordre n

$$f'(x) = P'_{n+1}(x) + x^n \varepsilon_1(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0,$$

P'_{n+1} étant le polynôme dérivé du polynôme P_n .

EXEMPLE. — La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ est de classe \mathcal{C}^n au voisinage de 0 et admet une dérivée d'ordre $(n+1)$. On a de plus

$$f(x) = 1 + x + \dots + x^{n+1} + x^{n+1} \varepsilon(x).$$

On en déduit $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + x^n \varepsilon_1(x)$,

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0$.

Application des développements limités

Recherche de limites

EXEMPLE. — Déterminer la limite quand x tend vers 0 de la fonction f :

$$x \mapsto \frac{1 - x \sin x - \cos x}{(e^x - 1)^2}.$$

On a

$$1 - x \sin x - \cos x = -\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x) \text{ et } (e^x - 1)^2 = x^2 + x^2 \varepsilon_2(x).$$

$$\text{On en déduit } f(x) = \frac{-\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)}{x^2 + x^2 \varepsilon_2(x)}, \text{ puis } \lim_0 f = -\frac{1}{2}.$$

Étude des branches infinies

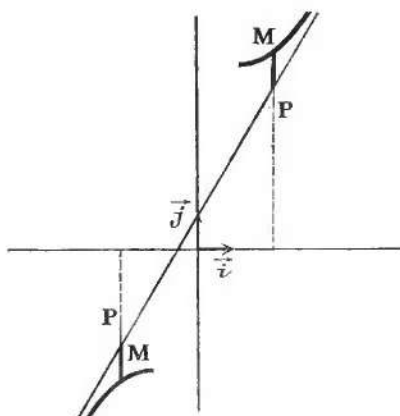
EXEMPLE. — Étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction f :

$$x \mapsto x \left(1 + e^{\frac{1}{x}} \right).$$

On a $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{-\infty} f = -\infty$.

Au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, on a

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{\pm\infty} \varepsilon = 0.$$



On en déduit $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon(x)$.

Donc la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe représentative (\mathcal{C}) de f .

$\overline{\text{PM}}$ est du signe de $\frac{1}{2x}$. Donc (\mathcal{C}) est « au-dessus » de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ et « en dessous » de l'asymptote au voisinage de $-\infty$.

Développements limités au voisinage de 0 des fonctions usuelles

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x).$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^6 \varepsilon(x).$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x).$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x).$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x).$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5 \varepsilon(x).$$

$$\operatorname{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{p+1} \frac{x^p}{p} + x^p \varepsilon(x).$$

$$k \in \mathbb{R}, (1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!} x^p + x^p \varepsilon(x).$$

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + x^{2p+2} \varepsilon(x).$$

$$\operatorname{Arg} \operatorname{th} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + x^{2p+2} \varepsilon(x).$$

$$\begin{aligned} \text{Arc sin } x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \dots (2p-1)}{2 \cdot 4 \dots (2p)} \times \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + x^{2p+2} \varepsilon(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Arg sh } x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots \\ &\quad + (-1)^p \frac{1 \cdot 3 \dots (2p-1)}{2 \cdot 4 \dots (2p)} \times \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + x^{2p+2} \varepsilon(x). \end{aligned}$$

où ε est une fonction telle que $\lim_0 \varepsilon = 0$.

○ Montrer que les fonctions f suivantes (exercices numéros 1 à 6) admettent, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 et former ce développement limité (on utilisera la formule de Taylor-Young) :

1. $f(x) = (1+x)^{-1}$.

La fonction f est dérivable à tout ordre sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

et par récurrence on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

La formule de Taylor-Young appliquée à f au voisinage de 0, donne

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} [f^{(n)}(0) + \varepsilon(x)], \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0,$$

soit

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x).$$

2. $f(x) = (1-x)^{-1}$.

Un raisonnement analogue au précédent conduit à

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x), \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \lim_0 \varepsilon = 0.$$

3. $f(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}$.

La fonction f est dérivable à tout ordre sur $] -\infty, 1[$ et l'on a

$$\forall x \in] -\infty, 1[,$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}, f''(x) = -\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}, f'''(x) = -\frac{3}{8}(1-x)^{-\frac{5}{2}}.$$

et par récurrence on montre que

$$\forall n \geq 2, \forall x \in]-\infty, +1[, \quad f^{(n)}(x) = -\frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{2^n} (1-x)^{-\frac{2n-1}{2}}.$$

Le développement de f au voisinage de 0 par la formule de Taylor-Young donne

$$(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x),$$

avec $\lim_0 \varepsilon = 0$, soit

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{3x^3}{48} - \dots - \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2^n n!} x^n + x^n \varepsilon(x).$$

4. $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$.

La fonction f est dérivable à tout ordre sur $] -1, +\infty[$ et un raisonnement analogue au précédent conduit à

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} x^n + x^n \cdot \varepsilon(x),$$

avec $\lim_0 \varepsilon = 0$.

5. $f(x) = \text{Log}(2+x)$.

La fonction f est dérivable à tout ordre sur $] -2, +\infty[$ et l'on a

$$\forall x \in] -2, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{2+x}, f''(x) = \frac{-1}{(2+x)^2}, f'''(x) = \frac{2}{(2+x)^3}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(2+x)^n}.$$

Le développement de Taylor-Young de la fonction f au voisinage de 0 est

$$\text{Log}(2+x) = \text{Log} 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n \cdot 2^n} + x^n \varepsilon(x),$$

avec $\lim_0 \varepsilon = 0$.

6. $f(x) = \cos(1 + x)$.

La fonction f est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = \cos\left(1 + x + n \frac{\pi}{2}\right).$$

Le développement de Taylor-Young de la fonction f au voisinage de 0 est

$$f(x) = \cos 1 - \frac{x}{1} \sin 1 - \frac{x^2}{2!} \cos 1 + \frac{x^3}{3!} \sin 1 + \frac{x^4}{4!} \cos 1 + \dots \\ + \frac{x^n}{n!} \cos\left(1 + n \frac{\pi}{2}\right) + x^n \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

7. Montrer que si une fonction paire a un développement limité au voisinage de 0 la partie régulière de ce développement est paire.

Soit $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = 0$, le développement limité de f au voisinage de 0.

Il en résulte que $f(-x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k x^k + (-1)^n x^n \varepsilon(-x)$.

La fonction g définie au voisinage de 0 par $g(x) = f(x) - f(-x)$ admet pour développement limité à l'ordre n en 0,

$$2 \sum_{1 \leq p \leq \frac{n}{2}} a_{2p-1} x^{2p-1} + x^n [\varepsilon(x) - (-1)^n \varepsilon(-x)],$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} [\varepsilon(x) - (-1)^n \varepsilon(-x)] = 0$.

Or, la fonction g est identiquement nulle, donc la partie régulière du développement limité de g est identiquement nulle à tout ordre. On en déduit

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2p-1} = 0.$$

Par conséquent, la partie régulière du développement limité de g est paire.

8. Soit f une fonction qui admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre 1. Montrer que si f est continue en 0, f est dérivable en 0.

On a, au voisinage de 0, $f(x) = a_0 + a_1 x + x \cdot \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = 0$.

$\lim_0 f = a_0$, donc si f est continue en 0, $f(0) = a_0$.

On en déduit $\frac{f(x) - f(0)}{x} = a_1 + \varepsilon(x)$, puis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = a_1$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.

9. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ si $x \neq 0$, $g(0) = 2$.

1° Étudier la continuité de g en 0.

2° Montrer que g admet, quel que soit n , un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 et former ce développement limité.

1° On a $\lim_0 g = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, donc la fonction g n'est pas continue en 0.

2° Au voisinage de 0, le développement limité à l'ordre $(n + 1)$ de e^x s'écrit $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + x^{n+1} \cdot \varepsilon(x)$, avec $\lim_0 \varepsilon = 0$, et $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit $\forall x \neq 0$, $\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^n}{(n+1)!} + x^n \cdot \varepsilon(x)$.

Donc, quel que soit n , la fonction g admet un développement limité à l'ordre n , lequel est défini ci-dessus.

10. Discuter suivant les valeurs de n , l'existence du développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto x^{\frac{13}{3}}$ et donner la partie régulière de ce développement lorsqu'il existe.

Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ et ε_4 , les fonctions définies au voisinage de 0 par

$$\varepsilon_1(x) = x^{\frac{10}{3}}, \quad \varepsilon_2(x) = x^{\frac{7}{3}}, \quad \varepsilon_3(x) = x^{\frac{4}{3}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_4(x) = x^{\frac{1}{3}}.$$

On a $\lim_0 \varepsilon_1 = \lim_0 \varepsilon_2 = \lim_0 \varepsilon_3 = \lim_0 \varepsilon_4 = 0$, donc la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{13}{3}}$ admet des développements limités jusqu'à l'ordre 4 qui sont

$$f(x) = x \cdot \varepsilon_1(x), \quad f(x) = x^2 \cdot \varepsilon_2(x), \quad f(x) = x^3 \cdot \varepsilon_3(x), \quad f(x) = x^4 \cdot \varepsilon_4(x).$$

Si f admet un développement limité en 0 d'ordre supérieur ou égal à 5, de l'unicité du développement limité (lorsqu'il existe) il résulte que les cinq premiers termes sont nuls.

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^5} = +\infty$, donc f n'a pas de développement limité d'ordre strictement supérieur à 4.

11. Étudier si la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$ a un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$.

La fonction f est dérivable à tout ordre au voisinage de $\frac{\pi}{4}$. Posons $u = \operatorname{tg} x$.

On a

$$f'(x) = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} (1 + u^2) = \frac{1}{3} \left(u^{-\frac{2}{3}} + u^{\frac{4}{3}} \right),$$

$$f''(x) = \frac{1}{3} \left[-\frac{2}{3} u^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3} u^{\frac{1}{3}} \right] (1 + u^2) = \frac{1}{9} \left(-2u^{-\frac{5}{3}} + 2u^{\frac{1}{3}} + 4u^{\frac{7}{3}} \right),$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{1}{9} \left[\frac{10}{3} u^{-\frac{8}{3}} + \frac{2}{3} u^{-\frac{2}{3}} + \frac{28}{3} u^{\frac{4}{3}} \right] (1 + u^2) \\ &= \frac{2}{27} \left(5u^{-\frac{8}{3}} + 6u^{-\frac{2}{3}} + 15u^{\frac{4}{3}} + 14u^{\frac{10}{3}} \right), \end{aligned}$$

d'où

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}, \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{9} \quad \text{et} \quad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{80}{27}.$$

On en déduit le développement limité de f au voisinage de $\frac{\pi}{4}$:

$$f(x) = 1 + \frac{2}{3} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{9} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{40}{81} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + x^3 \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \varepsilon = 0$.

$\frac{\pi}{4}$

○ Développement limité d'ordre n au voisinage de 0, des fonctions f définies respectivement par (exercices numéros 12 à 25) (on utilisera les développements limités des fonctions usuelles) :

12. $f(x) = \sin x \cos 2x$, $n = 6$.

On a, pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{2} [\sin 3x - \sin x]$.

Les développements limités à l'ordre 6, en 0, des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \sin 3x$ sont

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6 \cdot \varepsilon_1(x) \text{ et } \sin 3x = 3x - \frac{9x^3}{2} + \frac{81x^5}{40} + x^6 \varepsilon_2(x),$$

avec $\lim_0 \varepsilon_1 = \lim_0 \varepsilon_2 = 0$.

On en déduit le développement limité de f , à l'ordre 6, au voisinage de 0 :

$$f(x) = x - \frac{13}{6}x^3 + \frac{121}{120}x^5 + x^6 \cdot \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

13. $f(x) = \cos x \operatorname{Log}(1+x)$, $n = 4$.

Les développements limités à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \operatorname{Log}(1+x)$ sont

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \cdot \varepsilon_1(x)$$

et

$$\operatorname{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \cdot \varepsilon_2(x),$$

avec $\lim_0 \varepsilon_1 = \lim_0 \varepsilon_2 = 0$, d'où

$$\cos x \operatorname{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^4 \cdot \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

14. $f(x) = e^x \operatorname{Log}(1+x)$, $n = 3$.

On a, au voisinage de 0,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \cdot \varepsilon_1(x), \quad \lim_0 \varepsilon_1 = 0$$

et $\operatorname{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_2(x)$, $\lim_0 \varepsilon_2 = 0$,

donc

$$e^x \cdot \operatorname{Log}(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

15. $f(x) = (x^3 + 1)\sqrt{1-x}$, $n = 3$.

Au voisinage de 0, on a

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + x^3 \varepsilon_1(x), \text{ avec } \lim_0 \varepsilon_1 = 0,$$

d'où

$$(x^3 + 1)\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15}{16}x^3 + x^3 \cdot \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

$$16. f(x) = (x^7 - x^6 + 13x^5 - x^2 + 1)(1+x)^{\frac{1}{2}}, \quad n = 2.$$

Au voisinage de 0, on a

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon_1(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_1 = 0.$$

On en déduit que

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{9}{8}x^2 + x^2 \cdot \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

$$17. f(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}, \quad n = 2.$$

A l'ordre 2, les développements limités des fonctions $x \mapsto \sin x - 1$ et $x \mapsto \cos x + 1$ sont

$$\sin x - 1 = -1 + x + x^2 \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \cos x + 1 = 2 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_2(x),$$

$$\text{avec } \lim_0 \varepsilon_1 = \lim_0 \varepsilon_2 = 0.$$

La division « puissances croissantes » des parties régulières de ces développements conduit à

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + x^2 \cdot \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

$$18. f(x) = \frac{1}{\sin x} \text{Log}(1+x), \quad n = 3.$$

A l'ordre 4, au voisinage de 0, les développements limités de $\sin x$ et $\text{Log}(1+x)$ sont

$$\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4 \cdot \varepsilon_2(x),$$

$$\text{avec } \lim_0 \varepsilon_1 = \lim_0 \varepsilon_2 = 0.$$

Il en résulte $\frac{\text{Log}(1+x)}{\sin x} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + x^3 \varepsilon_1(x)}{1 - \frac{x^2}{6} + x^3 \varepsilon_2(x)}$ et, en procédant à

la division « puissances croissantes » des parties régulières, on a

$$\frac{\text{Log}(1+x)}{\sin x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3 \cdot \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

19. $f(x) = \text{tg } x, \quad n = 7.$

Les développements limités à l'ordre 7, au voisinage de 0, de $\sin x$ et $\cos x$ sont

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + x^7 \varepsilon_1(x)$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + x^7 \cdot \varepsilon_2(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_1 = \lim_0 \varepsilon_2 = 0.$$

La division « puissances croissantes » des parties régulières des développements précédents donne

$$\text{tg } x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + x^7 \cdot \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

20. $f(x) = e^{\text{Arc sin } x}, \quad n = 4.$

Au voisinage de 0, on a $\text{Arc sin } x = x + \frac{x^3}{6} + x^4 \cdot \varepsilon_1(x)$, avec $\lim_0 \varepsilon_1 = 0$

et $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4 \cdot \varepsilon_2(x)$, avec $\lim_0 \varepsilon_2 = 0$.

En composant les parties régulières de ces développements et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à 4, on obtient

$$e^{\text{Arc sin } x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{5x^4}{24} + x^4 \cdot \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

21. $f(x) = e^{\cos x}, \quad n = 3.$

On a $\forall x \in \mathbb{R}, e^{\cos x} = e \times e^{\cos x - 1}$.

Il en résulte le développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre 3

$$e^{\cos x} = e - e \frac{x^2}{2} + x^3 \cdot \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

22. $f(x) = (1 + \text{Arc tg } x)^{\frac{x}{\sin^2 x}}, \quad n = 2.$

Au voisinage de 0, on a $\text{Log } f(x) = \frac{x}{\sin^2 x} \text{Log } [1 + \text{Arc tg } x]$, avec

$$\frac{x}{\sin^2 x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + x^2 \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \text{Arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + x^3 \cdot \varepsilon_2(x),$$

avec $\lim_0 \varepsilon_1 = \lim_0 \varepsilon_2 = 0.$

On en déduit

$$\text{Log } [1 + \text{Arc tg } x] = x - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_3(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_3 = 0,$$

puis

$$\frac{x}{\sin^2 x} \text{Log } [1 + \text{Arc tg } x] = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2 \varepsilon_4(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_4 = 0.$$

Il en résulte

$$f(x) = e^{\text{Log } [f(x)]} = e \times e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2 \varepsilon_4(x)} = e - e \frac{x}{2} + 11e \frac{x^2}{24} + x^2 \cdot \varepsilon(x),$$

avec $\lim_0 \varepsilon_2 = 0.$

23. $f(x) = k(2x) - k(x), \quad n = 3, \quad \text{où} \quad k(x) = \sin(x - x^2).$

Le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction sinus est

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_1 = 0.$$

On en déduit, qu'au voisinage de 0, on a

$$k(x) = x - x^2 - \frac{x^3}{6} + x^3 \cdot \varepsilon_2(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_2 = 0,$$

puis

$$k(2x) = 2x - 4x^2 - \frac{4x^3}{3} + x^3 \cdot \varepsilon_3(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_3 = 0,$$

donc

$$f(x) = x - 3x^2 - \frac{7x^3}{6} + x^3 \cdot \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

$$24. f(x) = x [\operatorname{ch} x]^{\frac{1}{x}}, \quad n = 4.$$

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $g(x) = (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}}$.

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \operatorname{Log} g(x) = \frac{1}{x} \cdot \operatorname{Log} (\operatorname{ch} x).$$

Au voisinage de 0, le développement limité à l'ordre 4, de $\operatorname{ch} x$ est

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \cdot \varepsilon_1(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_1 = 0,$$

d'où

$$\operatorname{Log} (\operatorname{ch} x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4 \cdot \varepsilon_2(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_2 = 0,$$

puis

$$\operatorname{Log} (g(x)) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + x^3 \cdot \varepsilon_2(x).$$

On en déduit

$$g(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + x^3 \cdot \varepsilon_3(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_3 = 0,$$

et

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + x^4 \cdot \varepsilon_3(x).$$

$$25. f(x) = \operatorname{sh} x - \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|, \quad n = 3.$$

Pour tout x de l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on a $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} > 0$.

Au voisinage de 0, le développement limité de la fonction tangente, à l'ordre 3 est

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + x^3 \cdot \varepsilon_1(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_1 = 0,$$

d'où

$$1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + x^3 \cdot \varepsilon_2(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_2 = 0.$$

Il en résulte

$$\text{Log} \left(1 + \text{tg} \frac{x}{2} \right) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{12} + x^3 \cdot \varepsilon_3(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3 = 0,$$

et, en changeant x en $-x$,

$$\text{Log} \left(1 - \text{tg} \frac{x}{2} \right) = -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{12} + x^3 \cdot \varepsilon_4(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_4 = 0.$$

On en déduit

$$\text{Log} \left| \text{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = x + \frac{x^3}{6} + x^3 \cdot \varepsilon_5(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_5 = 0.$$

Par ailleurs,

$$\text{sh } x = x + \frac{x^3}{6} + x^3 \cdot \varepsilon_6(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_6 = 0,$$

donc

$$f(x) = x^3 \cdot \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

26. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{\sin x}$.

1° Montrer que f admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre n , quel que soit n .

2° Former le développement limité d'ordre 6 de f au voisinage de 0. En déduire le développement limité d'ordre 6 au voisinage de 0 de la fonction

$$g : x \longmapsto x \cotg x.$$

1° La fonction $\frac{1}{f}$ admet au voisinage de 0 un développement limité à tout ordre n :

$$\frac{1}{f}(x) = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ 2k \leq n}} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} + x^n \cdot \varepsilon_1(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0.$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f} = 1$, donc cette limite est non nulle et, par conséquent, f admet

un développement limité au voisinage de 0 au même ordre que $\frac{1}{f}$.

2° A l'ordre 6, au voisinage de 0, le développement limité de $\frac{1}{f}$ est

$$\frac{1}{f}(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + x^6 \cdot \varepsilon_1(x).$$

La division « puissances croissantes » du polynôme 1 par le polynôme

$$1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040}$$

conduit à

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \frac{31x^6}{15120} + x^6 \cdot \varepsilon_2(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_2 = 0.$$

L'égalité $g(x) = f(x) \times \cos x$ implique, qu'au voisinage de 0, on a

$$x \cotg x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} + x^6 \cdot \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

27. Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = e^{-x^2}$.

1° Montrer que, pour tout entier naturel n , f est n fois dérivable.

Vérifier que $f^{(5)}(x) = 8(-15x + 20x^3 - 4x^5)e^{-x^2}$.

2° Calculer le développement limité de f à l'ordre 5 au voisinage de 0.

3° Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) et a est un réel positif strictement inférieur à 1. Soit g l'application de $[a-1, 1-a]$ dans \mathbb{R} , dont

la courbe représentative est le demi-cercle d'extrémités $A\left(\frac{a-1}{a}\right)$ et $B\left(\frac{1-a}{a}\right)$,

qui passe par $C\left(\frac{0}{1}\right)$. Déterminer g et un développement limité de g à l'ordre 5 au voisinage de 0.

4° Comparer, selon les valeurs de a , les positions relatives au voisinage de 0 des courbes représentatives des fonctions f et g .

1° La fonction f est paire et partout dérivable. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2x e^{-x^2}.$$

Supposons que la fonction f soit $(n-1)$ fois dérivable et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n-1)}(x) = e^{-x^2} \cdot P_{n-1}(x),$$

où P_{n-1} est un polynôme de degré $(n-1)$. La fonction $f^{(n-1)}$ est donc dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = P_n(x) \cdot e^{-x^2},$$

où P_n est le polynôme de degré n défini par $P_n'(x) = 2x \cdot P_{n-1}(x) = P_n(x)$.

La fonction f est donc dérivable à tout ordre sur \mathbb{R} et l'on a

$$P_1(x) = -2x,$$

$$P_2(x) = 4x^2 - 2,$$

$$P_3(x) = -8x^3 + 12x,$$

$$P_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,$$

$$P_5(x) = -32x^5 + 160x^3 - 120x = 8(-4x^5 + 20x^3 - 15x).$$

On vérifie donc que $f^{(5)}(x) = 8(-4x^5 + 20x^3 - 15x)e^{-x^2}$.

2° La formule de Taylor-Young appliquée à f :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f'''(0) + \frac{x^4}{24}f^{(4)}(0) + \frac{x^5}{120}f^{(5)}(0) + x^5\varepsilon_1(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0$ fournit le développement limité de f , à l'ordre 5, au voisinage de 0

$$f(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + x^5 \cdot \varepsilon_1(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0.$$

3° Le cercle (Γ) de diamètre $[A, B]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

Une équation cartésienne de (Γ) est donc

$$(x - a + 1)(x + a - 1) + (y - a)(y - a) = 0,$$

soit

$$(y - a)^2 + x^2 - (a - 1)^2 = 0.$$

(Γ) est la réunion de deux demi-cercles (Γ_1) et (Γ_2) d'équations respectives

$$y = a + \sqrt{(a - 1)^2 - x^2} \quad \text{et} \quad y = a - \sqrt{(a - 1)^2 - x^2}.$$

Le demi-cercle d'extrémités A et B qui passe par $C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est (Γ_1) ; on en déduit que g est la fonction définie sur $[a - 1, 1 - a]$ par

$$g(x) = a + \sqrt{(1 - a)^2 - x^2},$$

soit

$$g(x) = a + (1 - a) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{1 - a}\right)^2}.$$

Le développement limité, à l'ordre 5, au voisinage de 0 de la fonction g est

$$\begin{aligned} g(x) &= a + (1 - a) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1 - a}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{x}{1 - a}\right)^4 \right] + x^5 \cdot \varepsilon_2(x) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2(1 - a)} - \frac{x^4}{8(1 - a)^3} + x^5 \cdot \varepsilon_2(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0. \end{aligned}$$

4° Au voisinage de 0, on a

$$f(x) - g(x) = \frac{2a - 1}{2(1 - a)} x^2 + \frac{4(1 - a)^3 + 1}{8(1 - a)^3} x^4 + x^5 \cdot \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

Il en résulte que, pour tout x non nul voisin de 0, on a

- si $a \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$, $f(x) > g(x)$, donc la courbe représentative de f est au-dessus de celle représentant g ;
- si $a \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$, $f(x) < g(x)$, donc la courbe représentant f est au-dessous de celle représentant g ;
- si $a = \frac{1}{2}$, $f(x) - g(x) = \frac{3}{2}x^4 + x^5 \cdot \varepsilon(x)$ et, par conséquent, la courbe représentant f est au-dessus de celle représentant g .

28. Soit f la fonction définie par $f(x) = |x|^4 \sin \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Étudier la continuité, la dérivabilité et l'existence d'un développement limité de f en 0.

On a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| = |x|^4 \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|^4$, d'où $\lim_0 f = 0$.

La fonction f est donc continue en 0.

De plus, f est impaire et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$.

Il en résulte que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

La fonction f admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre 2 :

$f(x) = x^2 \cdot \varepsilon(x)$, où la fonction ε définie par $\varepsilon(x) = |x|^{\frac{1}{4}} \sin \frac{1}{x}$ admet 0 pour limite en 0. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x^n}$ n'a pas de limite en 0, donc f n'a pas de développement limité d'ordre supérieur ou égal à 3 au voisinage de 0.

29. Soit f la fonction définie par $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

1° Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

2° Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ par une fonction g .

3° Étudier la différentiabilité de la fonction g . Préciser la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

4° Montrer que si x tend vers $\frac{\pi}{2}$ à gauche, $f'(x)$ est équivalent à

$$-\frac{2}{\pi} e^{\left(\frac{1}{x}-1\right) \operatorname{Log} \cos x}.$$

5° Représenter la restriction de g à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1° On a $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[- \{0\}, f(x) = e^{\frac{1}{x} \operatorname{Log}(\cos x)}$.

Au voisinage de 0, les développements limités à l'ordre 3 des fonctions cosinus et $(\operatorname{Log} \circ \cos)$ sont

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \cdot \varepsilon_1(x) \text{ et } \operatorname{Log}(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + x^3 \cdot \varepsilon_2(x),$$

avec $\lim_0 \varepsilon_1 = \lim_0 \varepsilon_2 = 0$.

Il en résulte $\frac{1}{x} \operatorname{Log}(\cos x) = -\frac{x}{2} + x^2 \cdot \varepsilon_2(x)$, puis

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + x^2 \cdot \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

2° On a $\lim_0 f = 1$ et $\lim_{\left(\frac{\pi}{2}\right)_-} f = 0$, donc le prolongement par continuité de f

sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ est la fonction g définie par $g(0) = 1$, $g\left(+\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\text{et } \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[- \{0\}, g(x) = f(x)$$

3° On déduit de l'étude précédente $\frac{g(x) - g(0)}{x} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{8} + x \cdot \varepsilon(x)$, d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -\frac{1}{2}.$$

La fonction g est dérivable en 0 et $g'(0) = -\frac{1}{2}$.

La tangente en $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ à la courbe représentant g a pour équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$

et l'égalité $g(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{x^2}{8} + x^2 \cdot \varepsilon(x)$ montre, qu'au voisinage de A, la courbe est au-dessus de sa tangente,

4° Pour tout x élément de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\setminus \{0\}$, la fonction f est dérivable et l'on a

$$f'(x) = \left[-\frac{1}{x^2} \text{Log}(\cos x) - \frac{1}{x} \text{tg } x \right] \times f(x),$$

d'où

$$\frac{f'(x)}{-\frac{2}{\pi} e^{\left(\frac{1}{x}-1\right) \text{Log}(\cos x)}} = \frac{\pi}{2} e^{\text{Log}(\cos x)} \times \left[\frac{1}{x^2} \text{Log}(\cos x) + \frac{1}{x} \text{tg } x \right].$$

Au voisinage de $x = \frac{\pi}{2}$, posons $x = \frac{\pi}{2} - u$, avec $u > 0$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{-\frac{2}{\pi} e^{\left(\frac{1}{x}-1\right) \text{Log}(\cos x)}} &= \frac{\pi}{2} e^{\text{Log}(\sin u)} \times \left[\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-u\right)^2} \text{Log} \sin u + \frac{1}{\frac{\pi}{2}-u} \times \frac{\cos u}{\sin u} \right] \\ &= \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}-u} \left[\frac{\sin u \cdot \text{Log}(\sin u)}{\frac{\pi}{2}-u} + \cos u \right]. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{u \rightarrow 0+} \sin u \cdot \text{Log}(\sin u) = \lim_{v \rightarrow 0+} v \cdot \text{Log } v = 0$ et $\lim_{u \rightarrow 0+} \cos u = 1$.

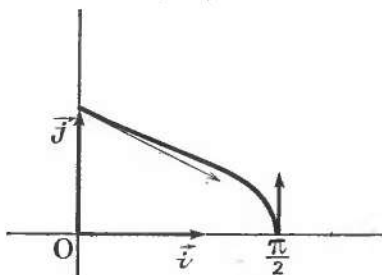
Il en résulte

$$\lim_{u \rightarrow 0+} \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}-u} \left[\frac{\sin u \cdot \text{Log}(\sin u)}{\frac{\pi}{2}-u} + \cos u \right] = 1$$

et, par conséquent, $f'(x) \sim \frac{2}{\pi} e^{\left(\frac{1}{x}-1\right) \text{Log}(\cos x)}$.

5° On a $\lim_{\left(\frac{\pi}{2}\right)-} f' = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)-} -\frac{2}{\pi} e^{\left(\frac{1}{x}-1\right) \text{Log}(\cos x)} = -\infty$

La courbe admet donc au point B $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ une demi-tangente parallèle à $y'Oy$.



30. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1° Montrer que f admet une fonction réciproque.

2° Montrer que f^{-1} admet un développement limité à tout ordre, au voisinage de 0.

Former ce développement à l'ordre 5.

1° La fonction f est impaire et, au voisinage de 0, $e^{x^2} - 1 \sim x^2$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f = 0$.

La fonction f est donc continue sur \mathbb{R} et dérivable en tout point de \mathbb{R}^* .

$$\text{On a } \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{e^{x^2}(2x^2 - 1) + 1}{x^2}.$$

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (2x^2 - 1)e^{x^2} + 1$.

g est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2xe^{x^2}(2x^2 + 1)$.

On en déduit $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur \mathbb{R}_+ .

L'égalité $g(0) = 0$ implique $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) > 0$ et, par suite, $f'(x) > 0$.

Il en résulte que f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

Les propriétés ($f(0) = 0$ et f impaire) entraînent que f est strictement croissante sur \mathbb{R} ; elle est, par ailleurs, continue sur \mathbb{R} et admet donc une fonction réciproque f^{-1} définie sur \mathbb{R} car $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2° • On montre immédiatement que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 1$, donc f est dérivable en 0 et, par suite, sur \mathbb{R} .

On a de plus $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall y \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}.$$

On en déduit par récurrence que f^{-1} est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , f^{-1} admet donc un développement limité en 0, à tout ordre.

• f^{-1} est impaire. Le développement limité à l'ordre de 5 de f^{-1} au voisinage de 0 est de la forme

$$ay + by^3 + cy^5 + y^5 \cdot \varphi(y), \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varphi = 0 \quad \text{et} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Le développement limité de f au voisinage de 0 est

$$f(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + x^5 \varepsilon_1(x), \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon_1 = 0.$$

Du théorème sur le développement limité de la composée de deux fonctions, il résulte qu'au voisinage de 0, on a

$$f^{-1} \circ f(x) = ax + \left(b + \frac{a}{2}\right)x^3 + \left(\frac{a}{6} + \frac{3b}{2} + c\right)x^5 + x^5 \varepsilon_2(x), \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon_2 = 0.$$

De $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$ et de l'unicité du développement limité, on déduit que a , b et c sont tels que

$$a = 1, \quad \frac{a}{2} + b = 0, \quad \frac{a}{6} + \frac{3b}{2} + c = 0.$$

Il en résulte

$$a = 1, \quad b = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad c = \frac{7}{12},$$

et le développement limité de f^{-1} , à l'ordre 5, au voisinage de 0 est

$$f^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{7x^5}{12} + x^5 \cdot \varphi(x), \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varphi = 0.$$

31. Soit n un entier strictement positif et f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} telle que $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$, $f^{(k)}(0) = 0$ et $f(0) = 0$.

1° Montrer qu'il existe une fonction continue, et une seule, g telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^n g(x).$$

Calculer $g(0)$ et montrer que g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* .

2° Montrer que g admet en 0 des développements limités de tous ordres. Déterminer $g'(0)$.

1° La fonction f vérifie les hypothèses de la formule de Taylor-Young.

De $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$, $f^{(k)}(0) = 0$ et de $f(0) = 0$, il résulte qu'au voisinage de 0, on a

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n [f^{(n)}(0) + \varepsilon(x)], \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon = 0.$$

On en déduit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ et l'unique prolongement par continuité sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x^n}$ est défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \frac{f(x)}{x^n} \quad \text{et} \quad g(0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

Les fonctions f et $x \mapsto x^n$ sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* donc g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* .

2° La fonction f admet des développements limités à tout ordre. Pour $m \geq n$, au voisinage de 0, on a

$$f(x) = \sum_{i=n}^m a_i x^i + x^m \varepsilon_m(x), \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon_m = 0.$$

Il en résulte que g admet en 0 un développement limité à tout ordre p et l'on a

$$g(x) = \sum_{j=0}^p a_{j+n} x^j + x^p \varepsilon_{n+p}(x) = \sum_{j=0}^p \frac{x^j}{(n+j)!} f^{(n+j)}(0) + x^p \varepsilon_{n+p}(x).$$

g est continue en 0, donc dérivable en 0 (exercice 8).

$$\text{Par conséquent, } g'(0) = a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0).$$

32. Soit f et g des fonctions impaires de classe \mathcal{C}^3 sur un voisinage de 0, avec $g'''(0) \neq 0$. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)}.$$

La fonction f , de classe \mathcal{C}^3 sur un voisinage de 0, admet sur ce voisinage un développement limité à l'ordre 3 :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f'''(0) + x^3 \cdot \varepsilon_1(x), \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon_1 = 0.$$

La fonction f est impaire, donc le polynôme

$$f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f'''(0)$$

est impair d'où $f(0) = f''(0) = 0$.

On en déduit que

$$f(x) = xf'(0) + \frac{x^3}{6} f'''(0) + x^3 \cdot \varepsilon_1(x),$$

puis, en substituant $2x$ (resp. $3x$) à x ,

$$f(2x) = 2xf'(0) + \frac{4}{3} x^3 f'''(0) + x^3 \cdot \varepsilon_2(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 8 \cdot \varepsilon_1(2x) = 0;$$

$$f(3x) = 3xf'(0) + \frac{9}{2} x^3 f'''(0) + x^3 \cdot \varepsilon_3(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 27 \cdot \varepsilon_1(3x) = 0.$$

Il en résulte, qu'au voisinage de 0, on a

$$f(x) - 2f(2x) + f(3x) = 2x^3 f'''(0) + x^3 \cdot \varepsilon(x),$$

$$\text{avec } \lim_0 \varepsilon = \lim_0 (\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 0.$$

Le même raisonnement appliqué à g , montre qu'au voisinage de 0

$$g(x) - 2g(2x) + g(3x) = 2x^3 g'''(0) + x^3 \cdot \varphi(x), \text{ avec } \lim_0 \varphi = 0.$$

Par conséquent, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'''(0) + \varepsilon(x)}{2g'''(0) + \varphi(x)} = \frac{f'''(0)}{g'''(0)}.$$

○ Déterminer les limites suivantes (exercices numéros 33 à 40).

$$33. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sin x)^4} \left[\sin \frac{x}{1-x} - \frac{\sin x}{1-\sin x} \right].$$

Les développements limités en 0 à l'ordre 4 des fonctions $x \mapsto \frac{x}{1-x}$,
 $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto 1 - \sin x$ sont

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^4 \varepsilon_1(x), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon_2(x),$$

$$1 - \sin x = 1 - x + \frac{x^3}{6} - x^4 \varepsilon_2(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_1 = \lim_0 \varepsilon_2 = 0.$$

On en déduit les développements limités en 0, au même ordre de $\sin \frac{x}{1-x}$

et $\frac{\sin x}{1-\sin x}$:

$$\sin \frac{x}{1-x} = x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{x^4}{2} + x^4 \varepsilon_3(x)$$

et

$$\frac{\sin x}{1 - \sin x} = x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{2x^4}{3} + x^4 \varepsilon_4(x)$$

avec $\lim_0 \varepsilon_3 = \lim_0 \varepsilon_4 = 0$.

Il en résulte que $\left[\sin \left(\frac{x}{1-x} \right) - \frac{\sin x}{1 - \sin x} \right] \underset{0}{\sim} -\frac{x^4}{6}$.

Par ailleurs, $\sin^4 x \underset{0}{\sim} x^4$, d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^4 x} \left[\sin \left(\frac{x}{1-x} \right) - \frac{\sin x}{1 - \sin x} \right] = -\frac{1}{6}$$

$$34. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 + \cos x) - 2 \operatorname{tg} x}{2x - \sin x \cdot \operatorname{tg} x}$$

Au voisinage de 0, on a

$$1 + \cos x = 2 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_1(x), \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + x^3 \cdot \varepsilon_2(x),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \cdot \varepsilon_3(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_1 = \lim_0 \varepsilon_2 = \lim_0 \varepsilon_3 = 0.$$

On en déduit

$$x(1 + \cos x) - 2 \operatorname{tg} x = -\frac{7x^3}{6} + x^3 \cdot \varepsilon_4(x)$$

et

$$2x - \sin x - \operatorname{tg} x = -\frac{x^3}{6} + x^3 \cdot \varepsilon_5(x),$$

avec $\lim_0 \varepsilon_4 = \lim_0 \varepsilon_5 = 0$. Il en résulte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \cos x) - 2 \operatorname{tg} x}{2x - \sin x - \operatorname{tg} x} = 7.$$

$$35. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{Log} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)} - \cos x.$$

Au voisinage de 0, on a

$$\operatorname{Log}(1+x) = x + x \cdot \varepsilon_1(x), \quad \operatorname{Log}(1-x) = -x + x \cdot \varepsilon_2(x),$$

avec $\lim_0 \varepsilon_1 = \lim_0 \varepsilon_2 = 0$, d'où

$$\text{Log} \frac{1+x}{1-x} \underset{0}{\sim} 2x.$$

Il en résulte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\text{Log} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x}{\text{Log} \frac{1+x}{1-x}} - \cos x \right] = 0.$$

$$36. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{ch } x)^{\text{sh } x} - (\text{sh } x)^{\text{ch } x}.$$

On a, pour tout x réel strictement positif,

$$(\text{ch } x)^{\text{sh } x} - (\text{sh } x)^{\text{ch } x} = e^{\text{sh } x \text{Log} (\text{ch } x)} [1 - e^{\text{ch } x \text{Log} (\text{sh } x) - \text{sh } x \text{Log} (\text{ch } x)}].$$

Posons $e^{-x} = u$. On obtient

$$\begin{aligned} & \text{ch } x \text{Log sh } x - \text{sh } x \text{Log ch } x \\ &= \left(\frac{1+u^2}{2u} \right) \text{Log} \left(\frac{1-u^2}{2u} \right) - \left(\frac{1-u^2}{2u} \right) \text{Log} \left(\frac{1+u^2}{2u} \right) \\ &= -u \text{Log } 2u + \frac{1}{2u} [(1+u^2) \text{Log} (1-u^2) - (1-u^2) \text{Log} (1+u^2)]. \end{aligned}$$

Au voisinage de 0, on a

$$\frac{1}{2u} [(1+u^2) \text{Log} (1-u^2) - (1-u^2) \text{Log} (1+u^2)] = -u + u \varepsilon(u),$$

avec $\lim_0 \varepsilon = 0$.

Il résulte de la formule de Maclaurin

$$1 - e^{-u[\text{Log } 2u + 1 - \varepsilon(u)]} = u [\text{Log } 2u + 1 - \varepsilon(u)] e^{-\theta u [\text{Log } 2u + 1 - \varepsilon(u)]},$$

avec $\theta \in]0, 1[$.

On en déduit

$$1 - e^{-u[\text{Log } 2u + 1 - \varepsilon(u)]} \underset{0}{\sim} u \text{Log } u,$$

puis

$$(\text{ch } x)^{\text{sh } x} - (\text{sh } x)^{\text{ch } x} \underset{+\infty}{\sim} -x e^{[\text{sh } x \text{Log} (\text{ch } x) - x]}.$$

En conséquence

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{ch } x)^{\text{sh } x} - (\text{sh } x)^{\text{ch } x} = -\infty.$$

$$37. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \operatorname{Log} x} \left[-\frac{\operatorname{Log}(1+x)}{\operatorname{Log} x} \right]^x.$$

Au voisinage de 0 et pour x positif, on a

$$\left[-\frac{\operatorname{Log}(1+x)}{\operatorname{Log} x} \right]^x = e^{x \operatorname{Log} \left(-\frac{\operatorname{Log}(1+x)}{\operatorname{Log} x} \right)} \sim e^{x \operatorname{Log} \left(\frac{-x}{\operatorname{Log} x} \right)}.$$

Or, pour tout x de $\left] 0, \frac{1}{e} \right[$, on a

$$0 < \frac{-x}{\operatorname{Log} x} < x, \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \operatorname{Log} \left(\frac{-x}{\operatorname{Log} x} \right) = 0.$$

On en déduit

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \operatorname{Log} \left(-\frac{\operatorname{Log}(1+x)}{\operatorname{Log} x} \right)} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \operatorname{Log} x} \left[-\frac{\operatorname{Log}(1+x)}{\operatorname{Log} x} \right]^x = -\infty.$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1 - \frac{x}{2}}}{(1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}} - e^{1 - \frac{x}{2}}}$$

Les développements limités au voisinage de 0, à l'ordre 2 des fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{x} \operatorname{Log}(1 + \sin x) \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{1}{x} \operatorname{Log}(1 + \operatorname{tg} x)$$

sont respectivement

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad 1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + x^2 \cdot \varepsilon_2(x),$$

avec $\lim_0 \varepsilon_1 = \lim_0 \varepsilon_2 = 0$.

Il en résulte

$$\frac{(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1 - \frac{x}{2}}}{(1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}} - e^{1 - \frac{x}{2}}} = \frac{e^{\frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon_1(x)} - 1}{e^{\frac{2x^2}{3} + x^2 \varepsilon_2(x)} - 1} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{6}}{\frac{2x^2}{3}}$$

et, par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1 - \frac{x}{2}}}{(1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}} - e^{1 - \frac{x}{2}}} = \frac{1}{4}.$$