

Devoir maison

Exercice 1

1. En utilisant le changement de variable $u = \frac{\pi}{4} - t$, montrer que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin(t + \frac{\pi}{4}))dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)dt.$$

2. Montrer que pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a:

$$\cos t > 0, \quad \sin(t + \frac{\pi}{4}) > 0 \quad \text{et} \quad 1 + \tan t = \frac{\sqrt{2} \sin(t + \frac{\pi}{4})}{\cos t}.$$

3. Dédurre que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx = \frac{\pi \ln 2}{8}.$$

Exercice 2

1. Trouver les primitives de la fonction:

$$f(x) = \frac{x^5}{(x-1)(x^2-x+1)}.$$

2. Résoudre l'équation différentielle

$$y' - \frac{y}{x-1} = \frac{x^5}{x^2-x+1}.$$

3. Montrer que la fonction $g(x) = x^3 - 1$ est une solution de l'équation:

$$y' - \frac{y}{x-1} = 2x^2 - x + 1.$$

Trouver la solution de cette équation qui vérifie $y(0) = 0$.