

Devoir Maison

2025-2026

Exercice 1.

Soit $I =]0, 1[$ et soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$u(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right| \quad x \in I.$$

1. Montrer que $u \in L^2(I)$.
2. Calculer la dérivée au sens classique de u sur $I \setminus \{\frac{1}{2}\}$.
3. Montrer que u admet une dérivée faible $u \in L^2(I)$.
4. Déterminer explicitement u' .
5. Vérifier la définition de la dérivée faible :

$$\int_0^1 u(x)\phi'(x)dx = - \int_0^1 u'(x)\phi(x)dx \quad \forall \phi \in C_c^1(I).$$

Exercice 2.

Soit la suite $(u_n)_n$ définie sur $I =]0, 1[$ par

$$u_n = \frac{\sin(nx)}{n} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que pour $u_n \in H^1(I)$.
2. Calculer u'_n .
3. Montrer que $(u_n)_n$ est bornée dans $H^1(I)$.
4. Montrer que $u_n \rightarrow 0$ dans $L^2(I)$.
5. Montrer que $u_n \rightharpoonup 0$ dans $H^1(I)$.

Exercice 3.

Soit u une fonction de $L^1_{loc}(I)$ où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Soient $c \in I$ et v la fonction définie par

$$v(x) = \int_c^x u(t)dt, \quad \forall x \in I$$

1. Montrer que la dérivée faible de v est égale à u , et que v est continue.
2. Dédire que si I est borné et $u \in L^1(I)$, alors $v \in W^{1,1}(I)$.
3. Dédire que si $u \in W^{1,1}(I)$, il existe une fonction \bar{u} continue sur I telle que $u = \bar{u}$ p.p. sur I .