

### III. 1. Introduction

Dans la réalité, de nombreux écoulements compressibles à grande vitesse subissent de fortes variations à leurs caractéristiques ( $T, p, \rho$ ) sur des distances très faibles de telle sorte qu'elles apparaissent discontinues. Ces discontinuités sont appelés ondes de choc. A titre d'exemple, les ondes de détonation générées par une explosion ou produites par un avion en vol supersonique.

A la fin du chapitre précédent, on a présenté les régimes d'écoulement ayant lieu dans une tuyère de Laval. Parmi ces régimes, on a cité le cas de tuyère "amorcée" caractérisé par le passage d'un écoulement de l'état supersonique à l'état subsonique à travers un choc normal dans le divergent. L'écoulement reste isentropique en amont et en aval de l'onde de choc qui, elle, modifie l'entropie (conserve l'enthalpie totale  $h_i$ ) des particules fluide. Ainsi ce phénomène de choc est fortement irréversible car il est accompagné d'un un incrément d'entropie.

Dans ce chapitre, ce phénomène sera traité en modélisant le choc comme une discontinuité stationnaire. Ainsi, par le biais des équations de conservation, des relations simples entre l'état des variables physiques, caractérisant l'écoulement, en amont et en aval du choc seront établies. Pour cela, précisons les hypothèses à utiliser:

- > Absence de travail et d'apport de chaleur.
- > Le fluide est à l'équilibre thermodynamique.
- > Les forces de frottement et de volume sont négligeables.

### III. 2. Equations de base

Soit un choc, normal à l'écoulement, séparant le domaine d'un canal en deux: une région en amont (1) et une région en aval (2). La discontinuité du choc est très mince de telle sorte que les  $S_1=S_2=S$ .

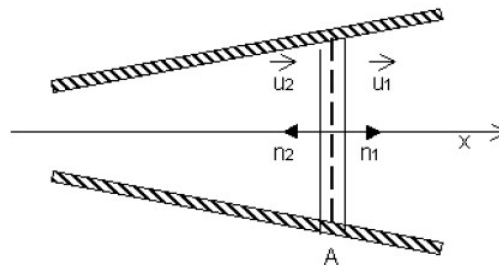


Figure III.1

On écrit les différentes équations de conservations permettant de relier l'état (1) à l'état (2) :

#### a. Equation de masse

$$q_m = \rho_1 \cdot S_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot u_2 \implies \rho_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot u_2$$

#### b. Equation d'Euler

$$\rho_2 \cdot u_2^2 \cdot S_2 - \rho_1 \cdot u_1^2 \cdot S_1 = -(p_2 \cdot S_2 - p_1 \cdot S_1) \implies p_1 + \rho_1 \cdot u_1^2 = p_2 + \rho_2 \cdot u_2^2$$

#### c. Equation de l'énergie (conservation de l'enthalpie totale)

On applique l'équation de Barré Saint-Venant convenable aussi pour les écoulements adiabatiques et irréversibles :

$$h_{i,j} = C_p T_i = \frac{1}{2} u_1^2 + \underbrace{\frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1}}_{h_1} = \frac{1}{2} u_2^2 + \underbrace{\frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p_2}{\rho_2}}_{h_2}$$

d. Equation de l'état

$$p = \rho r T \Rightarrow \frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2}$$

III. 3. Relations de compression de l'onde de choc

A l'aide des équations de base on va établir les relations de compression liant les grandeurs d'état d'un gaz parfait immédiatement en amont et en aval du choc. De la substitution de l'équation de masse dans l'équation d'Euler, on obtient :

$$\rho_1 \cdot u_1 (u_2 - u_1) = p_1 - p_2 \quad \times (u_1 + u_2) / (\rho_1 u_1) \rightarrow u_2^2 - u_1^2 = (p_1 - p_2) \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

En tenant compte de ce résultat, l'équation de Barré donne :

$$\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

La deuxième égalité relie l'état thermodynamique en amont du choc ( $p_1, \rho_1$ ) à l'état ( $p_2, \rho_2$ ) en aval du choc. Après des simplifications, l'équation prend la forme suivante :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - (\rho_1 / \rho_2)}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \cdot (\rho_1 / \rho_2) - 1}$$

De ce résultat et de l'équation d'état, on aboutit aux équations liant les grandeurs ( $T_1, \rho_1$ ), ( $T_1, p_1$ ), ( $\rho_1, p_1$ ) de l'état amont aux grandeurs ( $T_2, \rho_2$ ), ( $T_2, p_2$ ), ( $\rho_2, p_2$ ) de l'état aval :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - (\rho_1 / \rho_2)}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - (\rho_2 / \rho_1)}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + (p_2 / p_1)}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + (p_1 / p_2)}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \cdot (p_2 / p_1) + 1}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + (p_2 / p_1)}$$

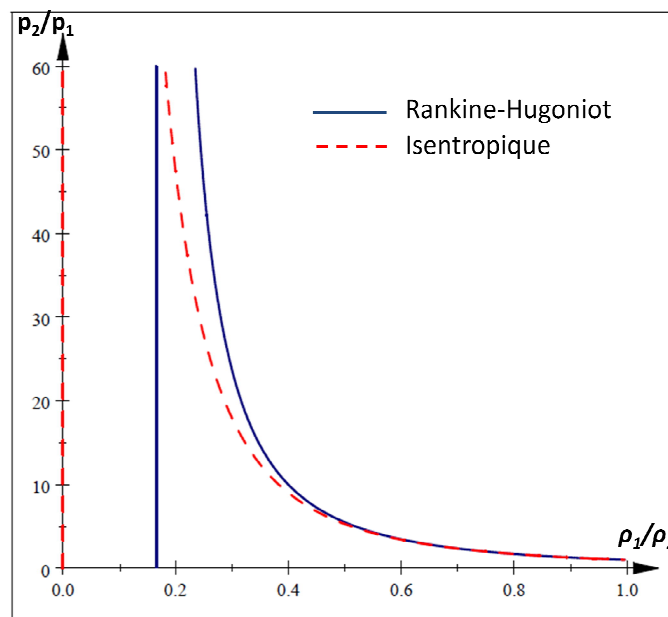


Figure III.2

Ces relations, permettant de quantifier le saut affecté par le choc aux paramètres de l'état d'un gaz parfait, sont appelées "les équations de Rankines-Hugoniot".

L'évolution correspondante à l'équation reliant les grandeurs d'état amont ( $p_1, \rho_1$ ) aux grandeurs d'état aval ( $p_2, \rho_2$ ) est représentée sur la figure (III.2). Sur cette même figure, la courbe décrivant une compression isentropique entre ces mêmes deux états est portée.

A une même valeur du rapport  $\rho_1/\rho_2$  correspond une variation de pression  $p_2/p_1$ , créée à travers l'onde de choc, plus grande que celle d'une compression isentropique. Ainsi, la traversée de l'onde de choc entraîne un accroissement très rapide de  $p$  et aussi de  $T$ .

### III. 4. Relation de Prandtl

De l'équation d'Euler, on écrit :

$$\rho_2 \cdot u_2^2 - \rho_1 \cdot u_1^2 = p_1 - p_2 \quad \rho_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot u_2 \quad \rightarrow \quad u_2 - u_1 = \frac{p_1}{\rho_1 \cdot u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 \cdot u_2} \quad (1)$$

On introduit la vitesse du son :

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{\gamma} \cdot \left( \frac{\gamma p_1}{\rho_1 \cdot u_1} - \frac{\gamma p_2}{\rho_2 \cdot u_2} \right) = \frac{1}{\gamma} \cdot \left( \frac{a_1^2}{u_1} - \frac{a_2^2}{u_2} \right)$$

La relation de Barré entre les sections  $S_1, S_2$  et  $S$ , s'écrit comme suit:

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{a_c^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_c}{\rho_c} \quad \times (\gamma-1) \quad \rightarrow \quad \frac{\gamma-1}{2} u_1^2 + a_1^2 = \frac{\gamma-1}{2} u_2^2 + a_2^2 = \frac{\gamma+1}{2} a_c^2 \quad (2)$$

En substituant l'éq. (2) dans l'éq. (1) et après des simplifications, on aboutit à :

$$\frac{\gamma+1}{2} u_1 \cdot u_2 = \frac{\gamma-1}{2} u_2^2 + a_2^2 = \frac{\gamma+1}{2} a_c^2$$

D'où

$$\frac{u_1}{a_c} \cdot \frac{u_2}{a_c} = 1$$

$$u_1 \cdot u_2 = a_c^2$$

De ce résultat, on obtient la relation de Prandtl :

### III. 5. Rapport des grandeurs en fonction du nombre de Mach

L'écoulement en amont du choc est supersonique et en aval du choc il est subsonique.

De l'équation de masse et de l'équation (2), on peut en déduire le rapport  $\rho_2/\rho_1$  :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{a_c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1^2}{\frac{2}{\gamma+1} \left( \frac{\gamma-1}{2} u_1^2 + a_1^2 \right)}$$

d'où son expression par rapport à  $M_1$  :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}$$

De la même façon, on trouve l'expression par rapport à  $M_2$  :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}$$

Comme  $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ , on a de même le rapport des vitesses en fonction de  $M_1$  ou  $M_2$  :

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \qquad \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}$$

Les rapports  $\rho_1/\rho_2$ ,  $p_2/p_1$  déjà été reliés par l'équation de Rankine-Hugoniot. Par une substitution on trouve :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \qquad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_2^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

Comme  $(T_2/T_1) = (\rho_1/\rho_2) \cdot (p_2/p_1)$ , on a de même immédiatement :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2} \right)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_2^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_2^2} \right)$$

On écrit  $M_1$  et  $M_2$  en fonction du rapport des pressions  $p_2/p_1$  :

$$M_1^2 = 1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left( \frac{p_2}{p_1} - 1 \right), \qquad M_2^2 = 1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left( \frac{p_1}{p_2} - 1 \right) \qquad \Rightarrow \qquad M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$$

En faisant apparaître  $M_1$  et  $M_2$  dans les Eq. de base, on obtient des expressions plus simples pour les rapports des grandeurs:

**Equation de l'énergie**

$$c_p T_i = c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_1 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}$$

**Equation d'Euler**

$$p_1 + \rho_1 \cdot u_1^2 = p_1 \left( 1 + \frac{\rho_1 \cdot u_1^2}{p_1} \right) = p_1 (1 + \gamma M_1^2) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{p_2}{p_1} = \frac{(1 + \gamma M_1^2)}{(1 + \gamma M_2^2)}$$

**Equation de masse**

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{M_1 \cdot a_1}{M_2 \cdot a_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1 \sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}}{M_2 \sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}}$$

**III. 6. Variation d'entropie à travers une onde de choc**

L'entropie  $s$  augmente à travers la traversée de l'onde de choc. Cet accroissement peut être déterminé à partir de la relation de Gibbs

$$ds = C_p \frac{dT}{T} - r \frac{dp}{p}$$

Cette relation se transforme en utilisant la dérivée logarithmique de l'équation d'état en :

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{ds}{C_v} = \frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

on obtient en intégrant :

$$s_2 - s_1 = C_v \cdot \ln \left[ \frac{p_2}{p_1} \cdot \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right]$$

On connaît déjà les rapports  $p_2/p_1$  et  $\rho_1/\rho_2$  en fonction du nombre de Mach amont  $M_1$ . On obtient alors facilement

$$s_2 - s_1 = C_v \cdot \ln \left[ \left( \frac{1}{\gamma + 1} \right)^{\gamma + 1} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) \cdot \left( \frac{2}{M_1^2} + \gamma - 1 \right)^\gamma \right]$$

**Remarques :**

- La variation d'entropie s'annule pour  $M_1 = 1$ .
- La variation d'entropie est positive pour  $M_1 > 1$ .
- La variation d'entropie est négative pour  $M_1 < 1$ . (ce qui est interdit par le 2<sup>ème</sup> principe de la thermodynamique).

Ainsi, l'onde de choc (incrément d'entropie) ne peut exister que dans un écoulement supersonique. Il est également possible d'établir la relation de la variation d'entropie en fonction des conditions génératrices de part et d'autre du choc à partir de la relation suivante :

$$ds = C_p \frac{dT}{T} - r \frac{dp}{p} \quad \longrightarrow \quad s_2 - s_1 = C_p \cdot \ln \left( \frac{T_i'}{T_i} \right) - r \cdot \ln \left( \frac{p_i'}{p_i} \right)$$

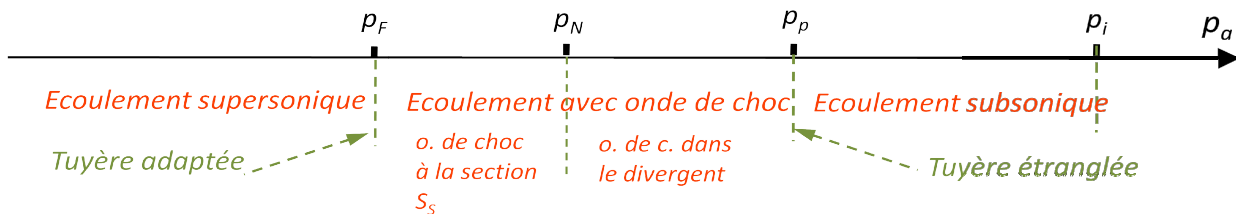
Comme le choc conserve l'enthalpie totale  $h_i = C_p T_i = c^{le}$ , donc  $(T_i = c^{le})$ .

$$s_2 - s_1 = -r \cdot \ln \left( \frac{p_i'}{p_i} \right) > 0 \implies p_i' < p_i$$

La pression d'arrêt  $p_i'$  de l'état aval du choc est inférieure que celle de l'état amont  $p_i$ .

### III. 7. Le choc dans la tuyère de Laval

Considérons une tuyère de Laval alimentée par un gaz aux conditions génératrices (*réservoir*)  $p_i, T_i, \rho_i$ . On a vu au chapitre précédent, qu'en diminuant la pression " $p_a$ " régnant en aval de la tuyère (l'enceinte de décharge) le gaz est accéléré et divers régimes d'écoulement ayant lieu dans la tuyère (Figure III.3).



On se place ici dans le cas de présence d'une onde de choc où  $p_a \in ]p_F, p_p[$ . On sait que le choc droit ne peut avoir lieu que dans le divergent en régime supersonique. L'écoulement au côté aval du choc est nécessairement subsonique et interdit alors la présence d'un second choc.

Si  $p_N \leq p_a < p_p$  l'onde de choc s'établit dans le divergent. L'écoulement en amont du choc est isentropique à partir de l'état générateur où la pression est  $p_i$ .

A l'aval du choc, la pression d'arrêt prend une autre valeur  $p_i' < p_i$  mais la température d'arrêt  $T_i$  reste réservée.

Afin de déterminer cette pression  $p_i'$ , on imagine une tuyère fictive, dont l'écoulement est supersonique au divergent, de section de col fictive  $S_c'$ . Comme le débit est conservé à travers une onde de choc, le débit est le même dans cette tuyère fictive.

Le débit au col est maximal :

$$q_{m, \max} = \underbrace{\rho_c \cdot a_c \cdot S_c}_{\text{tuyère réelle}} = \underbrace{\rho_c' \cdot a_c' \cdot S_c'}_{\text{tuyère fictive}} \quad (*)$$

Comme la température de l'état générateur est la même dans les deux tuyères, on a :

$$T_c = \frac{2}{\gamma + 1} T_v \quad a_c = \sqrt{\gamma r T_c} \implies T_c = T_c' \quad a_c = a_c'$$

Ainsi l'équation (\*) donne :

$$\frac{p_c}{rT_c} \cdot S_c = \frac{p_c'}{rT_c'} \cdot S_c' \Rightarrow \frac{p_c'}{p_c} = \frac{S_c}{S_c'} \quad \frac{p_i}{p_c} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{p_i'}{p_c'} \Rightarrow \frac{p_c'}{p_c} = \frac{p_i'}{p_i}$$

Par conséquent, le rapport des pressions totales de part et d'autre du choc est égal au rapport entre la section du col  $S_c$  (réelle) correspondante à  $M_1$  avant le choc, et la section du col  $S_c'$  (fictive) correspondante à  $M_2$  après le choc :

$$\frac{S_c}{S_c'} = \frac{p_i'}{p_i}$$

Il est utile d'obtenir l'expression de ce rapport  $p_i'/p_i$  en fonction du nombre de Mach amont  $M_1$ . Pour se faire, on écrit

$$\frac{p_i'}{p_i} = \frac{p_i'}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_i} \quad \longrightarrow \quad \frac{p_i'}{p_i} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)$$

On connaît déjà l'expression de  $M_1$  en fonction de  $M_2$ . On obtient alors facilement :

$$\frac{p_i'}{p_i} = \left(\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$