Chapitre II : Calcul des propositions

II-1 : Syntaxe-suite

3 Principe d'induction structurelle

Le principe d'induction structurelle est une généralisation du principe de récurrence sur $\mathbb{N}$. Il permet de démontrer qu'une propriété Q est vraie pour toutes les formules, à travers :
- La vérification pour les formules atomiques ;
- Hérédité par les connecteurs logiques.

Soit Q une propriété concernant les éléments de $\mathcal{F}$. Alors, $Q(F)$ est vraie, pour tout $F \in \mathcal{F}$ SSI

(i) $Q(F)$ vraie, $\forall F \in \mathcal{P}$
(ii) $Q(F)$ vraie $\Rightarrow Q(\neg F)$ vraie
(iii) $Q(F)$ vraie et $Q(G)$ vraie) $\Rightarrow Q(F\ b\ G)$ vraie

Exemples. (détails en cours)
Exemple 1.
$Q(F) =$ "$l(F) \leq 5$".
le (i) est vérifié, par contre (ii) non (un contre exemple). Donc Q n'est pas vraie pour toutes les formules.

Exemple 2.
$Q(F) =$ "nombre de parenthèses ouvrantes de $F =$ nombre de parenthèses fermantes de F"
(i), (ii) et (iii) sont vérifiées. Donc, d'après le principe d'induction structurelle $Q(F)$ est pas vraie pour tout $F \in \mathcal{F}$.

Exemple 3. $Q(F) =$ "$h(F) < l(F)$", telle que $h(F)$ est la hauteur de F.

4 Hauteur des formules

Définissons, par récurrence, la suite d'ensembles $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_0 = \mathcal{P} \\ \mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{\neg F;\ \ F \in \mathcal{F}_n\} \cup \{(FbG);\ \ F, G \in \mathcal{F}_n\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarque. On peut montrer que $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, i.e., $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition 4.1. *(Preuve pendant le cours)*

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$$

Définition 4.1. *La hauteur d'une formule F, noté $h(F)$, est*

$$h(F) = \min\{n\ ,\ \ F \in \mathcal{F}_n\}.$$

Exemples : (explication pendant le cours)

h(p)=0 car $p \in \mathcal{F}_0$

h(¬ p)=1 car $\neg p \in \mathcal{F}_1$ et $\neg p \notin \mathcal{F}_0$

h($(p \Leftrightarrow s)$)=1 car $h(p) = 0$ et $h(s) = 0$.

h($(p\Rightarrow$ (s$\vee t$)))=2 car $h(p) = 0$ et $h((s \vee t)) = 1$ et $\max(0, 1) + 1 = 2$.

Remarques.

- Toute formule propositionnelle possède une hauteur finie.

- On peut définir la hauteur d'une formule récursivement par :

• Si $F \in \mathcal{P}$, alors $h(F) = 0$;
• $h(\neg F) = 1 + h(F)$;
• $h(\ (F\ b\ G)\ ) = 1 + \max(h(F), h(G))$.
où $b \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.