

الفصل الأول: المعادلات التفاضلية

تعد المعادلات التفاضلية أداة رياضية أساسية لنمذجة المتغيرات الاقتصادية عبر الزمن (مثل النمو، الاستهلاك، رأس المال). نهتم بدراسة المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى (ذات المتغيرات القابلة للفصل و الخطية) و أيضا من الرتبة الثانية.

1- المفاهيم الأساسية للمعادلات التفاضلية

تعريف 1: نسمي معادلة تفاضلية كل علاقة بين المتغير x (غالبا الزمن t في الإقتصاد) ، التابع $y = f(x)$ و مشتقاته $y', y'', \dots, y^{(n)}$ و نكتب $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ أو

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

تعريف 2: نسمي رتبة المعادلة التفاضلية الرتبة الأعلى للمشتقة الموجودة في المعادلة.

مثال : المعادلة التفاضلية $y' + 2y = 0$ رتبته 1.

المعادلة التفاضلية $y'' - 3y' + 4y = 0$ رتبته 2.

تعريف 3: نسمي حل المعادلة التفاضلية كل دالة φ قابلة للاشتقاق n مرة و تحقق المعادلة أي $F(x, \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n)}) = 0$

ملاحظة: الحل العام للمعادلة التفاضلية هو حل المعادلة الذي يحتوي على ثوابت كيفية.

الحل الخاص هو الحل الذي يحقق شروط ابتدائية أي يوافق قيم محددة لثوابت.

مثال: لتكن $y' + \frac{y}{x} = 0$ معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.

$y = \frac{cte}{x}$ هو الحل العام للمعادلة .

$y = \frac{2}{x}$ هو الحل الخاص للمعادلة.

2- المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرات منفصلة

المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرات منفصلة هي من الشكل

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

نحصل على حلها العام مباشرة بالتكامل أي $\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$

مثال: حل المعادلة $2xdx + 2ydy = 0$

بالمكاملة نجد $\int 2xdx + \int 2ydy = 0$ يعني $x^2 + y^2 = c$ وهي تمثل مجموعة دوائر مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r = \sqrt{c}$.

3- المعادلة التفاضلية القابلة للفصل

المعادلة التفاضلية القابلة للفصل من الشكل $M_1(x)N_2(y) + M_2(x)N_1(y) = 0$.

إذا كان $M_2(x)N_1(y) \neq 0$ فإنه يمكن تحويلها إلى معادلة ذات متغيرات منفصلة و ذلك بقسمة طرفي

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0 \text{ فنجد:}$$

$$\text{مثال: حل المعادلة } (1+x)xdy + (2-y)xdy = 0$$

نقوم بفصل المتغيرات، بقسمة المعادلة على xy نجد: $\frac{1+x}{x} dx + \frac{2-y}{y} dy = 0$ بالمكاملة نحصل على

$$\ln|x| + x + 2 \ln|y| - y = c \text{ وهو الحل العام للمعادلة.}$$

4 - المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

كل معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى تكتب على الشكل $y' + P(x)y = Q(x)$ حيث P و Q دلتان مستمرتان أو ثابتان.

إذا كان $Q(x) = 0$ عندئذ تسمى المعادلة بدون طرف ثاني أو متجانسة.

طريقة الحل

أولاً: نقوم بحل المعادلة المتجانسة بوضع $y' = \frac{dy}{dx}$ فنجد $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ بفصل المتغيرات و

$$\text{المكاملة نجد } \ln|y| = - \int P(x)dx + c \text{ يعني } y = ke^{-\int P(x)dx} \text{ حيث } k = \pm e^c.$$

ثانياً: نقوم بتحريك الثابت k أي بوضع $k = k(x)$ في عبارة y ثم نشتق عبارة y ونعوض في المعادلة بطرف ثاني لنحصل على عبارة $k(x)$ و عندئذ حل المعادلة.

$$\text{مثال: حل المعادلة } y' - \frac{y}{x} = x$$

$$\text{أولاً: نحل المعادلة المتجانسة } y' - \frac{y}{x} = 0$$

نضع $y' = \frac{dy}{dx}$ فنجد $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ أي $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ و بمكاملة الطرفين : $\ln y = \ln x + c$ يكافئ $y = \pm e^c x$ و منه $y = xk$ مع $k = \pm e^c$.

ثانياً: نقوم بتحريك الثابت أي نضع $y = k(x)x$ و بالتالي $y' = k'(x)x + k(x)$ بالتعويض في المعادلة بالطرف الثاني نجد $k'(x) = 1$ أي $k(x) = x + c$ حيث c ثابت حقيقي و منه حل المعادلة هو $y = x^2 + cx$.

5- المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة

كل معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة تكتب من الشكل

$$ay'' + by' + cy = Q(x)$$

حيث a, b, c ثوابت حقيقية و $a \neq 0$ ، Q دالة مستمرة على مجال I أو ثابتة .

إذا كان $Q(x) = 0$ ، نسمي المعادلة $ay'' + by' + cy = 0$ معادلة متجانسة أو بدون طرف ثاني.

طريقة الحل: نعتمد على النظرية التالية

نظرية: الحل العام y للمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة هو عبارة عن مجموع حل خاص y_p لهذه المعادلة و الحل العام y_h للمعادلة المتجانسة أي $y = y_h + y_p$.

كيفية إيجاد الحل العام y_h

لحل المعادلة المتجانسة $ay'' + by' + cy = 0$ نعتمد على النظرية التالية:

نظرية: إذا كان y_1 و y_2 حلين خاصين للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة و هما مستقلين خطيا فإن حلها العام يكون من الشكل $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ حيث c_1 و c_2 ثوابت حقيقية.

لنبحث عن الحلين الخاصين y_1 و y_2 من الشكل $y = e^{rx}$ حيث r ثابت حقيقي و بالاشتقاق والتعويض في المعادلة نتحصل على المعادلة المميزة المرافقة لها وهي $ar^2 + br + c = 0$.

نقوم بحساب $\Delta = b^2 - 4ac$ ، فنميز ثلاث حالات :

(1) إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة المميزة تقبل حلين متمايزين هما $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و منه الحل العام : $y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ حيث c_1 و c_2 ثابتين حقيقيين.

(2) إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة المميزة تقبل حلا مضاعفا $r = \frac{-b}{2a}$ و منه الحل العام: $y_h = (c_1 x + c_2) e^{rx}$ حيث c_1 و c_2 ثابتين حقيقيين.

(3) إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة المميزة لا تقبل حولا في $\mathbb{R}$.

كيفية إيجاد الحل الخاص y_p

يكون شكل الحل الخاص y_p من نفس شكل الطرف الثاني للمعادلة ثم نشق و نعوض في المعادلة و نحل المعادلة المتحصل عليها.

لندرس بعض حالات الطرف الثاني:

* إذا كان $Q(x) = p_n(x)$ حيث $p_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n ، نميز ثلاث حالات:

(أ) العدد 0 ليس جذرا للمعادلة المميزة و بالتالي نضع $y_p = q_n(x)$ حيث $q_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n .

(ب) العدد 0 جذرا بسيطا للمعادلة المميزة وبالتالي نضع $y_p = xq_n(x)$ حيث $q_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n .

(ج) العدد 0 جذرا مضاعفا للمعادلة المميزة وبالتالي نضع $y_p = x^2q_n(x)$ حيث $q_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n .

*إذا كان $Q(x) = Ae^{kx}$ حيث A ثابت حقيقي، نميز ثلاث حالات:

(أ) k ليس جذرا للمعادلة المميزة وبالتالي نضع $y_p = Be^{kx}$ حيث B ثابت حقيقي.

(ب) k جذرا بسيطا للمعادلة المميزة وبالتالي نضع $y_p = xBe^{kx}$ حيث B ثابت حقيقي.

(ج) k جذرا مضاعفا للمعادلة المميزة وبالتالي نضع $y_p = x^2Be^{kx}$ حيث B ثابت حقيقي.

*إذا كان $Q(x) = p_n(x)e^{kx}$ حيث $p_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n نميز ثلاث حالات:

(أ) k ليس جذرا للمعادلة المميزة وبالتالي نضع $y_p = q_n(x)e^{kx}$ حيث $q_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n .

(ب) k جذرا بسيطا للمعادلة المميزة وبالتالي نضع $y_p = xq_n(x)e^{kx}$ حيث $q_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n .

(ج) k جذرا مضاعفا للمعادلة المميزة وبالتالي نضع $y_p = x^2q_n(x)e^{kx}$ حيث $q_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n .

مثال: حل المعادلات التفاضلية التالية

$$(1) y'' = 2x \quad (2) y'' + 4y' + 4y = 4 \quad (3) y'' - 3y' + 2y = 2x + 3$$

$$(4) y'' + y' + y = x + e^x$$

الحل

حل المعادلة 1 يكتب $y = y_h + y_p$ ، المعادلة المميزة المرافقة لها: $r^2 = 0$ تقبل حل مضاعف $r = 0$ و منه $y_h = (c_1x + c_2)e^{0x} = c_1x + c_2$.

نضع $y_p = ax^3 + bx^2$ و منه $y_p' = 3ax^2 + 2bx$ ، $y_p'' = 6ax + 2b$ ، نعوض في المعادلة 1 فنجد $6ax + 2b = 2x$ و بالمطابقة نجد $a = \frac{1}{3}$ ، $b = 0$ إذن $y_p = \frac{1}{3}x^3$ و منه الحل العام للمعادلة هو $y = c_1x + c_2 + \frac{1}{3}x^3$.

(2) المعادلة المميزة المرافقة لها $r^2 + 4r + 4 = 0$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا $r = -2$ و منه الحل $y_h = (c_1x + c_2)e^{-2x}$.

الحل الخاص $y_p = B$ بالاشتقاق والتعويض في المعادلة 2 نجد $B = 1$ ومنه $y_p = 1$.

إذن الحل العام للمعادلة هو $y = (c_1x + c_2)e^{2x} + 1$.

(3) المعادلة المميزة المرافقة لها: $r^2 - 3r + 2$ ، تقبل حلان: $r_1 = 1$ ، $r_2 = 2$ ومنه

$y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}$. ليكن $y_p = xa + b$ ، بالاشتقاق و التعويض في المعادلة نجد

$2ax - 3a + 2b = 2x + 3$ و بالمطابقة نجد $a = 1$ ، $b = 3$ إذن الحل العام للمعادلة $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + x + 3$ حيث c_1 و c_2 ثابتين حقيقيين.

(4) المعادلة المميزة المرافقة لها : $r^2 + r + 1 = 0$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$.

من إعداد الأستاذة: زروقي