

## 1. Introduction

Dans ce chapitre, on va appliquer les équations fondamentales de la dynamique ; équations de continuité et de quantité de mouvement, au cas des fluides et parfaits incompressibles.

## 2. Equation d'Euler et équation de Bernoulli

Partons de l'équation vectorielle de Navier Stocks régissant l'écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible :

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{terme instationnaire}} + \underbrace{(\rho \vec{v} \text{grad}) \vec{v}}_{\text{terme inertiel}} = \underbrace{-\text{grad} p}_{\text{force de pression}} + \underbrace{\mu \Delta \vec{v}}_{\text{force de viscosité}} + \underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{force de volume}}$$

Du fait que l'écoulement est permanent et le fluide est parfait, les termes instationnaire et de viscosité sont nuls.

Si la direction z est orientée verticalement vers le haut, alors on peut écrire

$$\vec{g} = -g\vec{k} \Rightarrow \rho \vec{g} = -\vec{\nabla}(\rho g z)$$

D'autre part, en utilisant la relation vectorielle suivante

$$(\vec{v} \text{grad}) \vec{v} = (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$$

Par conséquent

$$\rho (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = -\vec{\nabla} p - \vec{\nabla}(\rho g z)$$

Ce qui donne l'équation d'Euler

$$\frac{\rho}{2} \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v}) + \vec{\nabla} p + \vec{\nabla}(\rho g z) = \vec{v} \wedge \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge \vec{v})}_{2\vec{\Omega}}$$

### Cas d'un écoulement irrotationnel

Si l'écoulement est irrotationnel le vecteur tourbillon  $\vec{\Omega}$  est nul et l'équation d'Euler prend la forme suivante

$$\vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z \right) = \vec{0}$$

d'où on tire l'équation de Bernoulli

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z = 0$$

qui est valable en tout point de l'écoulement irrotationnel.

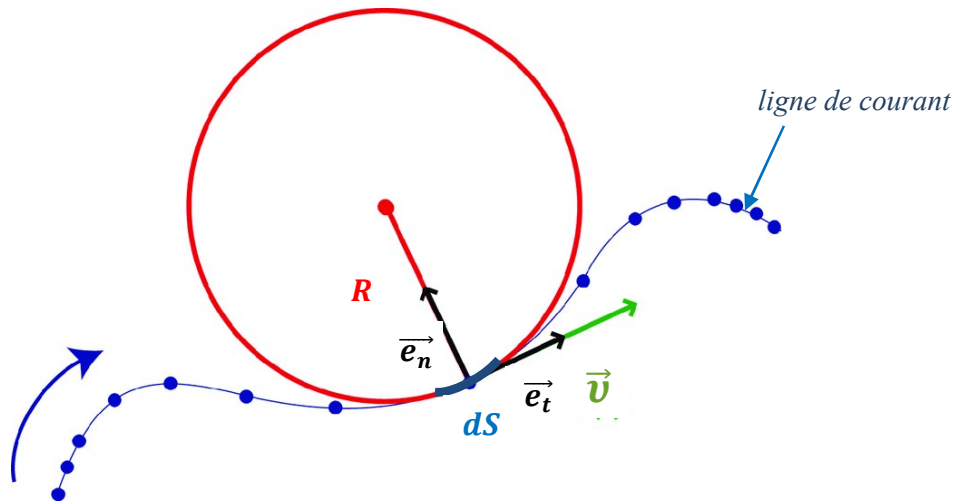
### Cas d'un écoulement rotationnel

Reprenons l'équation d'Euler sous la forme suivante

$$\rho(\vec{v} \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}(\rho g z)$$

Le long de la ligne de courant, dans le repère de Frenet, le vecteur de vitesse s'exprime

$$\vec{v} = v\vec{e}_t$$



**Figure 1 :** Vecteur de vitesse dans la base de Frenet et la partie inertielle s'écrit comme suit

$$\rho(\vec{v} \vec{\nabla})\vec{v} = \rho \left[ v\vec{e}_t \cdot \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial s}\vec{e}_t + \frac{\partial}{\partial n}\vec{e}_n \right)}_{\vec{\nabla}} \right] v\vec{e}_t = \rho v \frac{\partial}{\partial s} (v\vec{e}_t)$$

ce qui résulte en

$$\rho v \frac{\partial}{\partial s} (v\vec{e}_t) = \rho v \frac{\partial v}{\partial s} \vec{e}_t + \rho v^2 \frac{\partial \vec{e}_t}{\frac{\partial s}{R \frac{\partial \theta}{\partial s}}} = \rho v \frac{\partial v}{\partial s} \vec{e}_t + \rho \frac{v^2}{R} \vec{e}_n$$

où  $S$  est l'abscisse curviligne et  $R$  est son rayon de courbure.

Après substitution du terme inertiel dans l'équation d'Euler et projection suivant les directions tangentielle et normale, on obtient

$$\begin{cases} \rho v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p^*}{\partial s} \\ \rho \frac{v^2}{R} = -\frac{\partial p^*}{\partial n} \end{cases}$$

où  $p^*$  représente la pression motrice.

La projection tangentielle, c'est-à-dire le long d'une même ligne de courant, se réécrit comme suit

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z = 0$$

Tandis que la projection normale à la ligne de courant  $\rho \frac{v^2}{R}$  représente la force centrifuge générée de la courbure de l'écoulement.

### 3. Bilan de quantité de mouvement théorème d'Euler

Le bilan de quantité de mouvement  $\iiint \rho \vec{v} \cdot dV$  d'un système permet de calculer des forces ou des puissances mécaniques. En considérant un volume de contrôle imaginaire fixe délimité par une frontière  $\partial\Omega$ , le bilan s'écrit de la manière suivante

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho \vec{v} \cdot dV = m\vec{g} + \oint_{\partial\Omega} \sigma \vec{n} ds + \vec{F}_{ext} - \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds$$

Lorsque la frontière imaginaire fixe  $\partial\Omega$  du système peut être considérée comme l'union de la frontière  $\partial\Omega_s$  entre le fluide interne et les parois solides et de la frontière  $\partial\Omega_f$  entre le fluide interne et le fluide externe, on obtient

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho \vec{v} \cdot dV = m\vec{g} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega_s} \sigma \vec{n} ds}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega_f} \sigma \vec{n} ds}_{\textcircled{2}} + \vec{F}_{ext} - \underbrace{\oint_{\partial\Omega_s} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds}_{\textcircled{3}} - \underbrace{\oint_{\partial\Omega_f} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds}_{\textcircled{4}}$$

**Terme ①** : la force  $\vec{F}_{s/f}$  que les parois solides exercent sur le fluide contenu dans le système (la grandeur que l'on cherche à calculer).

**Terme ②** : comme  $\sigma = \tau - pI$  et la contrainte de cisaillement  $\tau$  est souvent négligeable par rapport à la pression ; ce terme se simplifie en une force de pression  $p\vec{dS}$ .

**Terme ③** : ce terme est nul car les parois sont imperméables c.à.d. la vitesse du fluide à leur contact est nulle.

Ainsi l'expression du bilan de quantité de mouvement est

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho \vec{v} \cdot dV = m\vec{g} + \vec{F}_{s/f} + \vec{F}_{ext} - \oint_{\partial\Omega_f} p \vec{n} ds - \oint_{\partial\Omega_f} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds$$

#### Théorème d'Euler

Dans le cas du régime stationnaire ( $\frac{d}{dt} \iiint \rho \vec{v} \cdot dV = 0$ ), la résultante  $\vec{F}_{tot/f}$  des forces qui s'appliquent sur le fluide (gravité + parois solides + pression du fluide + force extérieure) est égale et opposée au débit de quantité de mouvement entrant dans le système. Il s'ensuit que l'équation précédente se simplifie et prend la forme suivante, appelée théorème d'Euler :

$$\oint_{\partial\Omega_f} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = m\vec{g} + \vec{F}_{s/f} + \vec{F}_{ext} - \oint_{\partial\Omega_f} p \vec{n} ds$$

## 4. Applications de l'équation de Bernoulli

### a. Tube de Venturi

La mesure du débit volumique d'un fluide s'écoulant dans une conduite peut être effectuée au moyen d'une tuyère ou tube de Venturi. Ce tube de diamètre intérieur  $D$  est constitué d'un convergent relié à un divergent par l'intermédiaire d'un col de diamètre  $d$ .

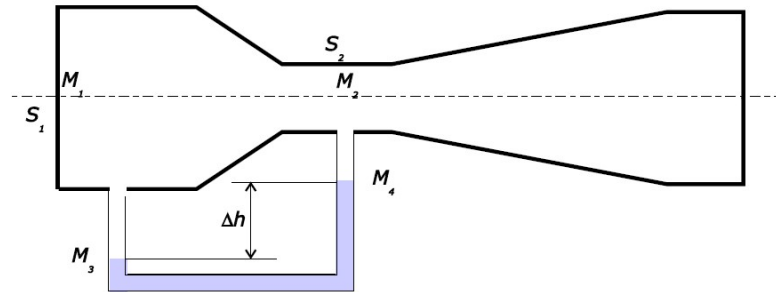


Figure 2 : Tube de Venturi

Deux prises de pression statique  $p_3$ ,  $p_4$  à l'entrée du convergent et au col, sont reliées par un tube en U contenant un liquide manométrique de masse volumique  $\rho_m$ . Pour un débit volumique  $q_v$  du fluide en écoulement de masse volumique  $\rho_0$ , on relève une dénivellation  $\Delta h$  dans le tube en U. Après avoir utilisé le théorème de Bernoulli et la loi de l'hydrostatique on aboutit à

$$q_v = f(\Delta h) \dots \dots \dots (devoir)$$

### b. Tube de Pitot

Le tube de Pitot est un instrument de mesure de vitesse locale d'un gaz ou d'un liquide. Il est constitué de deux tubes coudés concentriques dont les orifices, en communication avec le fluide dont on veut mesurer la vitesse, sont disposés comme suit

- Le tube extérieur s'ouvre perpendiculairement  $A$  à l'écoulement du fluide. La pression dans ce tube est par conséquent égale à la pression ambiante ou pression statique ;
- Le tube intérieur est parallèle à l'écoulement du fluide, et est ouvert en son bout  $B$ , face au flux. La pression dans ce dernier est par conséquent la pression totale, somme de la pression statique et de la pression dynamique.

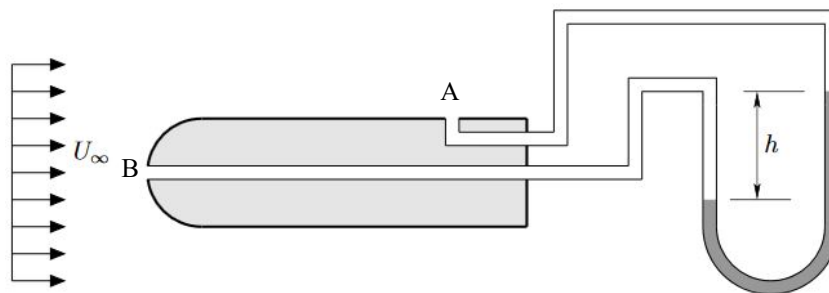


Figure 3 : Tube de Pitot

Le calcul de vitesse du fluide s'effectue par application du théorème de Bernoulli. Dans le cas de l'air il est possible de négliger la partie potentielle " $\rho g z$ " et avoir ainsi une relation directe entre la vitesse  $U_\infty$  et la pression dynamique  $p_t - p_s$  qu'on mesure avec le manomètre.

$$\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 + p_s = p_t \Rightarrow U_\infty = \sqrt{\frac{2(p_B - p_A)}{\rho}}$$

### c. Théorème de Torricelli

On considère un récipient de rayon  $R(h)$  et de hauteur  $h_0$  percé d'un orifice de rayon  $r$  contenant un liquide non visqueux de masse volumique  $\rho$ . L'orifice  $B$  est d'abord bouché pour remplir le récipient jusqu'à la hauteur  $h_0$ . A  $t=0$  on libère l'orifice et le vidage commence.

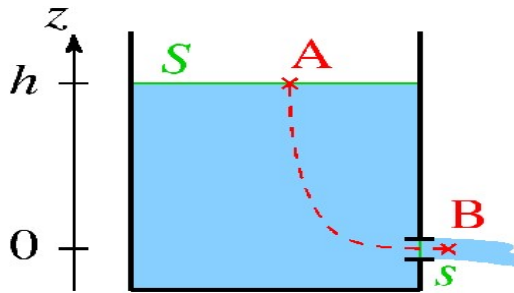


Figure 4 : Schéma du vidage d'un réservoir

#### 1<sup>er</sup> cas :

Si  $r$  est beaucoup plus petit que  $R(h)$ , on constate du principe de conservation du débit massique que la vitesse du fluide  $v$  en  $A$  est négligeable devant  $V$  vitesse du fluide en  $B$ .

Le théorème de Bernoulli permet d'écrire que

$$A: t = 0 \quad P_A - P_B + \rho g h_0 = \frac{1}{2} \rho V^2, \quad v^2 \ll V^2$$

Comme  $P_A = P_B = P_{atm}$ , on obtient

$$V = \sqrt{2gh_0}$$

#### 2<sup>ème</sup> cas :

Si  $r$  n'est pas beaucoup plus petit que  $R(h)$ , la vitesse du fluide en  $A$  n'est plus négligeable. L'écoulement étant incompressible et homogène, le débit volumique se conserve entre la section du réservoir  $S_A(h) = S(h)$  et la section de l'orifice  $S_B = s$  du tube, d'où :

$$S \cdot v = s \cdot V$$

En appliquant le théorème de Bernoulli, à un instant  $t$ , entre les point  $A$  et  $B$  on tire que :

$$\rho g h(t) = \frac{1}{2} \rho (V^2 - v^2) \Rightarrow V = S(h) \sqrt{\frac{2gh(t)}{S(h)^2 - s^2}}$$

La vitesse d'écoulement du liquide varie avec  $h(t)$ .

#### Temps de vidage

La vitesse de la surface libre repérée par  $h(t)$  est donnée par

$$v(t) = -\frac{dh(t)}{dt} = s \sqrt{\frac{2gz}{S(h)^2 - s^2}}$$

Dans le cas d'un réservoir de forme **cylindrique**  $S = cte$ , la hauteur  $h(t)$  de la surface libre est

$$h(t) = \left( \sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2S}} t \right)^2$$

d'où la durée de vidage est

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \sqrt{h_0}$$