

## 1. Introduction

Le fluide parfait étudié au chapitre précédent ne reflète pas convenablement le concret. En réalité, les fluides ont tous une viscosité qu'on doit prendre en compte surtout près des parois de solides où elle engendre des contraintes de cisaillement.

Dans ce chapitre, on va reprendre les équations de Navier-Stocks établies, du bilan local du débit de quantité de mouvement, en fluide réel incompressible pour les utiliser dans l'étude de quatre écoulements particuliers au régime stationnaire. Dans ces exemples, on cherche des solutions analytiques dites laminares, c'est-à-dire en imposant à priori les lignes de courant parallèles (écoulement parallèle) aux parois.

## 2. Écoulements laminares ou parallèles

Les écoulements turbulents se repèrent particulièrement au voisinage des obstacles. Quand l'écoulement d'un fluide est le siège de multiples tourbillons, on dit que cet écoulement est *turbulent*. Au contraire si l'écoulement semble se faire de manière bien parallèle, on parle d'écoulement *laminaire*.

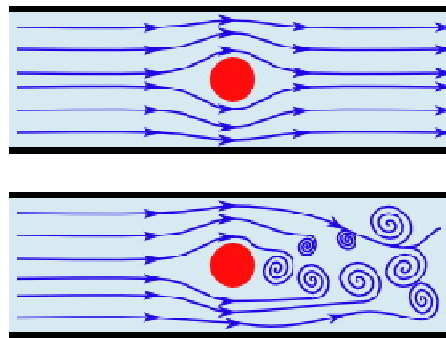


Figure 1 : Les régimes laminaire et turbulent des écoulements

L'écoulement laminaire d'un fluide se qualifie par un glissement de ses diverses couches (parallèles) les unes sur les autres sans échange de particules entre les différentes couches. Les écoulements parallèles sont ainsi unidirectionnels et leur étude peut être réalisée dans un plan au lieu d'un espace tridimensionnel, ce qui simplifie la résolution des équations de Navier-Stocks et mène à des solutions analytiques exactes. Cette possibilité sera illustrée sur quelques cas simples des écoulements parallèles de fluide incompressible.

## 3. Écoulement entre deux plaques parallèles

C'est un écoulement stationnaire et parallèle d'un fluide visqueux et incompressible entre deux plaques infinies parallèles, distant de  $2h$  et symétrique par rapport à  $(Ox)$ , en mouvement relatif uniforme (plaque supérieure mobile d'une vitesse constante  $U_0$  et l'inférieure est fixe) dans leur plan.

### *Hypothèses simplificatrices*

- Écoulement stationnaire :  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Fluide incompressible :  $\rho = c^{te}$

- Ecoulement parallèle suivant (Ox) :  $\vec{V} \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases}$

En fonction de ces hypothèses caractérisant l'écoulement le système d'équations de Navier-Stokes se réduit à

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial p^*}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

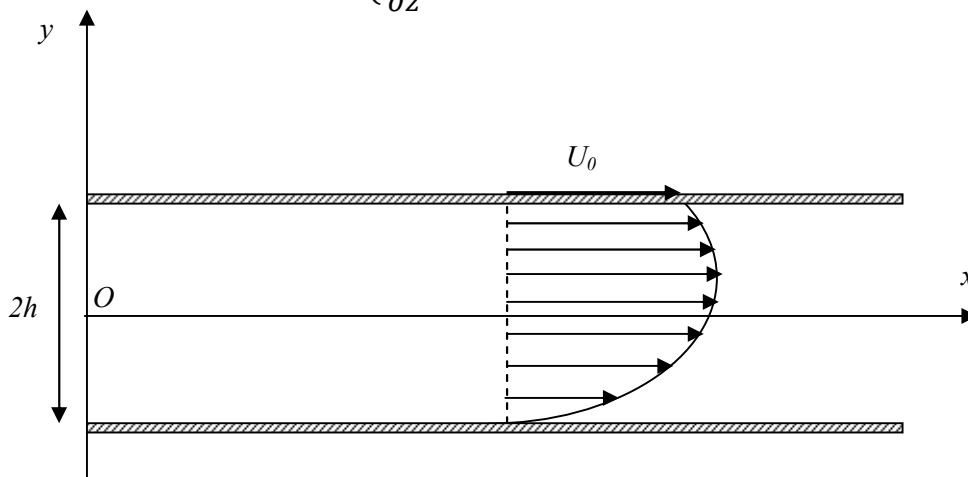


Figure 2 : Ecoulement entre deux plaques parallèles

Après une double intégration et à l'aide des conditions cinématiques d'adhérence, le profil de vitesse est

$$u(y) = \underbrace{-\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (h^2 - y^2)}_{\substack{\text{partie parabolique} \\ \text{écoulement de Poiseuille}}} + \underbrace{\frac{U_0}{2h} (y + h)}_{\substack{\text{partie linéaire} \\ \text{écoulement de Couette}}}$$

La forme adimensionnelle de ce profil de vitesse est

$$\frac{u(y)}{U_0} = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{U_0} \left( \frac{y^2}{h^2} - 1 \right)}_{\gamma} + \frac{1}{2} \left( \frac{y}{h} + 1 \right)$$

Le paramètre  $\gamma$  traduit l'influence relative de la pression et la viscosité à la paroi mobile.

- ▶  $\gamma = 0 \Leftrightarrow \frac{dp}{dx} = 0$  : Le profil de vitesse est linéaire « écoulement de Couette ».
- ▶  $\gamma < 0 \Leftrightarrow \frac{dp}{dx} < 0$  : les forces motrices, c.à.d. force de pression et la force de viscosité à la paroi mobile, agissent dans le même sens.
- ▶  $\gamma > 0 \Leftrightarrow \frac{dp}{dx} > 0$  : la force de pression et la force de viscosité ont deux sens opposés, la viscosité agit dans le sens positif tandis que la pression s'oppose.

### 3. 1. Contrainte visqueuse

A partir de l'expression du profil de vitesse il est possible d'en déduire l'expression des contraintes visqueuses dans le fluide

$$\tau_{xy}(y) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xy}(y) = \frac{\partial p}{\partial x} y + \mu \frac{U_0}{2h}$$

et particulièrement à la paroi notée 'contrainte pariétale'

$$\tau_{xy}|_{y=h} = \tau_{ps} = \frac{\partial p}{\partial x} h + \mu \frac{U_0}{2h}$$

$$\tau_{xy}|_{y=-h} = \tau_{pi} = -\frac{\partial p}{\partial x} h + \mu \frac{U_0}{2h}$$

### 3. 2. Vitesse moyenne

Une autre caractéristique importante est la vitesse moyenne du fluide. Vitesse moyenne traduite par la notion de débit par unité de largeur

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{q_v}{\underbrace{2h \times 1m}_s} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u(y) dy \\ &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \left( -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (h^2 - y^2) + \frac{U_0}{2h} (y + h) \right) dy \end{aligned}$$

$$\bar{u} = -\frac{h^2}{3\mu} \frac{dp}{dx} + \frac{U_0}{2}$$

## 4. Ecoulement de Poiseuille cylindrique

C'est l'écoulement stationnaire et parallèle d'un fluide visqueux et incompressible dans une conduite cylindrique, de longueur  $L$  et de rayon  $R$ , posée à l'horizontale.

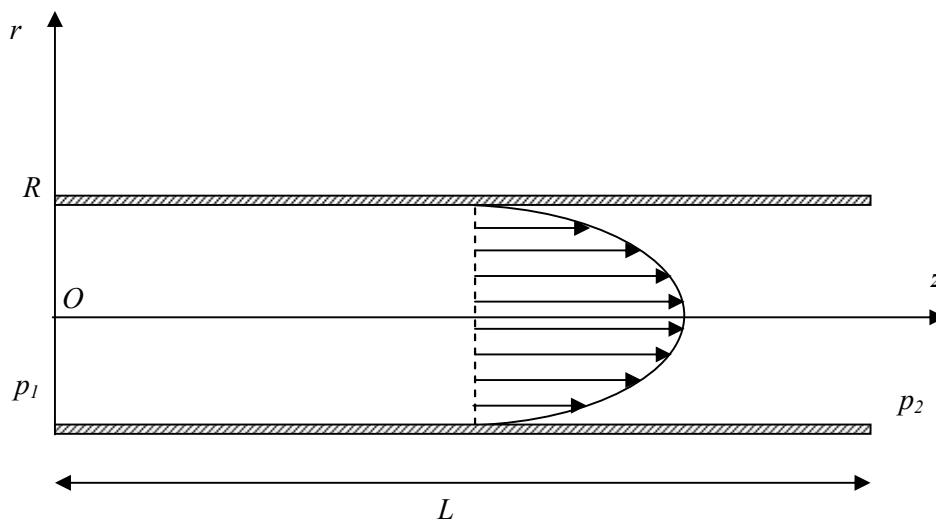


Figure 3 : Ecoulement dans un tube

**Hypothèses simplificatrices**

- Ecoulement stationnaire :  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Fluide incompressible :  $\rho = c^{te}$
- Ecoulement parallèle suivant  $(Oz)$  :  $\vec{V} \begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = 0 \\ v_z(r, \theta, z) \end{cases}$
- Symétrie de révolution ou 'symétrie rotationnelle cylindrique' :  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

Dans ces conditions l'équation de continuité se réduit et donne  $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ , ce qui traduit que le profil de vitesse ne varie pas d'une section droite à une autre. De ce fait, la composante non nulle de vitesse  $v_z(r)$  est fonction d'une seule variable qui est la coordonnée radiale.

Par conséquent, l'équation de quantité de mouvement en projection sur les trois axes se réduit en

$$\begin{cases} \frac{\partial p^*}{\partial r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} = 0 \\ -\frac{\partial p^*}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0 \end{cases}$$

A ce stade, il est possible d'en déduire la solution par simple intégration et à l'aide des conditions cinématiques d'adhérence, le profil de vitesse est

$$v_z(r) = \underbrace{-\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2)}_{\text{profil parabolique}} = \underbrace{-\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dz}}_{v_{max}} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

**5. Ecoulement dans un espace annulaire**

Considérons l'écoulement stationnaire et parallèle d'un fluide visqueux et incompressible entre deux cylindriques coaxiaux, de rayon interne  $R_1$  et externe  $R_2$ , posée à l'horizontale.

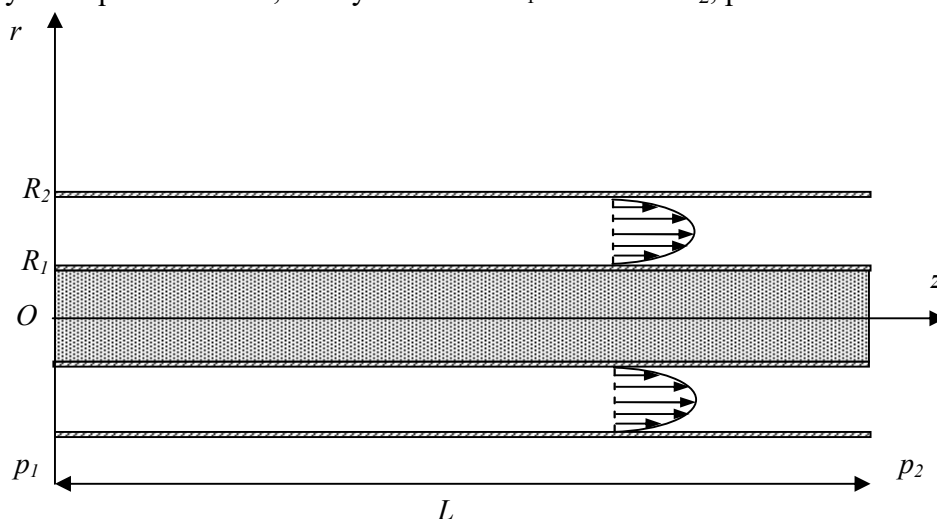


Figure 4 : Ecoulement entre deux cylindres

**Hypothèses simplificatrices**

- Ecoulement stationnaire :  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Fluide incompressible :  $\rho = c^{te}$
- Ecoulement unidirectionnel (parallèle) suivant (Oz) :  $\vec{V} \begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = 0 \\ v_z(r, \theta, z) \end{cases}$
- Symétrie de révolution ou 'symétrie rotationnelle cylindrique' :  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

A partir de l'équation de continuité et de l'équation de quantité de mouvement et à l'aide des hypothèses précédentes, on aboutit à la solution générale suivante

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

En d'utilisant des conditions cinématiques d'adhérence au niveau des parois des cylindres interne et externe, on détermine les constantes et le profil de vitesse est

$$v_z(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} \left[ (R_2^2 - r^2) + (R_2^2 - R_1^2) \frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_2/R_1)} \right]$$

**6. Ecoulement de Couette cylindrique**

Considérons l'écoulement stationnaire et parallèle d'un fluide visqueux et incompressible entre deux cylindriques coaxiaux, de rayon interne  $R_1$  et externe  $R_2$ , induit par leur rotations uniformes  $\omega_1 = c^{te}$ ,  $\omega_2 = c^{te}$ .

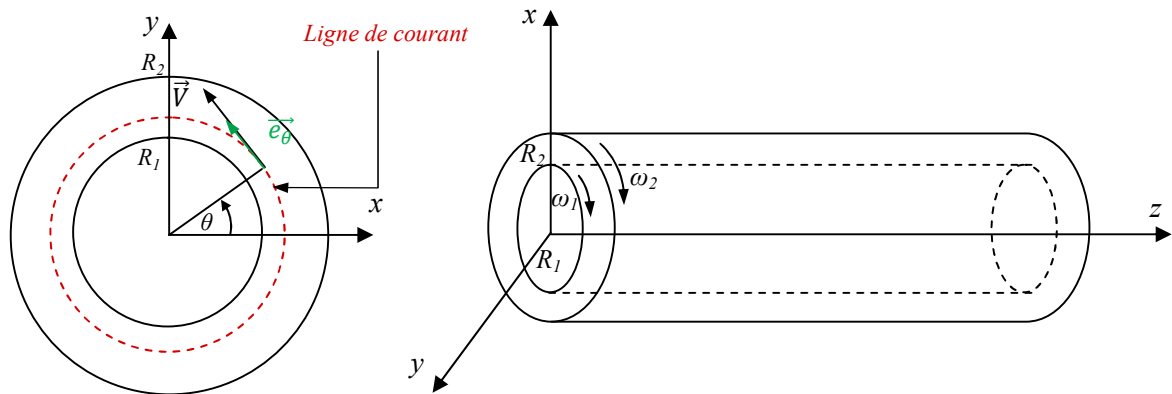


Figure 5 : Ecoulement de couette cylindrique

**Hypothèses simplificatrices**

- Ecoulement stationnaire :  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Fluide incompressible :  $\rho = c^{te}$
- Symétrie de révolution :  $\omega_1 = c^{te}, \omega_2 = c^{te} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

- Ecoulement parallèle : lignes de courant  $\leftrightarrow$  cercles concentriques  $\vec{V} \begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta \\ v_z = 0 \end{cases}$

Cette dernière hypothèse peut être certifiée de l'équation de continuité qui se réduit à

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}}_{=0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) = 0$$

$$\Rightarrow r \cdot v_r(r) = c^{te}$$

Au contact des parois des cylindres interne et externe,  $r = R_1$ ,  $r = R_2$  le fluide n'est mobile que dans la direction radiale  $\vec{u}_\theta$

$$R_1 \cdot v_r(R_1) = R_2 \cdot v_r(R_2) = 0 \Rightarrow v_r(r) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{V} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = v_\theta \vec{u}_\theta$$

L'équation de quantité de mouvement en projection sur les trois axes se réduit à

$$\begin{cases} \frac{\partial p^*}{\partial r} = \rho \frac{v_\theta^2}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} = \mu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \\ \frac{\partial p^*}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

A l'aide des hypothèses précédentes et des conditions cinématiques d'adhérence au niveau des parois des cylindres interne et externe, on aboutit au profil de vitesse

$$v_\theta(r) = \left[ \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r - \frac{(\omega_2 - \omega_1) R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \right]$$