



Chapitre 1

Cinématique des fluides



Chapitre 1

- Cinématique des fluides
 - Description d'un fluide en écoulement
 - Notion de trajectoire : Variables de Lagrange
 - Notion de ligne de courant : Variables d'Euler
 - Champ des vitesses
 - Dérivée particulaire d'un scalaire : Accélération d'une particule
 - Conservation de la masse
 - Dérivée particulaire d'une intégrale de volume
 - Equation de continuité
 - Caractéristiques d'un écoulement
 - Divergence du champ de vitesse : Ecoulement incompressible
 - Rotationnel du champ de vitesse : Ecoulement potentiel
 - Fonction de courant : Débit volumique et massique
 - Les écoulements bidimensionnels et irrotationnels
 - Les écoulements potentiels élémentaires
 - Superposition d'écoulements simples
 - Les écoulements potentiels composés



Description d'un fluide en écoulement

La cinématique des fluides est la description analytique d'un système de particules fluide en mouvement indépendamment des forces provoquant ou modifiant l'écoulement. Deux méthodes, qui diffèrent par le choix des variables adoptées, peuvent être utilisées.

Notion de trajectoire : Variables de Lagrange

La description de **Lagrange** consiste à étudier chaque particule séparément en suivant son m^{vt} au cours du temps dans le référentiel (R). Les coordonnées de la particule fluide à l'instant $t=0$, par rapport à (R), x_0, y_0, z_0 sont prise comme paramètres.

Le mouvement de la particule fluide est déterminé si on connaît x, y, z en fonction des paramètres x_0, y_0, z_0 et t appelées «variables de Lagrange»

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t) \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t) \quad z = z(x_0, y_0, z_0, t)$$

Ces coordonnées x, y, z représentent «inconnues de Lagrange»

La **trajectoire** d'une particule de fluide est l'ensemble des positions successives qu'elle occupe au cours du temps.

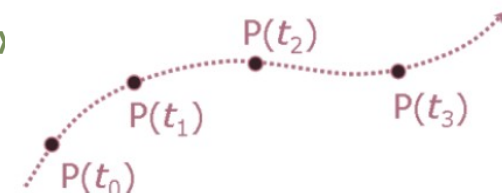


Figure1 :Trajectoire d'une particule Fluide



Description d'un fluide en écoulement

Notion de ligne de courant : Variables d'Euler

La description eulérienne consiste à déterminer, à des positions M fixes de l'espace, l'évolution temporelle de la vitesse $\vec{v}$ du mouvement de fluide .

L'écoulement est établi, à un instant t , par l'ensemble des vecteurs de vitesse associés aux particules fluides. Il est ainsi décrit par un «**champ des vecteurs vitesse**» dépendant des variables indépendantes de l'espace et du temps, où **chaque vecteur** représente **la vitesse de la particule** qui occupe **la position** à l'instant t .

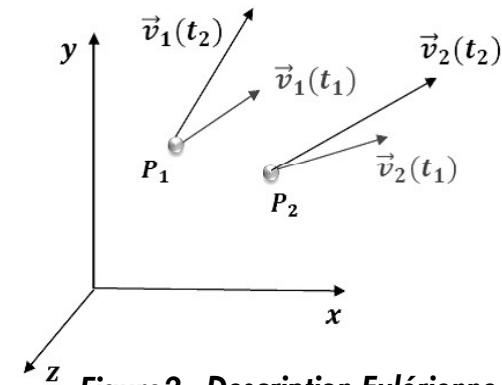


Figure2 : Description Eulérienne

Les projections u , v , w du vecteur de vitesse sur les axes (Ox) , (Oy) , (Oz) du référentiel (R) représentent les «**inconnues d'Euler**» définies comme suit :

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = f_1(x, y, z, t) \quad v = \frac{\partial y}{\partial t} = f_2(x, y, z, t) \quad w = \frac{\partial z}{\partial t} = f_3(x, y, z, t)$$

où x , y , z et t sont appelées les «**variables d'Euler**».

La **courbe tangente** en chacun de ses points au **champ vectoriel des vitesses** des particules fluide est appelée **ligne de courant**



Description d'un fluide en écoulement

Champ de vitesse

On présente dans cette partie les principales propriétés des champs vectoriels.

Lignes de courant

La **ligne de courant** est la **courbe tangente** en chacun de ses points **au champ vectoriel des vitesses** des particules fluide. Le long d'une telle ligne, à un instant fixe t_1 on a :

$$d\vec{OM} // \vec{V} \Leftrightarrow \frac{dx}{u(x, y, z, t_1)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t_1)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t_1)}$$

où u, v, w les composantes du vecteur vitesse sont des fonction du temps. De ce fait, les lignes de courant se déforment avec le temps.

Remarque

Les lignes de courant et les trajectoires coïncident à l'**état stationnaire** lorsque le champ des vecteurs vitesse est **constant dans le temps**.

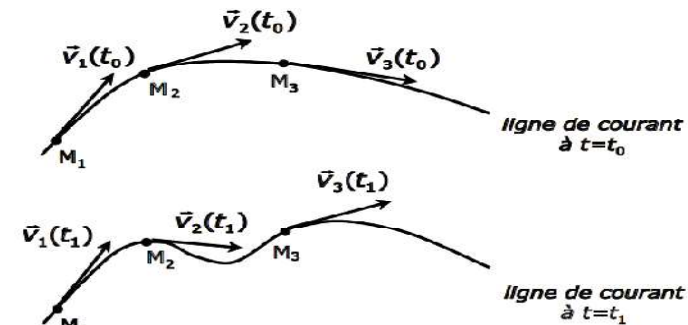


Figure3 : Lignes de courant

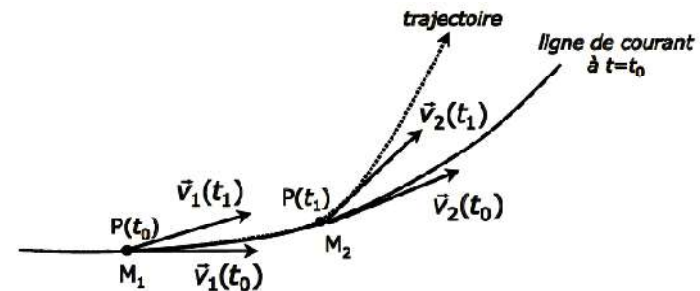


Figure4 : Lignes de courant et trajectoire



Description d'un fluide en écoulement

Tube de courant

L'ensemble des lignes de courant, s'appuyant sur un contour fermé forme un tube de courant. Le flux du champ de vitesse à travers la surface latérale de ce tube est nul.

Débit massique et volumique

On appelle débit massique d'un écoulement à travers une surface S la quantité :

$$q_m = \iint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \rho \cdot V_n \cdot dS$$

où V_n est la projection du vecteur vitesse sur la normale de l'élément dS .

On appelle débit en volume à travers la surface S la quantité :

$$Q_v = \iint_S V_n \cdot dS$$

Circulation du vecteur vitesse le long d'une courbe

Soient deux points A et B du fluide et une courbe quelconque $\overline{AB}$ joignant ces deux points. On appelle circulation du vecteur vitesse entre ces deux points l'expression

$$\Gamma_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{\overline{AB}} (u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz)$$

Dans le cas général la circulation dépend des points A et B et de la forme du trajet.



Description d'un fluide en écoulement

Potentiel des vitesses

Si la circulation du vecteur vitesse ne dépend que de la position initiale A et finale B de la particule fluide et non du chemin suivi, on dit que le champ des vitesses dérive d'un potentiel. On peut alors écrire

$$\Gamma_{\widehat{AB}} = \varphi_B - \varphi_A = \int_{\widehat{AB}} d\varphi$$

$$d\varphi = u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w$$

Ce qui est équivalent à l'expression vectorielle :

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \varphi = \overrightarrow{\text{grad} \varphi}$$

En coordonnées cylindrique, on aurait

$$d\varphi = u_r \cdot dr + u_\theta \cdot r d\theta + w \cdot dz = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial r} = u_r, \quad \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = u_\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w$$

Il résulte que la circulation sur un contour fermée est nulle.



Description d'un fluide en écoulement

Dérivée particulaire d'un scalaire : Accélération d'une particule

Considérons une grandeur locale f décrivant l'écoulement (exp: pression, densité, température etc...) définie en tant qu'une fonction des variables indépendantes qui sont la position observée x_i et l'instant t d'observation. La dérivée particulaire de cette grandeur est son taux de variation vu par un observateur qui se déplace avec l'écoulement.

Comme l'observateur reste sur un point fixe en description eulérienne, on doit ajouter à la variation temporelle de f en ce point fixe une autre variation appelée dérivée convective qui est due au déplacement de l'observateur avec l'écoulement.

On a donc :

$$\frac{Df(x_p, t)}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \xrightarrow{\text{la forme tensorielle}} \quad \frac{Df(x_p, t)}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) f$$

Remarque

En régime permanent la dérivée locale est nulle $\partial/\partial t=0$, mais la dérivée particulaire n'est pas nulle $D/Dt \neq 0$.



Description d'un fluide en écoulement

L'accélération est le taux de variation du champ de vitesse senti par une particule fluide en son mouvement. Afin de déterminer l'accélération du fluide à partir du champ de vitesse eulérien, on utilise la dérivée particulaire. En appliquant la relation de dérivée particulaire d'un scalaire sur les composantes V_i du vecteur vitesse, on peut écrire :

$$\vec{V}(x, y, z, t) = \frac{Du}{Dt} \vec{i} + \frac{Dv}{Dt} \vec{j} + \frac{Dw}{Dt} \vec{k} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \gamma_x(x, y, z, t) &= \frac{Du(x, y, z, t)}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})u \\ \gamma_y(x, y, z, t) &= \frac{Dv(x, y, z, t)}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})v \\ \gamma_z(x, y, z, t) &= \frac{Dw(x, y, z, t)}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})w \end{aligned}$$

On obtient finalement l'expression tensorielle du champ d'accélération :

$$\vec{\gamma}(x, y, z, t) = \frac{D\vec{V}(x, y, z, t)}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$$

$$\vec{V}(x, y, z, t)$$



Conservation de la masse

Dérivée particulaire d'une intégrale de volume : Théorème de transport

Soit un fluide occupant à l'instant t un domaine fini D de volume V délimité par une surface S . Considérons l'intégrale de volume I sur ce domaine D :

$$I = \iiint_V G(x_i, t) \cdot dV$$

où $G(x_i, t)$ est une grandeur locale (fonction du temps et de la position x_i de la particule fluide) liée à l'unité de volume du fluide.

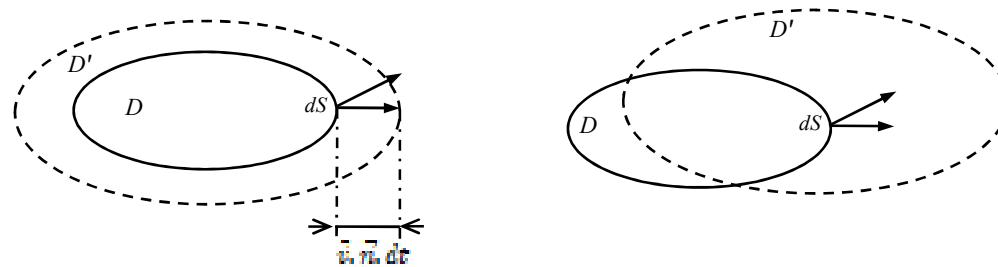


Figure5 : Variation d'une grandeur extensive avec le temps

La dérivée particulaire de l'intégrale I est la variation élémentaire de I en suivant le fluide dans son mouvement entre D et D' (figure 5), lorsque le temps s'accroît de dt . Elle est composée de deux termes :



Conservation de la masse

- La variation dI_1 locale représentée par :

$$dI_1 = \iiint_V \frac{\partial G(x_i, t)}{\partial t} \cdot dt \cdot dV$$

- Une variation dI_2 due à l'échange convectif de I avec le milieu extérieur à travers la surface S . Le volume du fluide transportant cette quantité est :

$$dV = \iint_S (\vec{V} \cdot \vec{n}) dt \cdot dS$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à dS orienté vers l'extérieur de D . Cette évolution de volume provoque un changement de grandeur I égal à

$$dI_2 = \iint_S G(x_i, t) \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dt \cdot dS$$



Conservation de la masse

Ainsi, la variation totale est

$$dI = \iiint_V \frac{\partial G(x_i, t)}{\partial t} \cdot dt \cdot dV + \iint_S G(x_i, t) \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dt \cdot dS$$

Par conséquent,

$$\frac{DI}{Dt} = \underbrace{\iiint_V \frac{\partial G(x_i, t)}{\partial t} \cdot dV}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{\iint_S G(x_i, t) \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{dérivée convective}}$$

Equation de continuité

L'équation de continuité traduit le principe de conservation de la masse dans un écoulement de fluide : la masse d'un volume élémentaire de fluide que l'on suit dans son mouvement reste constante. D'après le théorème de transport on a :

$$m = \iiint_V \rho dV \quad \begin{matrix} G = \rho \\ I = m \end{matrix} \Rightarrow \frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S \rho \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = 0$$



Conservation de la masse

D'après le théorème de flux-divergence (d'Ostrogradsky)

$$\iint_S \rho \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_V \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) dV$$

L'équation de conservation de la masse devient donc

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V}(\rho \cdot \vec{V}) \right) dV = 0$$

Elle s'écrit encore sous cette forme équivalente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0$$

Elle s'écrit encore sous cette forme équivalente

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}\vec{V} = 0$$



Caractéristiques d'un écoulement

Rotationnel du champ de vitesse : Ecoulement Potentiel

Le fait qu'un écoulement est rotationnel ou tourbillonnaire se traduit par l'existence d'un mouvement de rotation des particules lors de l'écoulement. Pour cela, on définit le vecteur tourbillon par

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(M, t)$$

où

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(M, t) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Ces particules de fluides tournent à une vitesse angulaire Ω égal à la moitié du module du vecteur rotationnel.

Remarque

L'annulation du vecteur tourbillon signifie que le champ de vitesse est nécessairement un gradient.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(M, t) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(M, t) = \vec{\nabla} \cdot \varphi(M, t)$$

où φ est le potentiel de vitesse. L'écoulement est dit alors irrotationnel ou potentiel.



Caractéristiques d'un écoulement

Fonction de courant : Débit volumique et massique

Soient deux points A et B appartenant respectivement aux lignes de courant C_1, C_2 . Joignons les points A et B par une courbe $\widehat{AMB}$ quelconque d'abscisse curviligne S. Soit $\vec{V}(M,t)$ la vitesse du fluide en M. Le débit volumique à l'intérieur le tube limité par C_1, C_2 est :

$$\iint_S (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \int dz \int_{AMB} (u dy - v dx)$$

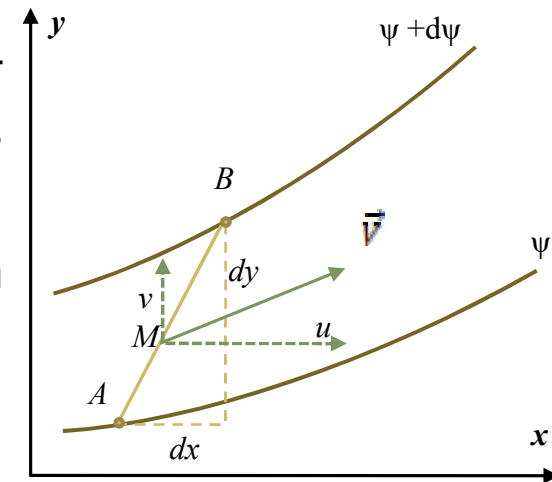


Figure6 : Le débit volumique dans le tube de courant

Le débit q_v est constant et indépendant de $\widehat{AMB}$ et on peut écrire :

$$dq_v = u dy - v dx = d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

d'où

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La fonction ψ est appelée « fonction de courant ».



Caractéristiques d'un écoulement

En coordonnées polaires le débit élémentaire dq_v est de la forme suivante :

$$dq_v = v_r r d\theta - v_\theta dr = d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} r d\theta$$

d'où

$$v_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Lignes de courant

D'après la description Eulérienne d'un écoulement bidimensionnel à un instant fixe t_1 , une ligne de courant est définie par la relation suivante :

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t_1)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t_1)}$$

Cette équation peut aussi s'écrire sous une autre forme équivalente :

$$-v dx + u dy = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi$$

Ainsi une ligne de courant est une ligne le long de laquelle le débit est constant : $\psi = C^{te}$.

Equipotentielles

Si l'écoulement est de plus irrotationnel, l'équation $\varphi = C^{te}$ définit une courbe nommée «équipotentielle».



Les écoulements bidimensionnels et irrotationnels

Les écoulements potentiels élémentaires

Dans ce qui suit, on présente les principaux écoulements plans (2dim) élémentaires :

Ecoulement uniforme

Soit un écoulement rectiligne uniforme de vitesse égale en module à V_∞ inclinée d'un angle α sur l'axe des x . Le champ des vecteurs vitesses s'écrit comme suit

$$\text{En fonction de } \psi : \begin{cases} u = V_\infty \cos \alpha = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = V_\infty \sin \alpha = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

$$\text{En fonction de } \phi : \begin{cases} u = V_\infty \cos \alpha = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = V_\infty \sin \alpha = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases}$$

Après intégration on aboutit à une fonction de courant de la forme : $\psi(x,y) = -vx + uy$

et un potentiel de vitesse s'écrivant comme suit : $\phi(x,y) = ux + vy$

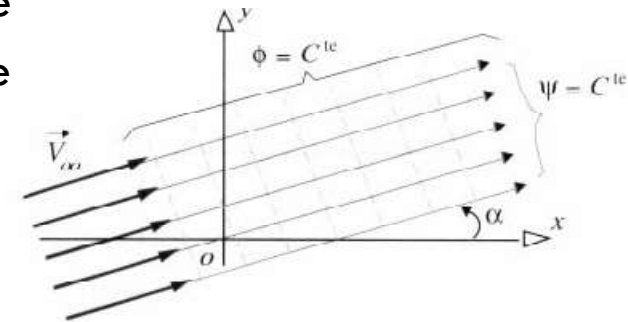


Figure7 : Ecoulement uniforme



Les écoulements bidimensionnels et irrotationnels

Source/puits à l'origine

Cet écoulement potentiel est caractérisé par un débit volumique q_v . Son champ de vitesse v_r est radiale, symétrique/(Oz) et tend vers 0 quand r tend vers l'infini. Son profil de vitesse est : $\vec{V}(r) = \frac{q_v}{2\pi r} \vec{e}_r$

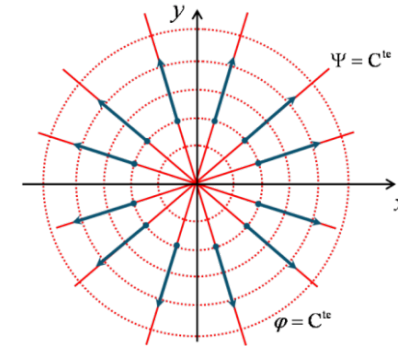


Figure 8 : Source placée à l'origine

On détermine ψ et φ en écrivant le champ de vitesse

en fonction de ψ :

$$\begin{cases} v_r = \frac{q_v}{2\pi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = 0 = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

en fonction de φ :

$$\begin{cases} v_r = \frac{q_v}{2\pi r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ v_\theta = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{cases}$$

Après intégration on aboutit à une fonction de courant de la forme : $\psi(\theta) = \frac{q_v \theta}{2\pi}$

et un potentiel de vitesse s'écrivant comme suit : $\varphi = \frac{q_v}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} = C^{te}$

Remarque

Cet écoulement possède un point singulier $r=0$ qui est l'origine O. Selon la valeur de q_v (>0) ou (<0), cette origine est qualifiée de source ou puits.



Les écoulements bidimensionnels et irrotationnels

Vortex simple

C'est un écoulement à symétrie cylindrique engendré par un fil tourbillonnaire lié à l'axe de symétrie (Oz). Son champ de vitesse, bidimensionnel dans le plan (xOy), est orthoradiale : $\vec{V} = v(r)\vec{e}_\theta$

La vorticité ou «rotation locale» est nulle en tout point de l'écoulement sauf au centre O qui est un point singulier :

$$\text{rot} \vec{V} = \vec{0} \Rightarrow \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{k} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial v_\theta}{\partial r} = -\frac{v_\theta}{r} \Rightarrow v_\theta = \frac{k}{r}$$

La circulation Γ du vecteur de vitesse le long d'un cercle, de rayon r et de centre O, est constante et non nulle :

$$\Gamma = \oint_{\text{Cercle}} \vec{V} \cdot d\vec{l} = 2\pi k = C^{\text{te}} \Rightarrow \vec{V}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

On détermine ψ et φ à partir du champ de vitesse

$$\begin{cases} v_r = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{cases}$$

Après intégration

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$$

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

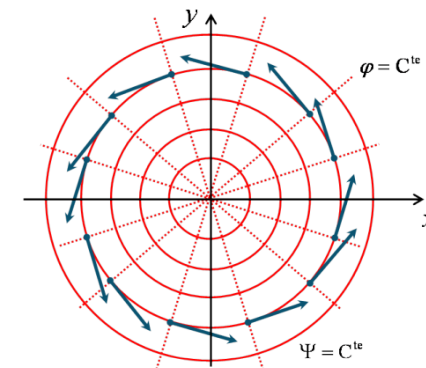


Figure 9 : Vortex simple $\Gamma > 0$



Superposition d'écoulements simples

Conditions d'existence d'un écoulement irrotationnel et incompressible

Pour qu'un écoulement permanent et plan d'un fluide incompressible soit **irrotationnel** deux conditions doivent être satisfaites :

► masse conservée $\text{div } \vec{V} = 0$: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$

► vorticité nulle $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0}$: $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$

Etude des écoulements **irrotationnels** et **incompressibles** $\Rightarrow$ Etude des fcts **harmoniques**.

Principe de superposition

A l'aide de ce principe, des écoulements plus complexes peuvent être construite par combinaison des écoulements élémentaires. Considérons deux écoulements plans irrotationnels et incompressibles définies par les fonctions de courants ψ_1, ψ_2 :

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} = 0 \end{array} \Rightarrow \alpha \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) + \beta \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underbrace{(\alpha \psi_1 + \beta \psi_2)}_{\psi_{\text{tot}}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \underbrace{(\alpha \psi_1 + \beta \psi_2)}_{\psi_{\text{tot}}} = 0$$



Les écoulements potentiels composés

Le doublet

Cet écoulement est obtenu par la superposition d'une source (q_v) et d'un puits ($-q_v$), symétriquement disposés aux points $S(-a,0)$, $P(0,a)$ de l'axe des x . Au point M , les vecteurs de vitesse générés de la source et du puits sont :

$$\vec{V}_1 = \frac{q_v}{2\pi r_1} \vec{r}_1, \quad \vec{V}_2 = -\frac{q_v}{2\pi r_2} \vec{r}_2$$

La fonction de courant $\psi_1 + \psi_2$ de l'écoulement résultant est:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{q_v \alpha}{2\pi} \\ \psi_2 &= -\frac{q_v \beta}{2\pi} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \psi = \frac{q_v}{2\pi} (\alpha - \beta) \quad \tan(\alpha - \beta) = \left(\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi = \frac{q_v}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} \right)}$$

En fonction des coordonnées cartésiennes, la fonction de courant se réécrit comme suit:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x+a}, \quad \tan \beta = \frac{y}{x-a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi = \frac{q_v}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)}$$

Les lignes de courant sont des cercles, passant par A_1 et A_2 , de centre $C \in (yy')$.

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{k}\right)^2 = a^2 \left(1 + \frac{1}{k^2}\right), \quad k = \tan \left(-\text{cte} \frac{2\pi}{q_v} \right)$$

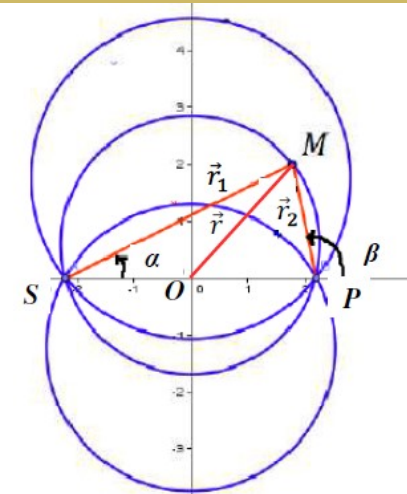


Figure 10 : Lignes de courant du doublet



Les écoulements potentiels composés

Le dipôle

On fait tendre vers zéro la distance $2a \rightarrow 0$ et vers l'infini le débit $q_v \rightarrow \infty$ de façon à garder le produit $2aq_v$ constant. Dans ces conditions, on superpose le puits et la source à l'origine, en créant ainsi un « **dipôle hydrodynamique** » d'intensité $\mu = 2aq_v$.

En appliquant ces limites sur la fonction ψ du doublet, on obtient le résultat :

$$\psi = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ q_v \rightarrow \infty}} \left[\frac{q_v}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) \right] \Bigg|_{2aq_v = \mu} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 0} \tan^{-1} x = x} \psi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r}$$

Lignes de courant

La ligne de courant vérifiant l'équation $\psi = \text{cte}$ se formule comme suit :

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{2\pi \text{cte}}{\mu} \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4}, k = \frac{\mu}{2\pi \text{cte}}$$

Les lignes de courant sont des cercles, passant par O, de centre $C \in (yy')$.

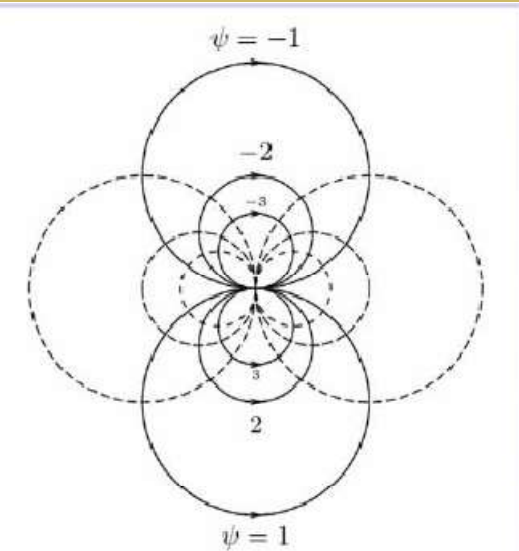


Figure 11: Lignes de courant du dipôle



Les écoulements potentiels composés

Écoulement autour d'un corps fictif immobile « solide de Rankine »

Cet écoulement est obtenu par la superposition d'une source (q_v) placée à l'origine et d'un écoulement uniforme de vitesse $U_0 > 0$ à l'infini et parallèle à (Ox) .

La fonction de courant totale

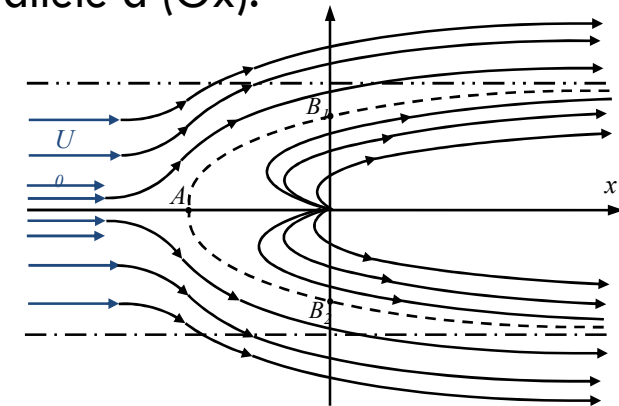
$$\psi(r, \theta) = U_0 r \sin \theta + \frac{q_v}{2\pi} \theta$$

Champ de vitesse

$$\begin{cases} v_r(r, \theta) = U_0 \cos \theta + \frac{q_v}{2\pi r} \\ v_\theta(r, \theta) = -U_0 \sin \theta \end{cases}$$

Point d'arrêt

$$v_\theta = U_0 \sin \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_A = 0, & v_r = 0 = U_0 + \frac{q_v}{2\pi r_A} \Rightarrow r_A = -\frac{q_v}{2\pi U_0} \\ \theta_A = \pi, & v_r = 0 = -U_0 + \frac{q_v}{2\pi r_A} \Rightarrow r_A = \frac{q_v}{2\pi U_0} \end{cases} \text{ solution acceptée}$$



Lignes de courant autour du solide de Rankine

En matérialisant une surface Σ d'envergure unité s'appuyant, dans le plan (xOy) , sur la ligne de courant B_1AB_2 passant par le point d'arrêt on génère un solide dit "solide de Rankine".



Les écoulements potentiels composés

Écoulement autour d'un corps fictif immobile « l'ovale de Rankine »

Cet écoulement est obtenu par la superposition d'une source (q_v) et d'un puits ($-q_v$), symétriquement disposés aux points $S(-a,0)$, $P(0,a)$ de l'axe des x et d'un écoulement uniforme de vitesse $U_0 > 0$ à l'infini et parallèle à (Ox) .

Fonction de courant totale

$$\psi(x, y) = U_0 y - \frac{q_v}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)$$

Champ de vitesse

$$u = U_0 - \frac{q_v}{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)}{1 + \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)^2} = U_0 - \frac{q_v}{2\pi} \frac{2a(x^2 - y^2 - a^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2}$$

$$v = \frac{q_v}{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)}{1 + \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)^2} = \frac{q_v}{2\pi} \frac{-4axy}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2}$$

Point d'arrêt

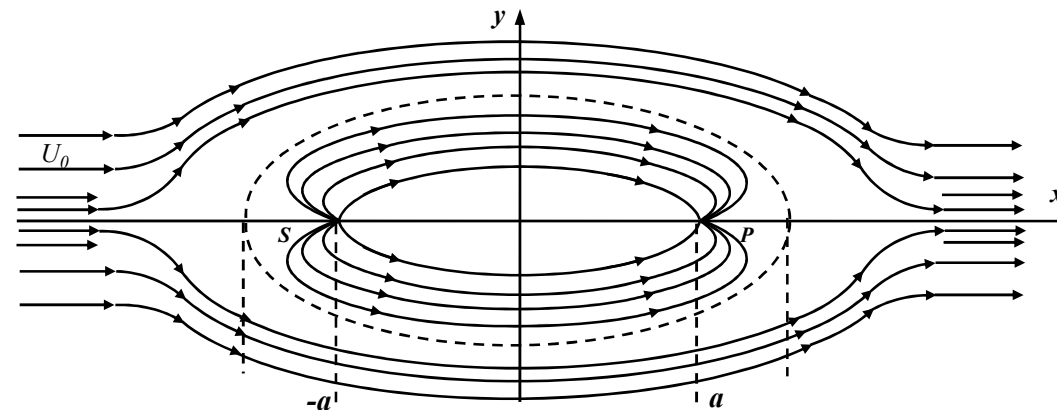
On remarque que la composante v du vecteur de vitesse en tous points de l'axe (Ox) est nulle et de ce fait l'apparition des points d'arrêts sur cet axe est conditionné par l'annulation de la composante u . Ainsi on détermine la coordonnée x_A du point d'arrêt de l'équation suivante

$$(x^2 - a^2) \left[U_0(x^2 - a^2) - \frac{q_v}{2\pi} 2a \right] = 0 \Rightarrow x = \pm a \left(\frac{q_v}{\pi a U_0} + 1 \right)^{1/2}$$



Les écoulements potentiels composés

La solution $x=\pm a$ est refusée car c'est les positions des origines de la source et le puits (points singuliers). De ce fait, il existe deux points d'arrêt $A\left(-a\sqrt{\frac{q_v}{\pi a U_0} + 1}, 0\right)$ et $A'\left(a\sqrt{\frac{q_v}{\pi a U_0} + 1}, 0\right)$ symétriques par rapport à l'axe des y . Comme montré par la figure ci-dessous les deux points d'arrêts appartiennent à la ligne de courant dite "l'ovale de Rankine"



Lignes de courant de l'ovale de Rankine

Ecoulement autour d'un cylindre fixe

Cet écoulement est résultant de la superposition d'un écoulement uniforme de vitesse U_0 à l'infini et parallèle à l'axe des x et d'un dipôle d'intensité positive $\mu = U_0 a^2$ placée à l'origine du repère.

Fonction de courant totale $\psi(r, \theta) = U_0 r \sin \theta \left(1 - \frac{\mu}{2\pi U_0 r^2}\right)$



Les écoulements potentiels composés

Champ de vitesse

$$\begin{cases} v_r(r, \theta) = U_0 \cos \theta \left(1 - \frac{\mu}{2\pi U_0 r^2} \right) \\ v_\theta(r, \theta) = -U_0 \sin \theta \left(1 + \frac{\mu}{2\pi U_0 r^2} \right) \end{cases}$$

Point d'arrêt

Les points d'arrêt sont obtenus pour $v_r=0$ et $v_\theta=0$. De ces conditions on en déduit aisément deux points d'arrêt A et A' dont les coordonnées sont respectivement $\left(r_A = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi U_0}}, \theta_A = \pi \right)$ et $\left(r_{A'} = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi U_0}}, \theta_{A'} = 0 \right)$. Ces points appartenant à (Ox) sont symétriques par rapport à O.

Lignes de courant

Les équations des lignes de courant sont de la forme suivante : $U_0 r \sin \theta \left(1 - \frac{\mu}{2\pi U_0 r^2} \right) = C^{te}$

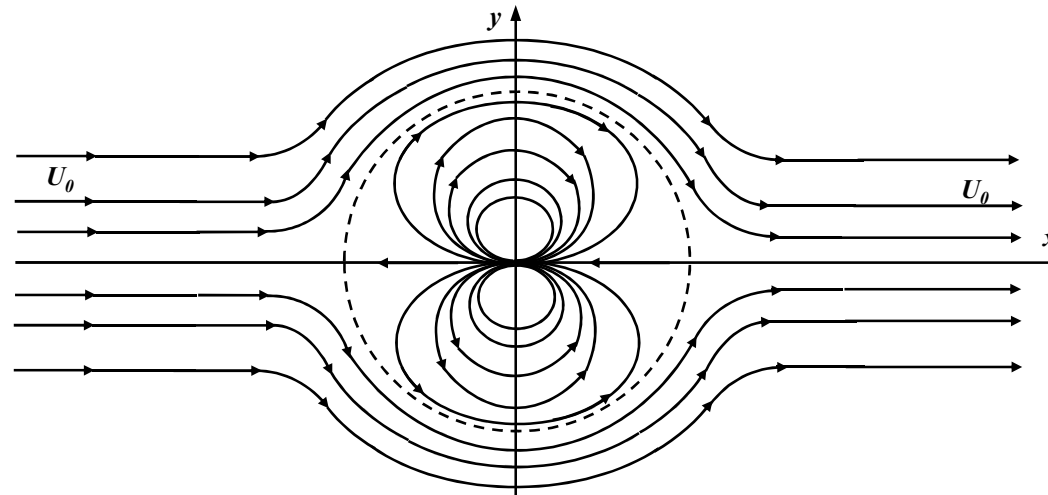
L'équation de la ligne de courant passant par les points d'arrêt est vérifiée par leurs coordonnées $\psi(r_A, \theta_A) = \psi(r_{A'}, \theta_{A'}) = C$.

D'où on tire la valeur de la constante $\sin \theta_A \left(U_0 r_A - \frac{\mu}{2\pi r_A} \right) = C = 0 \Rightarrow \psi(r_A, \theta_A) = 0$

La courbe correspondante (se décompose en deux parties : l'axe des x et le cercle centré à l'origine du repère de rayon .



Les écoulements potentiels composés



Superposition d'un dipôle et d'un écoulement uniforme

Le long du cercle ou ligne de courant $\psi = 0$ la propriété de tangentialité du vecteur vitesse est vérifiée car la composante radiale de la vitesse est nulle $v_r(r_A) = 0$.

La configuration générale de l'écoulement, telle qu'elle est illustrée sur la figure ci-dessus permet de distinguer clairement deux régions situées à l'extérieur et à l'intérieur du cercle de rayon r_A . Dans la région externe, seul le débit de l'écoulement du champ uniforme à l'infini qui intervient, tandis que dans la région interne du cercle le mouvement du fluide est totalement engendré par la présence du dipôle à l'origine.



Les écoulements potentiels composés

Ecoulement autour d'un cylindre en rotation « effet de Magnus »

Examinons ce que devient l'écoulement autour du cercle (de rayon r_0) en présence d'un vortex d'intensité Γ ($\Gamma > 0$) et d'axe (Oz).

Fonction de courant $\psi(r, \theta) = U_0 r \sin \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$

Champ de vitesse

$$v_r(r, \theta) = U_0 \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)$$

$$v_\theta(r, \theta) = -U_0 \sin \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Point d'arrêt

Les points d'arrêt sont obtenus pour $v_r=0$ et $v_\theta=0$. La condition sur v_r montre que ces points relèvent de l'un des deux cas suivants

$$\begin{cases} i) r_A = r_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi U_0}} & (\text{cercle de rayon } r_0) \\ ii) \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta_A = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} & (\text{axe des } y) \end{cases}$$

La condition $v_\theta=0$ conduit à $\sin \theta_A = \Gamma / \Gamma_0$ avec $\Gamma_0 = 4\pi r_0 U_0$.

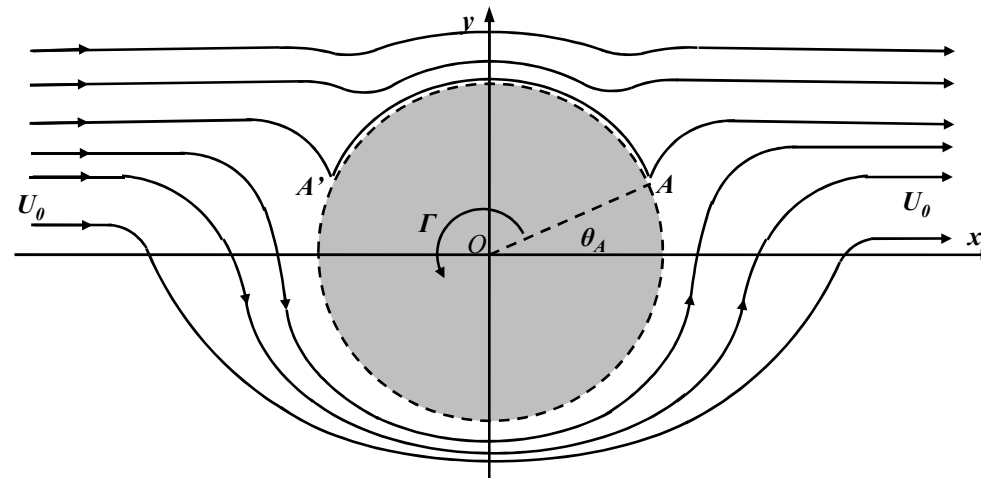


Les écoulements potentiels composés

i) Sur le cercle de circulation Γ

1^{er} Cas : $0 \leq \Gamma < \Gamma_0$

La condition d'annulation de v_θ est satisfaite seulement si : $0 \leq \Gamma < \Gamma_0$ et obtient alors deux points d'arrêt situés sur le cercle et symétriques par rapport à l'axe des y repérés par les angles : $\theta_A = \sin^{-1}(\Gamma / \Gamma_0)$, $\theta_{A'} = \pi - \sin^{-1}(\Gamma / \Gamma_0)$



Écoulement autour d'un cylindre avec circulation faible ($\Gamma < \Gamma_0$)

On constate que l'ajout de la circulation Γ , créée par le vortex, avait un effet sur l'écoulement autour du cercle de façon à faire déplacer les points d'arrêt, symétriquement par rapport à l'axe (Oy), vers le haut d'une ordonnée proportionnelle à la valeur de Γ .



Les écoulements potentiels composés

ii) Sur l'axe (Oy)

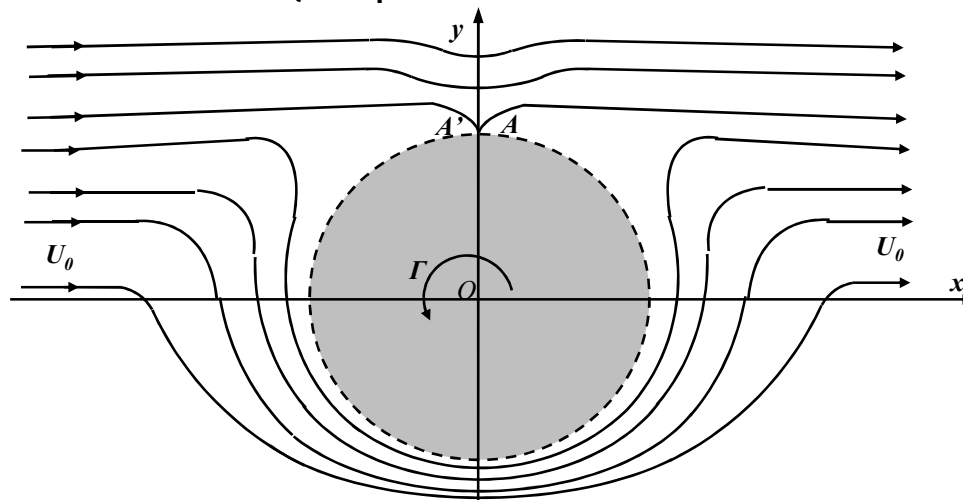
L'annulation de v_θ a conduit à $\sin \theta_A = \frac{\Gamma}{2\pi r_A U_0 (1 + r_0^2/r_A^2)} > 0$. L'ajout de la condition $v_r = 0$ affirme la valeur de $\theta = \pi/2$ d'où les points d'arrêt $\in (Oy)$ et leurs coordonnées r_A vérifient l'équation en r_A suivante :

$$r_A^2 - \frac{\Gamma}{2\pi U_0} r_A + r_0^2 = 0$$

dont le déterminant est $\Delta' = r_0^2 \left[\left(\frac{\Gamma}{\Gamma_0} \right)^2 - 1 \right]$ et $\Gamma_0 = 4\pi r_0 U_0$. Les solutions existent pour $\Delta' \geq 0$ c.à.d. si et seulement si $\Gamma \geq \Gamma_0$.

2^{ème} Cas : $\Gamma = \Gamma_0$

Pour cette valeur critique de la circulation, un point d'arrêt double se forme à l'intersection du cercle avec l'axe (Oy).



Ecoulement autour d'un cylindre avec circulation critique ($\Gamma = \Gamma_0$)



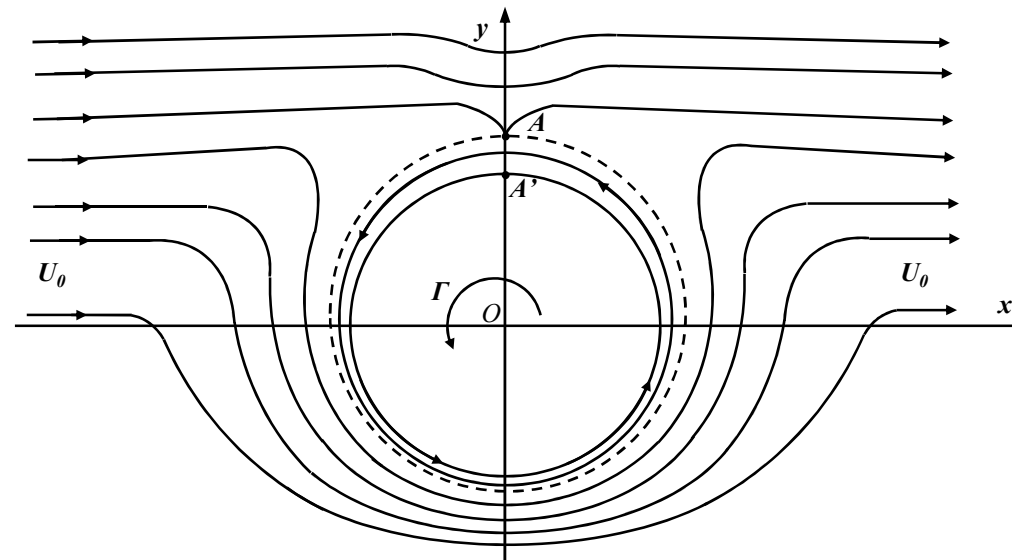
Les écoulements potentiels composés

3^{ème} Cas : $\Gamma > \Gamma_0$

Le déterminant réduit de l'équation de la coordonnée radiale r_A des points d'arrêts est alors positif et les solutions prennent la forme suivante :

$$r_A = r_0 \left(\left(\Gamma / \Gamma_0 \right) + \left[\left(\Gamma / \Gamma_0 \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right) \quad r_{A'} = r_0 \left(\left(\Gamma / \Gamma_0 \right) - \left[\left(\Gamma / \Gamma_0 \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right)$$

dont leur produit est r_0^2 ce qui confirme qu'un point de ces deux d'arrêt formés sur l'axe des y est à l'extérieur du cercle (cylindre) de rayon r_0 et l'autre est à l'intérieur .



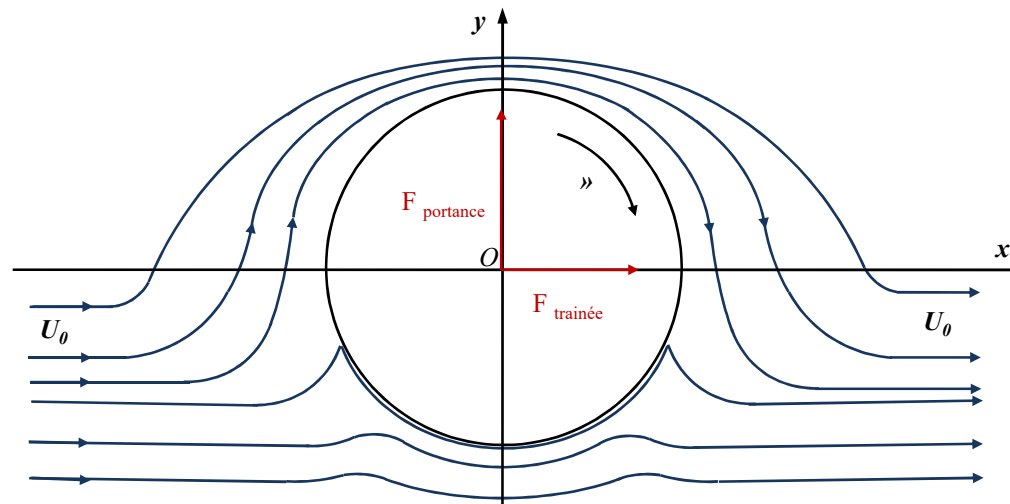
Écoulement autour d'un cylindre avec circulation critique ($\Gamma > \Gamma_0$)



Les écoulements potentiels composés

Calcul des effort d'effet de Magnus

En matérialisant une surface d'envergure unité s'appuyant dans le plan (xOy) sur le cercle et sous la restriction $r > r_0$, on se trouve devant la situation d'un cylindre de rayon r_0 , centré à l'origine et en rotation autour de (Oz), plongé dans un écoulement de vitesse uniforme U_0 à l'infini.



Effet Magnus

Afin de calculer l'effort global exercé par le fluide sur l'obstacle qui est le cylindre, on applique le théorème d'Euler. En négligeant les forces de frottement, seules les forces de pression qui intervient comme forces de surfaces dans ce problème.



Les écoulements potentiels composés

La résultante de ces forces sur le cylindre s'obtient par intégration sur son contour comme suit

$$\vec{F} = - \iint_{\Sigma} p \vec{n} dS$$

où dS est l'élément de surface d'envergure unité (longueur en z est l'unité) et la normale est extérieure. La projection de la force dans le repère (xOy) donne

$$\vec{F} = - \iint_{\Sigma} p(r_0, \theta) \vec{n} r_0 d\theta \times (1m) \Rightarrow \begin{cases} F_x = - \int_0^{2\pi} p(r_0, \theta) \cos \theta r_0 d\theta \\ F_y = - \int_0^{2\pi} p(r_0, \theta) \sin \theta r_0 d\theta \end{cases}$$

F_x appelée « traînée » représente la composante parallèle, au vecteur vitesse de l'écoulement à l'infini, de la force de pression exercée par le fluide sur le cylindre, tandis que F_y dite « portance » est sa composante normale à l'écoulement.

En négligeant la différence en énergie potentielle, l'évolution de la pression autour du cylindre est

$$p(r_0, \theta) + \frac{1}{2} \rho v^2(r_0, \theta) = c^{te}$$



Les écoulements potentiels composés

Le module du vecteur vitesse se calcule au niveau de la surface du cylindre $v(r_0, \theta)$ en posant $r=r_0$ dans les expressions de ses composantes

$$v_r = 0 \quad v_\theta = -2U_0 \left(\sin \theta + \frac{\Gamma}{4\pi r_0 U_0} \right)$$

d'où la pression s'écrit

$$p(\theta) = c^{ts} - 2\rho U_0^2 \left(\sin \theta + \frac{\Gamma}{4\pi r_0 U_0} \right)^2$$

Les composantes de l'effort de Magnus F_x, F_y peuvent être évaluées séparément

$$\begin{cases} F_x = -C \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta + 2\rho r_0 U_0^2 \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 \theta + \frac{\Gamma}{4\pi r_0 U_0} \sin \theta \right) \cos \theta \, d\theta \\ F_y = -C \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta + 2\rho r_0 U_0^2 \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 \theta + \frac{\Gamma}{4\pi r_0 U_0} \sin \theta \right) \sin \theta \, d\theta \end{cases}$$

pour obtenir, après intégration $F_x=0, F_y = -\rho U_0 \Gamma$. Ce résultat traduit l'absence de force de traînée $F_x=0$ en raison de la symétrie de la vitesse par rapport à l'axe des y et la présence de force de portance $F_y = -\rho U_0 \Gamma$ (négative pour une circulation positive) connu sous le nom de l'effet Magnus.