



Chapitre 2

Analyse basée sur le concept du volume de contrôle



Chapitre2

- Analyse basée sur le concept du volume de contrôle
 - Conservation de masse (formulation intégrale)
 - Dérivation basée sur un volume de contrôle non déformable fixe
 - Dérivation basée sur un volume de contrôle non déformable en mouvement
 - Equations de quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement
 - Dérivation de l'équation de quantité de mouvement
 - Dérivation de l'équation du moment de la quantité de mouvement (énergie)



Conservation de masse (formulation intégrale)

En mécanique des fluides, on utilise la description eulérienne du mouvement, c'est-à-dire qu'on ne suit pas les particules dans leurs mouvements individuels, mais on examine le mouvement du fluide à un endroit donné. Cette description introduit deux notions de base : dérivée matérielle ou particulaire et volume de contrôle.

Dans le chapitre précédent, on a représenté l'équation de continuité par la formulation différentielle ou locale basée sur un élément de volume infinitésimal. Dans ce chapitre on va exprimer ce principe de conservation de masse, en se basant sur la notion du volume de contrôle, à l'aide de la formulation intégrale ou globale (Théorème de Reynolds). De plus, on dérive les équations de conservation quantité de mouvement et du moment de quantité de mouvement (énergie).

Dérivation basée sur un volume de contrôle non déformable fixe

Soit un fluide occupant à l'instant t un domaine fini $D(t)$ de volume V , limité par une surface S , que l'on suit dans son mouvement. La grandeur extensive m est calculée sur ce domaine par l'intégrale de volume

$$m = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV$$



Conservation de masse (formulation intégrale)

Sa dérivée particulaire est nulle d'où $\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = 0$

Comme le domaine enveloppant les particules fluides qui sont en mouvement c.à.d. volume matériel V est une fonction du temps, l'évaluation présente un inconvénient.

Afin de surmonter le problème, on fait coïncider à instant de temps t le volume matériel fermé V avec un volume de contrôle fixe V_C sur lequel on pourra effectuer les calculs plus facilement. A l'aide d'un bilan global, on comptabilise le flux de masse à travers la surface de contrôle S_C délimitant ce volume contrôle V_C .

Le débit de masse net à travers la surface de contrôle S_C est donc

$$\underbrace{\iint_{S_C} \rho \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{flux à travers } S_C} = \underbrace{\iint_{S_e} \rho \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{flux entrant}} - \underbrace{\iint_{S_s} \rho \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{flux sortant}}$$

Le flux de masse traversant la surface S_C correspondant à la quantité de masse qui “s'accumule” (négative ou positive) par unité de temps dans le volume de contrôle est

$$\left. \frac{\partial m}{\partial t} \right|_{V_C} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_C} \rho dV$$



Conservation de masse (formulation intégrale)

Comme la masse ne peut être créée ni détruite, on a

$$\underbrace{\iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}_{\text{Accumulation de m dans } V_c \text{ dans le temps}} + \underbrace{\iint_{S_c} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{Les flux massiques à travers } S_c} = 0$$

C'est le théorème de transport de Reynolds (dérivée particulaire d'une intégrale de volume)

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV}_{\text{Variation temporelle de m en suivant le système}} = \underbrace{\iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}_{\text{Variation temporelle de m dans } V_c \text{ (locale)}} + \underbrace{\iint_{S_c} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{débit net de m traversant } S_c \text{ entourant } V_c} = 0$$

A l'aide du théorème de Gauss, on écrit $\iint_{S_c} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_{V_c} \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) dV$

L'équation de conservation de la masse devient : $\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{V}) \right) dV = 0$

En faisant tendre ce volume vers un volume contenant une seule particule fluide en M_0

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) \right) \bigg|_{M_0} \cdot \Delta V = 0 \quad \Delta V \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0$$



Conservation de masse (formulation intégrale)

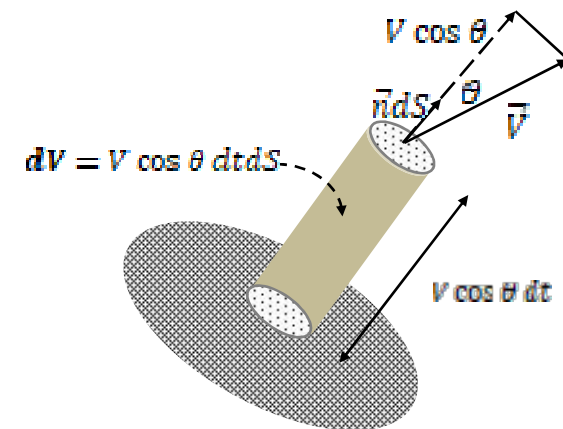
Dérivation basée sur un volume de contrôle non déformable en m^3

Si le volume de contrôle se déplace, il faut considérer la vitesse relative $\vec{V}_r$ entre celle du fluide $\vec{V}$ et celle de la surface $\vec{V}_s$ enveloppant le volume de contrôle V_c .

Considérant un volume élémentaire dV entre la surface S_c et la surface englobant le volume matériel V . Ce volume dV de fluide, traversant la frontière du volume de contrôle V_c , dépend de la vitesse de l'écoulement du fluide et de la vitesse de déplacement $\vec{V}_s$ de la surface de contrôle S_c .

Cas d'un volume V_c fixe

Si la surface est fixe, la hauteur atteinte par dV dans un intervalle de temps dt est donnée par $|\vec{V}| \cos \theta dt$ et le volume devient $dV = |\vec{V}| \cos \theta dtdS$, avec $|\vec{V}|$ le module de la vitesse de l'écoulement et dS est une surface élémentaire de S_c .



Cas de surface de contrôle immobile



Conservation de masse (formulation intégrale)

Cas d'un volume V_c mobile

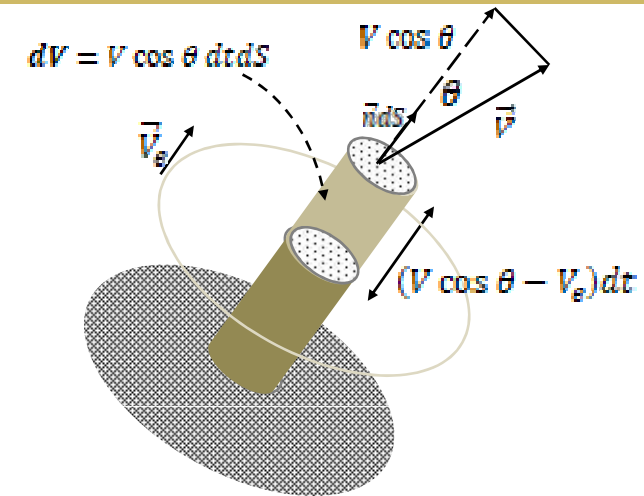
Lorsque la surface se déplace avec une vitesse d'entraînement normale V_e , dans le même sens que $V \cos \theta$, la hauteur du volume atteinte dans un intervalle dt est plus petite que précédemment et elle est égale à $(V \cos \theta - V_e) dt$ et le volume devient $dV = (V \cos \theta - V_e) dt dS$.

Dans le cas inverse où la vitesse d'entraînement est dirigée dans le sens inverse de la vitesse $V \cos \theta$ de l'écoulement, la hauteur du volume atteinte dans l'intervalle dV est donnée par $(V \cos \theta + V_e) dt$ et le volume élémentaire est ainsi $dV = (V \cos \theta + V_e) dt dS$.

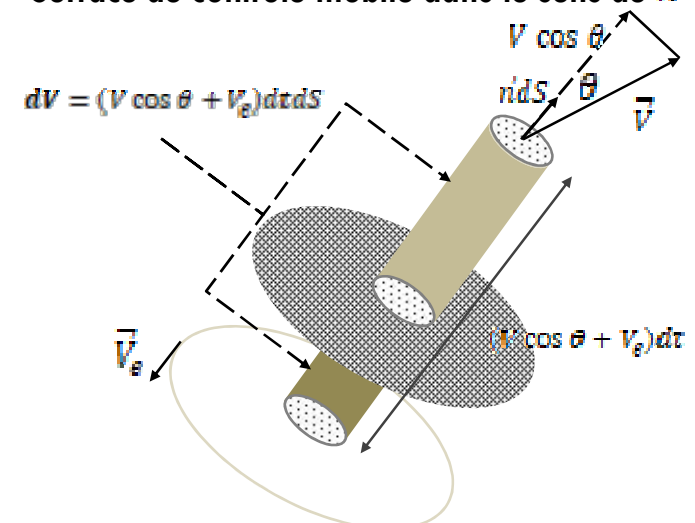
La relation générale de conservation de masse est ainsi

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_{S_c} \rho \cdot (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dS = 0$$

où $\vec{V}_r$ est la vitesse relative du fluide par rapport au V_c .



Surface de contrôle mobile dans le sens de $\vec{n}$



Surface de contrôle mobile dans le sens opposé de $\vec{n}$



Equation de quantité de mouvement

Dérivation de l'équation de la quantité de m^v

On a montré au chapitre précédent que la dérivée particulaire d'une intégrale de volume, c'est-à-dire d'un volume que l'on suit dans son mouvement, s'écrit

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V G dV = \iiint_V \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \text{div}(G\vec{V}) \right) dV$$

où $G(x_i, t)$ est une fonction volumique des variables (x_i, t) attachée au domaine contenant un ensemble de particules fluides se déplaçant à vitesse $\vec{V}(x_i, t)$.

Comme on est amenés à faire le bilan en volume d'une grandeur massique (extensive), la fonction ρf doit être substituée à G dans la relation précédente. On obtient

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho f dV = \iiint_V \left(\frac{\partial \rho f}{\partial t} + \text{div}(\rho f \vec{V}) \right) dV$$

Qui se réécrit

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho f dV = \iiint_V \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \vec{V}) \right) + \underbrace{f \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) \right)}_{=0} dV$$

Où la 2^{ème} partie est nulle grâce à l'équation de continuité et la première intégrale représente dérivée particulaire de la grandeur f . Ainsi on peut écrire

$$\iiint_V \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \vec{V}) \right) dV = \iiint_V \rho \frac{Df}{Dt} dV$$



Equation de quantité de mouvement

En se servant du théorème d'Ostrogradsky, cette intégrale s'écrit aussi comme suit

$$\iiint_V \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f\vec{V}) \right) dV = \iiint_V \rho \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_S \rho f(\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

Pour la fonction vectorielle de quantité de mouvement, la fonction intensive f est $\vec{V}$. Ainsi la loi de conservation de quantité de mouvement s'écrit sous la forme

$$\iiint_V \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} dV = \iiint_V \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

D'après la deuxième loi de Newton

$$\iiint_V \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} dV = \sum \vec{F}_{ext}$$

Ainsi, loi de conservation de quantité de mouvement se réécrit

$$\sum \vec{F}_{ext} = \iiint_V \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

Les forces appliquées comprennent les forces de volume et les forces de surface agissant à la surface du volume.



Equation de quantité de mouvement

Les forces de volume s'exerçant à distance en tout point M du volume matériel V , par exemple la force exercée par le champ de gravité nommée poids

$$\iiint_V \rho \vec{g} dV$$

Tandis que les forces de surface sont transmises par le fluide, extérieur du volume (domaine), en tout point M de la surface de contact S limitant ce domaine. Ces forces sont les forces de pression et les forces de frottement qui sont négligeables comme le fluide est considéré comme parfait.

Les forces de pression ont la forme suivante

$$\iint_S p \cdot \vec{n} dS$$

Comme, à un instant t , le volume matériel V en mouvement coïncide avec le volume de contrôle V_c , le théorème de conservation de quantité de mouvement prend la forme

$$\underbrace{\sum \vec{F}_{\text{ext}}}_{\text{Forces exercées sur } V_c} = \underbrace{\iiint_{V_c} \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dV}_{\text{Variation de la quantité de m}^{\text{RT}} \text{ dans } V_c} + \underbrace{\iint_{S_c} \rho \vec{V} (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dS}_{\text{Flux de la quantité de m}^{\text{RT}} \text{ à travers } S_c}$$



Equation de quantité de mouvement

Remarques

- L'équation de conservation de quantité de mouvement ne fait intervenir que des quantités calculées sur la surface limitant le volume de contrôle ; il est inutile de connaître le champ de vitesse et le champ de pression à l'intérieur de ce volume.
- Si l'écoulement est en régime permanent et si le volume de contrôle ne se déforme pas et si, $\vec{V}_r = \vec{V}$ la loi de conservation de qt de mvt se simplifie et prend la forme suivante appelée **théorème d'Euler** :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \iint_{S_c} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

- Comme le fluide est considéré parfait (force de frottement négligeable) les sections d'entrées et de sorties ont des vitesses uniformes, l'intégrale sur la section S_c peut se simplifier en :

$$\sum \vec{F}_{/V_c} = \sum_{\text{entrée}} q_{m_i} \vec{V}_i - \sum_{\text{sortie}} q_{m_j} \vec{V}_j$$

où les sommations correspondent aux nombres d'entrées et de sorties et q_m est le débit massique.



Equation de quantité de mouvement

Exemple (Exo2 de série3)

De l'eau circule dans une conduite horizontale, de section constante, présentant un coude d'angle 90° continue dans la direction verticale. On suppose que le régime est stationnaire et on néglige l'effet de la pesanteur.

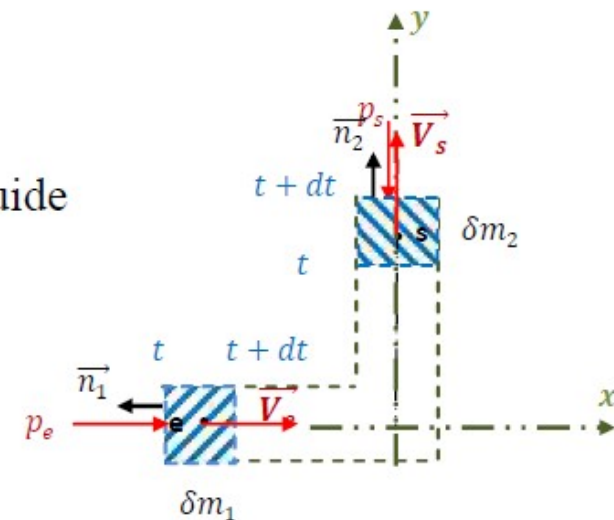
1. Déterminer la force $\vec{F}$ appliquée par le fluide sur la canalisation.
2. Calculer le module de $\vec{F}$ ainsi que ses composantes pour les données $D=9\text{cm}$, $V_e=0,5\text{m/s}$ et $p_e=29\,616,78\text{Pa}$...

Solution

1. Détermination de la force appliquée par le fluide sur la canalisation

Les hypothèses

L'écoulement est incompressible,
Le régime est stationnaire,
L'effet de la pesanteur est négligé.





Equation de quantité de mouvement

On résonne sur le système matériel fermé Σ constitué du contenu du tube coudé (limité par S_1 , S_2 et S_l) et une masse élémentaire δm_1 qui rentre en amont entre t et $t+dt$:

D'après le principe de conservation du débit massique du fluide, on écrit

$$m(t) + \delta m_1 = m(t + dt) + \delta m_2$$

qui se réécrit comme suit

$$m(t + dt) - m(t) = \delta m_1 - \delta m_2 = \rho(S_1 V_1 - S_2 V_2) dt$$

Comme l'écoulement est stationnaire

$$m(t + dt) = m(t) \Rightarrow S_1 V_1 = S_2 V_2$$

d'où

$$S_1 = S_2 \Rightarrow V_1 = V_2 \Leftrightarrow V_e = V_s$$

D'autre part, on applique le théorème de Bernoulli entre e et s

$$p_e + \underbrace{\rho g y_e}_{\approx 0} + \frac{1}{2} \rho V_e^2 = p_f + \underbrace{\rho g y_f}_{\approx 0} + \frac{1}{2} \rho V_s^2$$

$$V_e = V_s \Rightarrow p_e = p_f$$

Afin de calculer la force appliquée par le fluide sur la canalisation on applique le théorème de bilan de quantité de m^{vt} (théorème de transport de Reynolds TTR) sur le volume de contrôle V_c délimité par les surfaces S_1 , S_2 et S_l du système fermé Σ . On écrit



Equation de quantité de mouvement

$$\underbrace{\iiint_{V_c} \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dV}_{=0} + \iint_{S_c} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \Sigma \vec{F}_{ext}$$

Les forces extérieures

Forces de viscosité : négligées

Force de pesanteur : négligée

La force subie par le coude est $\vec{F}_{f/c} = -\vec{F}_{c/f} = -\vec{F}$

Les forces de pression : $\vec{F}_{pe}, \vec{F}_{ps}$

$$\iint_{S_1} \rho \vec{V}_e (\vec{V}_e \cdot \vec{n}_1) dS + \iint_{S_2} \rho \vec{V}_f (\vec{V}_f \cdot \vec{n}_2) dS + \underbrace{\iint_{S_l} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}_l) dS}_{=0, (\vec{V} \perp \vec{n}_l)} = \vec{F}_{pe} + \vec{F}_{ps} - \vec{F}$$

Comme les forces de viscosité sont négligées la vitesse est uniforme le long de la section S_l et l'intégrale de surface devient

$$\iint_{S_l} \rho \vec{V}_e (\vec{V}_e \cdot \vec{n}_1) dS = -\rho V_e^2 S_1 \vec{i}$$



Equation de quantité de mouvement

De même pour la section S_2 la vitesse est uniforme :

$$\iint_{S_2} \rho \vec{V}_f (\vec{V}_f \cdot \vec{n}_2) dS = \rho V_s^2 S_2 \vec{j}$$

Par conséquent

$$-\rho V_e^2 S_1 \vec{i} + \rho V_f^2 S_2 \vec{j} = p_e S_1 \vec{i} - p_s S_2 \vec{j} - \vec{F}$$

Comme $S_1 = S_2, p_e = p_s, V_e = V_s$, on obtient

$$\vec{F} = (p_e S_1 + \rho V_e^2 S_1)(\vec{i} - \vec{j}).$$

2. Le module de $\vec{F}$ et ses composantes

$$F_x = \frac{\pi D^2}{4} (p_e + \rho V_e^2), \quad F_y = -\frac{\pi D^2}{4} (p_e + \rho V_e^2)$$

$$\|\vec{F}\| = \frac{\pi \sqrt{2} D^2}{4} (p_e + \rho V_e^2)$$

A.N. :

$$F_x = 190N, \quad F_y = -190N, \quad F = 268.7N.$$