

### III. 1. Introduction

Les problèmes de mécanique des fluides contiennent toujours des phénomènes complexes et divers. En se basant sur certaines hypothèses simplificatrices, ces problèmes peuvent être étudiés par résolution analytique des équations de Navier-Stokes, résolution numérique de ces équations, ou bien par méthode expérimentale.

Quand le système étudié est trop complexe pour permettre une résolution complète des équations de Navier-Stokes, une autre alternative donne accès à des relations entre les différents variables caractérisant le système. L'estimation à priori des ordres de grandeurs de ces variables donne souvent des résultats utiles. L'analyse dimensionnelle est l'outil efficace de cette procédure d'estimation. Elle est basée sur un ensemble de techniques permettant de :

- ▶ diminuer le nombre de grandeurs nécessaires à la description d'un phénomène physique,
- ▶ minimiser le nombre de mesures nécessaires à la détermination d'une loi physique inconnue,
- ▶ étudier les solutions asymptotiques d'une loi physique en identifiant les termes prépondérants,
- ▶ étendre les résultats obtenus sur un modèle réduit (maquette) au dispositif de grandeurs réelles (prototype).

Les règles à respecter pour pouvoir transposer les résultats expérimentaux obtenus sur une maquette au système fluide à l'échelle réelle (prototype) sont formulées sous la forme de lois de similitude. La détermination de ces lois peut se faire suivant deux approches différentes :

- ▶ la méthode directe, basée sur l'exploitation des équations de la mécanique des fluides ;
- ▶ l'analyse dimensionnelle, basée sur le théorème des  $\pi$  de Vaschy-Buckingham.

### III. 2. Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est une méthodologie pour obtenir des relations physiques sans dimensions dans le but de minimiser l'étude expérimentale ou numérique. Elle permet de vérifier l'homogénéité d'une formule physique à travers ses équations aux dimensions, c'est-à-dire la décomposition des grandeurs physiques dont qu'elle dépend en un produit de grandeurs de base irréductibles les unes aux autres.

#### III. 2. 1. Dimension d'une grandeur

En physique, il est d'usage courant de faire jouer un rôle privilégié à des grandeurs, que l'on nomme fondamentales, et de définir pour elles des unités de mesures. L'analyse dimensionnelle est conduite par identification de ces grandeurs fondamentales que sont la longueur, le temps, la masse, la température, l'intensité électrique, l'intensité lumineuse et quantité de matière. Outre ces grandeurs fondamentales, les grandeurs "secondaires", listées dans le tableau ci-dessous, sont usuellement utilisées en mécanique des fluides.

La relation définissant une unité secondaire en fonction des unités fondamentales est appelée dimension de cette unité. Ces dimensions d'unités secondaires résultent de

certaines définitions ou lois physiques. Le principe d'invariance dimensionnelle stipule que les relations entre les grandeurs physiques restent invariantes dans un changement de système d'unités. Le système international d'unités S.I. définit sept unités fondamentales, associées aux sept grandeurs de base rencontrées précédemment.

**Tableau III. 1 :** Les dimensions et les unités SI de certaines grandeurs physiques courantes en mécanique des fluides

| Grandeur               | Symbole         | Dimension                   | Unité S.I.         | Nature       |
|------------------------|-----------------|-----------------------------|--------------------|--------------|
| Longueur               | $l, d$          | $[L]$                       | m                  | fondamentale |
| Masse                  | $m$             | $[M]$                       | kg                 |              |
| Temps                  | $t$             | $[T]$                       | s                  |              |
| Température            | $\theta$        | $[\theta]$                  | K                  |              |
| Intensité électrique   | $I$             | $[A]$                       | A                  |              |
| Intensité lumineuse    | $J$             | $[J]$                       | cd                 |              |
| Quantité de matière    | $n$             | $[N]$                       | mol                |              |
| Vitesse linéaire       | $u, v$          | $[L.T^{-1}]$                | $m.s^{-1}$         | cinématique  |
| Vitesse de rotation    | $\omega$        | $[T^{-1}]$                  | $s^{-1}$           |              |
| Accélération           | $\gamma$        | $[L.T^{-2}]$                | $m.s^{-2}$         |              |
| Masse volumique        | $\rho$          | $[M.L^{-3}]$                | $kg.m^{-3}$        |              |
| Débit volumique        | $q_v$           | $[L^3.T^{-1}]$              | $m^3.s^{-1}$       |              |
| Viscosité cinématique  | $\nu$           | $[L^2.T^{-1}]$              | $m^2.s^{-1}$       |              |
| Viscosité dynamique    | $\mu$           | $[M.L^{-1}.T^{-1}]$         | Poiseuille, (PI)   | dynamique    |
| Tension capillaire     | $\sigma$        | $[M.T^{-2}]$                | $kg. s^{-2}$       |              |
| Force                  | $F$             | $[M.L.T^{-2}]$              | Newton (N)         |              |
| Couple                 | $C$             | $[M.L^2.T^{-2}]$            | (m.N)              |              |
| Pression, contrainte   | $p, \tau$       | $[M.L^{-1}.T^{-1}]$         | Pascal (Pa)        |              |
| Puissance mécanique    | $\mathcal{P}_m$ | $[M.L^2.T^{-3}]$            | Watt (W)           |              |
| Puissance thermique    | $\mathcal{P}_t$ | $[M.L^2.T^{-3}]$            | W                  | thermique    |
| Quantité de chaleur    | $Q$             | $[M.L^2.T^{-2}]$            | J                  |              |
| Conductivité thermique | $\lambda$       | $[M.L.T^{-3}. \theta^{-1}]$ | $W.m^{-1}.K$       |              |
| Diffusivité thermique  | $a$             | $[L^2.T^{-1}]$              | $m^2.s$            |              |
| Capacité calorifique   | $C_p, C_v$      | $[L^2.T^{-2}. \theta^{-1}]$ | $J.kg^{-1}.K^{-1}$ |              |

### III. 2. 2. Homogénéité dimensionnelle

Une équation, décrivant une loi physique, est dimensionnellement homogène si chacun des termes qui la composent a les mêmes dimensions.

#### Exemple 1

L'équation de Bernoulli

$$H = z + \frac{p}{\rho} + \frac{p^2}{2g} \quad (\text{III. 1})$$

est dimensionnellement homogène. En effet

$$H = [L] + \frac{[ML^{-1}T^{-2}]}{[ML^{-2}T^{-2}]} + \frac{[LT^{-1}]^2}{[LT^{-2}]} = [L] + [L] + [L] \quad (\text{III. 2})$$

### III. 2. 3. Adimensionnalisation

L'analyse dimensionnelle permet d'acquérir à des relations physiques adimensionnelles afin de diminuer le nombre des variables et minimiser ainsi les mesures expérimentales.

#### Exemple 2

Comme exemple de l'analyse dimensionnelle, on regarde l'expression donnant la position  $z$  à un temps  $t$  d'un objet soumis à l'accélération gravitationnelle  $g$ . La formule tient compte de la position et de la vitesse initiale de l'objet,  $z_0$  et  $V_0$ , respectivement.

La formule à l'étude est

$$z = z_0 + V_0 t + \frac{1}{2g} t^2 \quad (\text{III. 3})$$

est dimensionnellement homogène

$$\underbrace{z}_L = \underbrace{z_0}_L + \underbrace{V_0 t}_{\frac{L}{T} T} + \underbrace{(1/2g)t^2}_{\frac{L}{T^2} T^2} \quad (\text{III. 4})$$

Montrons les étapes à suivre pour écrire cette équation sous une forme adimensionnelle. Afin de faire l'analyse, on doit spécifier toutes les grandeurs physiques et leur dimensions. A partir de l'équation (III.4), on identifie trois quantités dont les dimensions fondamentales sont deux : la longueur  $L$  et le temps  $T$ .

L'équation (III.4) comprend cinq variables et elle peut être écrite symboliquement  $z = F(z_0, V_0, t, g)$ . La variable « d'intérêt » est  $z$  et parmi les restantes on peut distinguer celles qui ont un impact sur l'évolution de la variable d'intérêt.

De manière intuitive on peut dire qu'il s'agit du temps  $t$  et de l'accélération  $g$ . Nous avons ainsi trois variables unies  $(z, t, g)$ . Les variables restantes  $(z_0, V_0)$  agissent comme des niveaux référence (conditions initiales et au frontières).

On distingue les paramètres de références nécessaires pour l'adimensionnalisation. Pour la dimension de  $L$ , on choisit paramètre  $z_0$ . En faisant une mise à échelle de l'équation (III.4) par le paramètre, on obtient

$$z/z_0 = 1 + (V_0/z_0)t + \frac{1}{2gz_0}t^2 \quad (\text{III. 5})$$

On note que le second terme de droite mène à un facteur d'échelle temporel  $z_0/V_0$ , d'où on tire deux variables sans dimension

$$z^* = z/z_0, \quad t^* = t/(z_0/V_0) \quad (\text{III. 6})$$

Il est clair que le troisième terme peut s'écrire  $1/2 (gz_0/V_0^2)t^{*2}$ , et l'équation (III.3) devient

$$z^* = 1 + t^* + 1/2 \left( \frac{gz_0}{V_0^2} \right) t^{*2} \quad (\text{III. 7})$$

En fait le terme  $gz_0/V_0^2$  est une autre variable sans dimension qu'on peut l'associer à la gravitation  $g = \frac{g}{V_0^2/z_0}$ , ce qui permet d'écrire l'équation adimensionnelle

$$z^* = 1 + t^* + \frac{1}{2} g^* t^{*2} \quad (\text{III. 8})$$

Ainsi l'équation adimensionnelle correspondante à  $z = F(z_0, V_0, t, g)$  est la fonction  $z^* = f(t^*, g^*)$ . On constate que dans l'équation dimensionnelle interviennent cinq paramètres tandis que dans l'équation adimensionnelle on trouve seulement trois. On vient de découvrir le théorème de Vaschy-Buckingham.

### III. 3. Théorème $\pi$ de Vaschy-Buckingham

#### III. 3. 1. Enoncé

Ce théorème de l'analyse dimensionnelle permet de mettre en évidence les produits sans dimension qui règlent la similitude, produits qui par définition ne changent pas lorsque l'on change les échelles des unités fondamentales. Il s'énonce de la manière suivante :

« Toute relation dimensionnellement homogène entre  $n$  grandeurs physiques  $f(A, B, C, \dots, X) = 0$  entraîne l'existence d'une autre relation  $h(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-N}) = 0$  entre  $n - N$  grandeurs sans dimension qui sont des produits distincts de puissances des grandeurs  $A, B, C, \dots, X$  de la forme  $A^\alpha B^\beta \dots X^\varpi$ . »

#### III. 3. 2. Démonstration

Soit une relation, dimensionnellement homogène entre  $n$  grandeurs, traduisant une loi physique

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \quad (\text{III. 9})$$

Chaque variable  $a_j$  est dimensionnellement homogène à un produit de monômes des unités de base

$$[a_j] = D_1^{\alpha_j} D_2^{\beta_j} \dots D_N^{\varpi_j} \quad (\text{III. 10})$$

En mécanique des fluides, on utilise le système Masse, Longueur et Temps (MLT). Ainsi, on pose  $p = 3$  et  $D_1 = L, D_2 = M, D_3 = T$  comme unités de base  $[a] = M^\alpha L^\beta T^\gamma$ , ce qui donne pour les  $n$  variables

$$[a_1] = M^{\alpha_1} L^{\beta_1} T^{\gamma_1}, [a_2] = M^{\alpha_2} L^{\beta_2} T^{\gamma_2}, \dots, [a_n] = M^{\alpha_n} L^{\beta_n} T^{\gamma_n} \quad (\text{III. 11})$$

avec  $\alpha_j, \beta_j$ , et  $\gamma_j$  sont déterminés à l'avance en examinant la dimension des variables. Il est possible de former des nombres sans dimension en faisant des produits de monômes

$$\Pi_i = a_1^{k_1^i} a_2^{k_2^i} \dots a_n^{k_n^i} \quad (\text{III. 12})$$

La dimension de  $\Pi_j$  est

$$[\Pi_j] = (D_1^{\alpha_1} D_2^{\beta_1} \dots D_n^{\gamma_1})^{k_1^j} (D_1^{\alpha_2} D_2^{\beta_2} \dots D_n^{\gamma_2})^{k_2^j} \dots (D_1^{\alpha_3} D_2^{\beta_3} \dots D_n^{\gamma_3})^{k_n^j} \quad (\text{III. 13})$$

Or on sait que  $[\Pi_j] = 0$ . Cela mène à résoudre un système d'équations linéaires de  $p=3$  équations et  $n$  inconnues  $k_i^j$  ( $1 \leq i \leq n$ )

$$\begin{cases} \alpha_1 k_1^j + \alpha_2 k_2^j + \dots + \alpha_n k_n^j = 0 \\ \beta_1 k_1^j + \beta_2 k_2^j + \dots + \beta_n k_n^j = 0 \\ \gamma_1 k_1^j + \gamma_2 k_2^j + \dots + \gamma_n k_n^j = 0 \end{cases} \quad (\text{III. 14})$$

### III. 3. 3. Méthodologie

1. Isoler les quantités physiques du problème donné et leur nombre  $n$  ;
2. écrire les dimensions de chaque variable dans le système de base (en général,  $p = 3$  unités de base sont nécessaires en mécanique) ;
3. déterminer le rang  $r$  de la matrice dimensionnelle associée (on a souvent  $r = 2$  ou  $r = 3$ );
4. rechercher les  $n - r$  nombres sans dimension.

### III. 3. 4. Application du théorème $\pi$ : force de traînée $\vec{T}$

Afin d'illustrer ce théorème prenons comme exemple le calcul de la force de traînée  $\vec{T}$  exercée par un fluide incompressible sur un objet dans la direction parallèle à l'écoulement. On choisit comme géométrie le cas d'une plaque plane placée verticalement à l'écoulement.

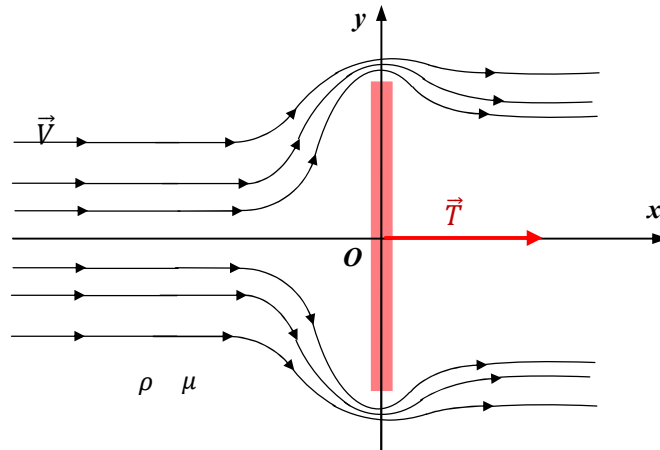


Figure III. 1 : force de traînée exercée par l'écoulement sur la plaque

1. Les variables du problème sont :

$$\begin{cases} T : \text{force de traînée} \\ h : \text{hauteur de la plaque} \\ l : \text{largeur de la plaque} \\ V : \text{vitesse moyenne de l'écoulement} \\ \mu : \text{viscosité du fluide} \\ \rho : \text{masse volumique du fluide} \end{cases}$$

dont leur nombre de grandeurs est donc  $n=6$ .

2. Equations aux dimensions de chacune des  $n$  variables

$$\begin{cases} [T] = MLT^{-2} \\ [V] = LT^{-1} \\ [h] = L \end{cases}, \begin{cases} [l] = L \\ [\mu] = ML^{-1}T^{-1} \\ [\rho] = ML^{-3} \end{cases} \quad (\text{III. 15})$$

d'où le nombre minimal des dimensions requis pour la description du problème est  $N = 3$ .

3. Le nombre de produits  $\pi$  sans dimensions caractérisant le problème est  $n - N = 3$ .

4. Choix de  $N = 3$  variables primaires dimensionnellement indépendantes :  $h, \rho, V$  (on ne peut pas choisir à la fois  $h$  et  $l$ ).

5. Formation des trois produits  $\pi$  en combinant les  $n - N = 3$  variables non primaires avec les  $N$  primaires.

$$\pi_1 = Th^{\alpha_1}\rho^{\beta_1}V^{\gamma_1}, \quad \pi_2 = lh^{\alpha_2}\rho^{\beta_2}V^{\gamma_2}, \quad \pi_3 = \mu h^{\alpha_3}\rho^{\beta_3}V^{\gamma_3} \quad (\text{III. 16})$$

Expression du produit  $\pi_1$  :

$$\begin{aligned} \pi_1 = Th^{\alpha_1}\rho^{\beta_1}V^{\gamma_1} &\Rightarrow M^0L^0T^0 = M^1L^1T^{-2}L^{\alpha_1}(M^1L^{-3})^{\beta_1}(L^1T^{-1})^{\gamma_1} \\ &= M^{1+\beta_1}L^{(1+\alpha_1-3\beta_1+\gamma_1)}T^{-2-\gamma_1} \end{aligned} \quad (\text{III. 17})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = -1 \\ \alpha_1 = -2 \\ \gamma_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \pi_1 = \frac{T}{\rho V^2 h^2} \quad (\text{III. 18})$$

Expression du produit  $\pi_2$  :

$$\begin{aligned} \pi_2 = lh^{\alpha_2}\rho^{\beta_2}V^{\gamma_2} &\Rightarrow M^0L^0T^0 = L^1L^{\alpha_2}(M^1L^{-3})^{\beta_2}(L^1T^{-1})^{\gamma_2} \\ &= M^{\beta_2}L^{(1+\alpha_2-3\beta_2+\gamma_2)}T^{-\gamma_2} \end{aligned} \quad (\text{III. 19})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \alpha_2 = -1 \\ \gamma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \pi_2 = \frac{l}{h} \quad (\text{III. 20})$$

Expression du produit  $\pi_3$  :

$$\begin{aligned} \pi_3 = \mu h^{\alpha_3}\rho^{\beta_3}V^{\gamma_3} &\Rightarrow M^0L^0T^0 = ML^{-1}T^{-1}L^{\alpha_3}(M^1L^{-3})^{\beta_3}(L^1T^{-1})^{\gamma_3} \\ &= M^{1+\beta_3}L^{(-1+\alpha_3-3\beta_3+\gamma_3)}T^{-1-\gamma_3} \end{aligned} \quad (\text{III. 21})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_3 = -1 \\ \alpha_3 = -1 \\ \gamma_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \pi_3 = \frac{\mu}{\rho V h} \quad (\text{III. 22})$$

6. Formuler la relation entre les trois produits  $\pi$  trouvés  $\pi_1 = \phi(\pi_2, \pi_3)$

$$\frac{T}{\rho V^2 h^2} = \phi\left(\frac{l}{h}, \frac{\mu}{\rho V h}\right) \Rightarrow T = \rho V^2 h^2 \phi\left(\frac{l}{h}, \frac{1}{Re}\right) \quad (\text{III. 23})$$

où  $l/h$  représente le facteur de forme de la plaque et  $1/Re$  représente la nature de l'écoulement.

### III. 3. 4. Illustration de l'intérêt de la méthode

L'un des intérêts essentiels de l'analyse dimensionnelle consiste à définir les règles qu'il faut respecter dans une étude d'un système fluide par similitude. Cette méthode de travail très utilisée en ingénierie permettant l'étude de problèmes sur la base d'expérimentation et de comparaison. L'étude se fait sur une maquette et par similitude les résultats sont extrapolés vers le modèle réel, appelé le prototype.

De l'exemple précédent, si  $T_1$  est la traînée mesurée sur la plaque de dimension  $l_1 \times h_1$  quand elle est soumise à un écoulement de vitesse  $V_1$ , alors

$$\frac{T_1}{\rho V_1^2 h_1^2} = \phi\left(\frac{l_1}{h_1}, \frac{1}{Re_1}\right), \quad Re_1 = \frac{\rho V_1 h_1}{\mu} \quad (\text{III. 24})$$

L'analyse dimensionnelle par le théorème de Buckingham permet d'en déduire la force de traînée pour une plaque de dimensions  $l_2 \times h_2$  telle que

$$\underbrace{\frac{l_1}{h_1} = \frac{l_2}{h_2}}_{\text{Similitude de forme}}, \quad \text{si: } V_2 = V_1 \underbrace{\frac{h_1}{h_2}}_{\text{facteur d'échelle}} \Leftrightarrow V_1 h_1 = V_2 h_2 \Leftrightarrow \underbrace{Re_1 = Re_2}_{\substack{\text{similitude} \\ \text{hydrodynamique}}} \quad (\text{III. 25})$$

et donc

$$\phi\left(\frac{l_1}{h_1}, \frac{1}{Re_1}\right) = \phi\left(\frac{l_2}{h_2}, \frac{1}{Re_2}\right) \Rightarrow T_2 = T_1 \frac{V_2^2 h_2^2}{V_1^2 h_1^2} \Rightarrow T_2 = T_1 \quad (\text{III. 26})$$

### Remarque

On prendra soin de définir des nombres sans dimension ayant une signification physique. A noter que ces nombres sans dimension peuvent être obtenus sans passer par le théorème  $\pi$  en examinant les équations du mouvement et en les rendant sans dimension.

## III. 4. Nombres adimensionnels

La méthode directe se base sur l'utilisation des équations régissant la mécanique des fluides. Le fait de mettre ces équations sous leurs formes adimensionnelles fait apparaître plusieurs nombres importants. Tout dépend de leurs rôles essentiels dans le phénomène étudié, certains nombres sont maintenus pour déterminer les caractéristiques du modèle réduit sur base du prototype.

### III. 4. 1. Nombre de Reynolds

Il est le plus connu en mécanique des fluides, il caractérise le rapport entre les contraintes liées à l'inertie et les contraintes visqueuses. Indiquant la nature de l'écoulement, son expression est

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (\text{III. 27})$$

qui représente aussi un rapport entre le transfert par convection et le transfert par diffusion de la quantité de mouvement dans l'écoulement.

### III. 4. 2. Nombre de Froude

Ce nombre représente le rapport des contraintes liées à l'inertie aux contraintes des forces de volume (force de pesanteur)

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gl}} \quad (\text{III. 28})$$

Son utilité remarquable pour les écoulements à surface libre ou en présence de deux fluides non miscibles. Comme la pesanteur est le facteur responsable de la forme de la surface libre, plus le nombre de Froude est grand, moins la surface libre a d'effet sur l'écoulement, et vice-vers-ça.

### III. 4. 3. Nombre de Strouel

Il caractérise le rapport du temps d'advection et du temps caractéristique de non stationnarité du mouvement, notamment tourbillonnaire ( $f$  est la fréquence d'émission des tourbillons). Son expression est

$$Str = \frac{fL}{U} \quad (\text{III. 29})$$

Si le nombre de Strouhal  $Str$  est nettement inférieur à l'unité, l'écoulement est dit quasi-stationnaire. Ce nombre représente aussi le rapport entre le rapport entre les forces d'inertie locale et les forces d'inertie convectives.

### III. 4. 4. Nombre de d'Euler

Le nombre d'Euler représente le rapport entre les forces de pression et les forces liées à l'inertie

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho U^2} \quad (\text{III. 30})$$

Il est utile dans la caractérisation des pertes dans un fluide en mouvement. Il peut être ainsi dérivé dans d'autres formulations telles que le coefficient de pression ( $C_p$ ), (forces de traînée et de portance)

$$C_p = 2Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (\text{III. 31})$$

### III. 4. 5. Nombre de Mach

Ce nombre caractérise le rapport entre les forces d'inertie et les forces de compressibilité du fluide durant son écoulement

$$Ma = \frac{U}{C} \quad (\text{III. 32})$$

où  $C$  est la vitesse du son. Il est beaucoup plus utile dans les écoulements des fluides compressibles.

## III. 5. Analyse dimensionnelle des équations de Navier-Stokes

Dans n'importe quelle étude d'ingénierie, il convient d'analyser les outils à notre disposition pour créer les équations nécessaires à la modélisation de phénomènes physiques. La méthode directe basée sur l'exploitation des équations régissant le domaine du phénomène étudié, dans notre cas, les équations de Navier-Stokes.

Partons de la composante suivant ( $Ox$ ) de l'équation vectorielle de Navier-Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \rho g_x \quad (\text{III. 33})$$

L'évaluation des différents coefficients sans dimension relatifs à l'écoulement va permettre de simplifier les équations à résoudre. Pour cela, on choisit les différentes grandeurs caractéristiques du problème :

- ▶ une longueur caractéristique :  $L$  (exemple : dimension d'un corps solide, diamètre d'une conduite, ...)
- ▶ une vitesse caractéristique :  $U$  (exemple : la vitesse du fluide, la vitesse du corps solide, ...)
- ▶ un temps caractéristique :  $\tau$



- une pression caractéristique :  $p_0$

On introduit les variables sans dimension

$$\begin{cases} u^* = \frac{u}{U} \\ v^* = \frac{v}{U} \\ w^* = \frac{w}{U} \end{cases}, \quad \begin{cases} x^* = \frac{x}{L} \\ y^* = \frac{y}{L} \\ z^* = \frac{z}{L} \end{cases}, \quad \begin{cases} p^* = \frac{p}{p_0} \\ t^* = \frac{t}{\tau} \end{cases} \quad (\text{III. 34})$$

La forme adimensionnelle des opérateurs de dérivation est

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x^*} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial y^*} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial z^*} \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \end{cases}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial t^*} \quad (\text{III. 35})$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{\rho U}{\tau} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\rho U^2}{L} \left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) \\ = - \frac{p_0}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu U}{L^2} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) - \rho g_x \end{aligned} \quad (\text{III. 36})$$

En divisant toute l'équation par  $\frac{\rho U^2}{L}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{L}{U\tau} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \\ = - \frac{p_0}{\rho U^2} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho U L} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) - \frac{g_x L}{U^2} \end{aligned} \quad (\text{III. 37})$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} St \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \\ = -Eu \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) - \frac{1}{Fr^2} \end{aligned} \quad (\text{III. 38})$$

De la projection suivant l'axe ( $Oy$ ), on obtient

$$\begin{aligned} St \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \\ = -Eu \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \right) - \frac{1}{Fr^2} \end{aligned} \quad (\text{III. 39})$$

Ce qui peut s'interpréter comme suit

- Si  $St$  est très faible : on peut négliger la dérivée instantanée et l'écoulement pourra être considéré stationnaire.
- Si  $Eu$  est très faible : on peut négliger le gradient de pression.
- Si  $Re$  est très grand : on peut négliger la viscosité du fluide et l'assimiler à un fluide parfait.
- Si  $Fr$  est très grand : on peut négliger les effets de la pesanteur.

### **III. 6. Exercices corrigés**