

Série N 1

Exercice 01 :

On considère l'écoulement défini en variables de Lagrange par

$$x = a + \alpha t, \quad y = b + \beta t^2, \quad z = c + \gamma t^3 + \alpha t$$

1. Donner la vitesse de cet écoulement en variables d'Euler.
2. Déterminer l'accélération particulaire de l'écoulement.

Exercice 02 :

Soit l'écoulement défini dans la description Eulérienne par le champ de vitesse suivant

$$u = 3t, \quad v = xz, \quad w = ty^2$$

1. Déterminer l'accélération particulaire de l'écoulement.
2. Déterminer à la position $M(1, 2, 0)$ et à l'instant $t=3s$ l'accélération locale et l'accélération convective.

Exercice 03 :

La distribution de vitesse pour un écoulement plan non stationnaire est donnée par

$$u = u_0 + a(t - t_0), \quad v = v_0$$

1. L'écoulement est-il incompressible?
2. Etablir, à un instant t , l'équation des lignes de courant.
3. Comparer ces lignes de courant à la trajectoire d'une particule fluide dans ce champ de vitesses.

Exercice 04 :

Un écoulement incompressible et stationnaire du fluide se produit dans une tuyère comprise en longueur entre $x=0$ et $x=L$ et limitée par deux surfaces d'équation $y(x) = \mp \frac{L^2}{L+x}$. L'écoulement est invariant suivant l'axe z (tuyère de largeur D très grande, dans l'axe perpendiculaire à la figure).

Le fluide loin de la tuyère est animée d'une vitesse $\vec{V} = U\vec{i}$. On cherche le champ des vitesses dans la tuyère de la forme $\vec{V} = u(x)\vec{i} + v(x, y)\vec{j}$ dans la tuyère.

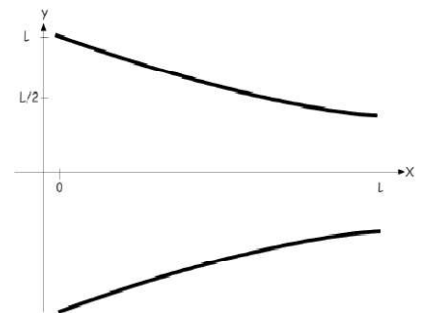


Fig. 1

1. Définir le débit volumique en un x donné.
2. Exprimer la conservation du débit volumique. En déduire $u(x)$.
3. Exprimer la condition d'incompressibilité. Sachant que $v(x, 0) = 0$, en déduire $v(x, y)$.
4. Déterminer l'équation des lignes de courant. Vérifier la vorticité de l'écoulement.
5. Déterminer le champ des accélérations.

Série N 2

Exercice 01:

Soit l'écoulement plan et stationnaire d'un fluide incompressible, défini par le champ de vitesse

$$u = A(x^2 - y^2), \quad v = 4xy$$

1. Déterminer la valeur de la constante A .
2. Trouver la fonction de courant de l'écoulement ψ .
3. Démontrer que l'écoulement est irrotationnel et déterminer le potentiel de vitesse φ .

Exercice 02 :

Un écoulement bidimensionnel est constitué en ajoutant à une source à l'origine du système, un écoulement à potentiel de vitesse défini par

$$\varphi(r, \theta) = r^2 \cos(2\theta)$$

1. Déterminer le champ de vitesse correspondant.
2. Localiser les points d'arrêt dans la partie supérieure de l'écoulement ($0 < \theta < \pi$).

Exercice 03 :

Soit l'écoulement bidimensionnel irrotationnel et permanent d'un fluide incompressible autour d'un cylindre qui représente la superposition d'un doublet et un écoulement uniforme.

1. Déterminer la fonction de courant et le potentiel de vitesse de l'écoulement résultant.
2. Donner l'expression du champ de vitesse.
3. Déterminer les points de stagnation.
4. Caractériser la distribution de pression sur la surface du cylindre.
5. Déterminer la force exercée par le fluide sur le cylindre de longueur b .

Exercice 04 :

Une tornade est un écoulement de fluide présentant une symétrie de révolution autour d'un axe (Oz). Le champ des vitesses associé est de la forme suivante

$$\begin{cases} r < a : & u_r = 0, \quad u_\theta = \Omega r, \quad w = 0 \\ r > a : & u_r = 0, \quad u_\theta = \frac{\Omega a^2}{r}, \quad w = 0 \end{cases}$$

1. Est-ce que l'écoulement est incompressible?
2. Calculer le rotationnel de l'écoulement en tout point de la tornade.
3. Calculer l'accélération d'une particule fluide dans ce champ de tornade.
4. Calculer la circulation du vecteur de vitesse le long d'une ligne de courant.

Exercice 05 :

L'écoulement bidimensionnel incompressible d'un fluide non visqueux à proximité d'un coin d'angle $\pi/2$ est décrit par la fonction de courant

$$\psi(r, \theta) = 2r^2 \sin(2\theta)$$

1. Déterminer le champ de vitesse.
2. Déterminer le potentiel de vitesse φ et l'équation générale des lignes équipotentiels.
3. Si la pression au point ($r = 1, \theta = 0$) est $3 \cdot 10^4 \text{ Pa}$, qu'elle est la pression au point ($r = 1/2, \theta = \pi/2$)? On donne $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Série N 3

Exercice 1

Soit un écoulement dont le champ de vitesse est solénoïdal à tout instant : $\forall t, \operatorname{div} \vec{V} = 0$.

1. Montrer que le débit volumique se conserve à travers toute section droite d'un tube de courant.
2. A quelle conclusion conduirait l'hypothèse : $\forall t, \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$?

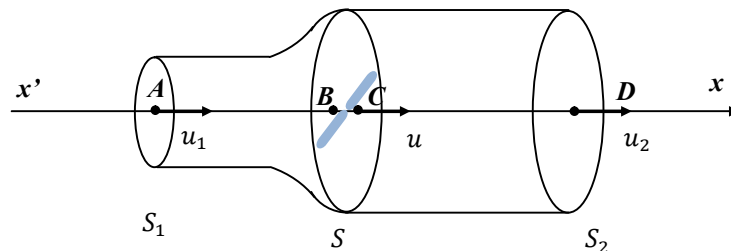
Exercice 2

De l'eau circule dans une conduite horizontale, de section constante, présentant un coude d'angle 90° continue dans la direction verticale. On suppose que le régime est stationnaire et on néglige l'effet de la pesanteur.

1. Déterminer la force $\vec{F}$ appliquée par le fluide sur la canalisation.
2. Calculer le module de $\vec{F}$ ainsi que ses composantes pour les données : $D=9\text{cm}$, $V_e=0,5\text{m/s}$ et $p_e=29\,616,78\text{Pa}$.

Exercice 3

Une hélice est mise en rotation autour d'un axe (xx') par un liquide incompressible de masse volumique ρ , en mouvement permanent et irrotationnel.



On admet que, dans une section droite $S(x)$, la pression $p(x)$ et la vitesse $u(x)$ du fluide sont uniformes. De plus, au niveau de l'hélice, si la vitesse $u(x)$ est continue, la pression $p(x)$ subit une discontinuité.

1. Calculer la discontinuité de pression au niveau de l'hélice.
2. Déterminer la force exercée par le fluide sur l'hélice, puis la puissance P_H transmise à l'hélice.
3. Calculer la valeur maximale du rendement de l'hélice.

Exercice 4

Un jet d'eau est envoyé sur une plaque plane avec vitesse $\vec{v}$, un débit massique q_m et un angle d'incidence α . Les grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $\vec{k}$ étant normal à la plaque et $\vec{i}$ dans le plan d'incidence défini par $\vec{k}$ et la vitesse $\vec{v}$ du jet incident. Nous admettons les hypothèses suivantes :

- La viscosité de l'eau est négligée ; il n'y a donc aucune perte d'énergie mécanique.
 - Après l'impact sur la plaque, la vitesse de l'eau reste tangente à celle-ci.
 - Le jet et la plaque sont soumis à la pression atmosphérique.
 - L'influence de la pesanteur est négligeable.
 - Le jet incident se sépare en deux jets unidim, dont les vitesses sont dans le plan d'incidence.
1. Déterminer $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des jets émergents et leurs débits massiques q_{m1} , q_{m2} .
 2. Déterminer la force de poussée. (Nous pouvons la définir comme opposée à la force supplémentaire $\vec{F}_0$ qui est appliquée pour maintenir la plaque immobile.