الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
جامعة عبد الحميد مهري
قسنطينة -2-

محاضرات في الإحصاء 1

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى ل م د
جذع مشترك علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير

من إعداد الدكتورة:
مخبي أحلام

السنة الجامعية:
2021-2020

مقدمة

يعتبر علم الإحصاء من أقدم العلوم ويمثل في الوقت الحالي واحدا من أهم العلوم الحديثة التي تلعب دورا حيويا في كثير من الدراسات المختلفة حيث ظهر في بادئ الأمر مع حاجة الإنسان الأولى للتعامل مع القيم والأعداد لتيسير حياته اليومية، ثم تطور مع التطور الهائل في العلوم كافة فصار طريقة تحليل واستقراء للبيانات وأضحى أخيرا بمثابة مجموعة من النظريات العلمية ذات الأساس النظري الإحصائي مما جعله العلم الأكثر تداخلا مع العلوم الأخرى المختلفة.

تشكل هذه المطبوعة مقدمة لمقياس الإحصاء الوصفي (إحصاء1) والذي يهتم بوصف طرق جمع البيانات الرقمية، ومن ثم تنظيمها وترتيبها وعرضها وتحليلها بهدف الوصول إلى نتائج معينة لتوضيح ظاهرة أو حالة ما، موجهة إلى طلبة السنة الأولى جذع مشترك لكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير وهي عبارة عن محاضرات وتمارين خاصة بالمقياس حسب البرنامج الوزاري مقسمة إلى ستة فصول كالتالي:

الفصل الأول: علم الإحصاء (مفاهيم أولية).

الفصل الثاني: البيانات الإحصائية

الفصل الثالث: التوزيعات التكرارية.

الفصل الرابع: مقاييس النزعة المركزية.

الفصل الخامس: مقاييس التشتت.

الفصل السادس: مقاييس الشكل

قدمت هذه المطبوعة بطريقة مبسطة وواضحة مدعمة بأمثلة وتمارين حتى يتسنى للطلبة الإلمام بجميع جوانب المقياس واستيعاب مضمونه.

الفصل الأول

علم الإحصاء (مفاهيم أولية)

1. مفهوم كلمة إحصاء:

يختلف مفهوم كلمة إحصاء عند العامة، فهي تعني البيانات عند البعض، بينما يتم استخدامها عند البعض الآخر للدلالة على عملية جمع البيانات وعملية حفظها، كما أنه هناك من يفهم الإحصاء على أنه العلم الذي يقوم بجمع ووصف البيانات بهدف إعادة تشكيلها بطريقة تسهّل قراءاتها ومن ثم يتم تهيئتها للتمكن من اتخاذ القرار المتعلق بالموضوع محل الدراسة.

وكلمة Statistiques بالفرنسية أو Statisticsبالإنجليزية أو الكلمة الإيطالية Statistaأو الكلمة الألمانية Statistikكلها مشتقة من الكلمة اللاتينية Status والتي تعني الدولة السياسية Political Stateأو معلومات الدولة وظهرت لأول مرة عام 1749.

ومع تطور مفهوم الدولة تطورت طبيعة البيانات التي تحتاجها الدولة آنذاك، وأطلق على العلم الذي يبحث طرق جمع البيانات المتصلة بأمور الدولة «علم حساب الدولة» ويعود الفضل في ظهور الإحصاء كنظرية إلى العالم وليام بيتي (1623-1687)William Petty حيث كان أوّل من أوجد اتجاها يقضي بدراسة المعلومات العددية عن الظواهر الاجتماعية والاقتصادية بغية معرفة اتجاه تطورها الطبيعي، وأوّل من اعتمد تقنية المضاعف (multiplicateur) التي تهدف إلى تقدير حجم المجتمع[1].

ظهرت أفكاره الإحصائية في كتابه الذي يحمل عنوان:الحساب السياسي Political Arithmeticوأطلق عليه ماركس لقب "أبو الاقتصاد السياسي البرجوازي".

2. التعريف بعلم الإحصاء:

يمثل علم الإحصاء الأداة العلمية التي يتم من خلالها جمع البيانات ومن ثم وصفها باستخدام الجداول والرسوم البيانية وذلك بهدف إبراز المعلومة المحتوات في البيانات، حيث يصعب قراءة هذه الأخيرة من خلال

[1]- السعدي رجال، الاحصاء الوصفي، مؤسسة الرجاء للطباعة والنشر، 2013، قسنطينة، الجزائر، ص10.

المعطيات مباشرة وبذلك فهو العلم الذي يهدف إلى التجميع المنهجي للوقائع بأسلوب منطقي منتظم موحد يعالج الموضوعات والخصائص التي يمكن أن يعبر عنها بصورة رقمية.

يتم الاستفادة من علم الإحصاء في مجالات متنوعة تشمل ميادين عديدة كالصناعة والزراعة والطب والبحوث وغيرها من مجالات الإدارة والأعمال، ويتم تطبيق الأساليب الإحصائية.

1.2. تطور علم الإحصاء:

تطور علم الإحصاء عبر سنوات طويلة بفضل عدد كبير من العلماء ولازم ذلك التطور بالموازاة التطور في نظرية الاحتمالات، ففي القرن الثامن عشر وبعد تطور الرياضيات، دعا ذلك إلى تطور الإحصاء على أيدي الرياضيين، مما أدّى إلى نشوء النظريات والطرق العلمية التي مازالت لحدّ اليوم تعتبر من أساسيات علم الإحصاء، ليصبح بعد ذلك من العلوم الرئيسية التي تدرّس بالجامعات، ويرجع الفضل في ذلك إلى كثير من علماء الإحصاء وأوّلهم كما تمت الإشارة إليه سابقا وليام بيتي الذي أدخل الإحصاء كمادة علمية تدرّس لأول مرّة في الجامعات بألمانيا سنة 1748، وبرنويليBernouilli(1654-1708) الذي أبرز أهمية الصفة ثنائية الأنماط، ولابلاسLaplace (1749-1827) الذي اكتشف قانون التوزيع الطبيعي وقوسGauss (1977-1855) الذي بلغ المعيارية في التوزيع الطبيعي وكارل بيرسون Pearson Karl(1857-1936) وستودنتStudent(1876-1937) الذي وضع أسس تحليل التباين[1]، كما قدم سبيرمانSpearman (1863-1945) مساهمات فعالة في دراسة الارتباط ساهم أيضا كل من يولYuleوكندالKendalوفيشرFisherوياتYates في ظهور المفهوم الحديث للإحصاء وبروز علم الاحتمالات الذي أعطى له بعدا جديدا دعمت استخدامه وسائل المعالجة العصرية والبرمجية الحديثة.

2.2. تصنيف علم الإحصاء:

مع تطور علم الإحصاء ظهرت عدة فروع منها الإحصاء التطبيقي، نظرية الاحتمالات، نظرية التقدير، نظرية العيّنات وغيرها، ويمكن جمعها ضمن صنفين رئيسيين هما:

[1]- السعدي رجال، مرجع سابق، ص10.

1.2.2. الإحصاء الوصفي (Descriptive Statistics):

وهو الإحصاء الذي يهتم بجمع البيانات وتبويبها وعرضها ووصفها ثم إجراء الحسابات اللازمة للوصول إلى المقاييس المختلفة والتي تبرز الخصائص الأساسية وتتمثل هذه المقاييس في مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت ومقاييس الشكل.

يهدف الإحصاء الوصفي إلى تقدير معالم المجتمع الإحصائي للوصول إلى استنتاجات.

2.2.2. الإحصاء الاستدلالي (Inferential Statistics):

وهو الإحصاء الذي يهتم بتحليل البيانات واستخدام النتائج ثم تفسيرها واستعمالها لاتخاذ القرارات في ظل عدم التأكد أي اتخاذ أفضل قرار ممكن عندما تكون المعلومات المتحصل عليها غير كافية لذلك يطلق عليه البعض اسم "علم القرارات"، ويبدأ حين ينتهي الإحصاء الوصفي حيث يمكن الاستدلال عن معالم المجتمع الإحصائي بطرق مختلفة، ومن تطبيقاته التقدير والاختبارات والتنبؤ وهذا باستخدام النتائج أو المشاهدات السابقة لتجربة ما في تقدير قيم المشاهدات التي قد تحدث مستقبلا[1].

3. أهمية دراسة الإحصاء والفئات المهتمة به:

صار لعلم الإحصاء ضرورة كبيرة في حياتنا الحديثة التي اتسمت بالتطور والتحديث وهو في حقيقة الأمر وسيلة وليست غاية وأصبح يحتل أهمية بالغة في الأبحاث العلمية الحديثة حيث لا يخلو أي بحث من دراسة تحليلية إحصائية تنتهي إلى إبراز اتجاهات الظاهرة المدروسة وعلاقتها بالظواهر الأخرى، كما يساعدنا في اكتشاف نماذج في البيانات وفي التخطيط وعمل المسح الإحصائي إضافة إلى كيفية استخدام نتائج البحث الإحصائي بحيث تستخدم في:

أ. **التنبؤ**: حيث يتم فيه استخدام النتائج للاستدلال الإحصائي والتي تدلّ على سلوك الظاهرة في الماضي ومعرفة ما يمكن أن يحدث في الحاضر والمستقبل، وهناك أساليب وطرق إحصائية عديدة تستخدم للتنبؤ مثل أسلوب الاتجاه العام وهو عبارة عن معادلة رياضية يتم فيها تقدير بيانات العينة.

[1]– صياغ أحمد رمزي، محاضرات في الاحصاء الوصفي، احصاء 1، مطبوعة موجهة لطلبة السنة الاولى جذع مشترك، جامعة قاصدي مرباح، ورقلة، 2015، ص4.

ب. اتخاذ القرار: إن أي دراسة علمية هادفة تنتهي باتخاذ قرارات صالحة للعمل بها وهذا ليس بالأمر السهل إلاّ أن الأسلوب الإحصائي وما يحمله من قوانين ونظريات إحصائية متطورة قد ساهم بقدر كبير في اتخاذ القرارات بدرجة من الثقة العالية وبنسب خطأ عند حدودها الدنيا.

ج. التحقق: حيث يتم التأكد من صحة أو عدم صحة فرضية معينة.

د. الرقابة: تتم على مدى الجودة بالإضافة إلى الرقابة الكمية فيها، لذلك أصبح الإحصاء في الزمن الحاضر يستعمل لتحليل المشكلات موضوعيا ولخدمة العاملين في شتى مجالات المعرفة عن طريق تزويدهم بأدوات وأساليب تساعدهم على فهم أفضل للظاهرة المدروسة يستطيعون من خلالها الوصول لأنسب قرار والذي يساعدهم في الرقابة والتنبؤ للمستقبل والتخطيط له، وأصبح يطبق في مختلف العلوم الطبية والهندسية والطبيعية والاقتصادية والاجتماعية والإدارية وغيرها، وعليه فليس هنالك مجال من مجالات الحياة إلا ويخدمه الإحصاء.

4. مجالات استخدام الإحصاء:

يلتقي علم الإحصاء مع العلوم الأخرى في نقاط مشتركة، ويمتد مجال تطبيق هذا العلم ليشمل الرياضيات والاقتصاد والبيولوجيا وعلم النفس وعلم الاجتماع والبحوث الزراعية والصناعية...الخ، نستعرض فيما يلي بعض المجالات مما سبق:

1.4. الإحصاء والاقتصاد:

لقد كان للإحصاء الدور الرئيسي في تطور علم الاقتصاد، وأصبحت الدراسات الإحصائية التطبيقية مؤشرا هاما ما يعتمد في تحليل وتركيب النظريات الاقتصادية واكتشاف مدى ملائمتها للواقع[1]، فعلى سبيل المثال لدراسة مدة تطور النظريات والقوانين والظواهر الاقتصادية في الاقتصاد السياسي ومدى انطباقها على الواقع فلابدّ من جمع المعلومات الإحصائية المتعلقة بها وتحليلها.

وفي المجال التجاري تستخدم الطرق الإحصائية في المشروعات التجارية سواء عند المفاضلة أو في حالة عدم التأكد، كما تستخدم في بحوث التسويق والإنتاج والتخزين وأثر الواردات على الأسواق المحلية وعلى المنتوج الوطني ودور الصادرات في تمويل المشاريع بالعملة الأجنبية.

[1]- السعدي رجال، مرجع سابق، ص11.

كما قدمت النظرية الإحصائية العديد من احتياجات وأدوات العمل للاقتصاد القياسي، من حيث العديد من المقاييس وطرق قياس أثر المتغيرات المختلفة المؤثرة في المشكلة الاقتصادية التي تعد موضع دراسة بكل دقة.

إلى جانب استخدام طرق القياس الإحصائي في تلخيص العديد من الظواهر الاقتصادية من أثر بعض المتغيرات والتنبؤ بما يمكن أن تكون عليه في المستقبل.

2.4. الإحصاء وعلم النفس:

كان علم النفس أسبق العلوم الإنسانية والاجتماعية في الاستفادة الهائلة من تكنولوجيا الإحصاء، فمنذ القرن التاسع عشر ومع ظهور المحاولات المبكرة التي ولد في رحابها علم النفس التجريبي كان للإحصاء دورا واضحا. يستخدم علماء النفس الأدوات والأساليب الإحصائية أكثر من غيرهم في القياس النفسي، ويعد علم النفس التجريبي وعلم النفس الإكلينيكي وعلم نفس الفروق الفردية من المجالات التي تعتمد اعتمادا جوهريا على المنهج الإحصائي في تناولها لموضوعات الدراسة ووضع عالم النفس الإنجليزي جالتون Galton (1822-1911)[1] أساس علم النفس القياسي (Psychometrics).

3.4. الإحصاء والبيولوجيا:

يستخدم الإحصاء في العلوم البيولوجية لدراسة الأجناس والفصائل المتمايزة من الحيوان والنبات وخصائصها المختلفة، ويعود الفضل ليوهان مندل John Mendel (1822-1884) حيث أجرى الكثير من التجارب واكتشف القوانين الأساسية للوراثة وكانت تجاربه هي الأساس لعلم الوراثة الذي يشهد تقدما واضحا في عالم اليوم[2].

4.4. الإحصاء وعلم السكان:

أضحت الدراسات السكانية تعتمد بصورة أساسية على الدراسات الكمية بهدف التعرف على خصائص المجتمع في زمن معين من حيث العمر والقوى العاملة والتوظيف والتوزيع النوعي والجغرافي للعاملين ودراسة الزيادة أو الانخفاض في عدد السكان، كما يعتمد أيضا على الطرق والأساليب الإحصائية في دراسة الاتجاهات والآراء

[1]- بوموس فوزية، محاضرات في مقياس الاحصاء الوصفي والاستدلالي، سند بيداغوجي مقدم لطلبة سنة أولى علوم اجتماعية، المركز الجامعي نور البشير بالبيض، 2018، ص18.
[2]- السعدي رجال، مرجع سابق، ص13.

السائدة في المجتمع وموقفها من ظاهرة سياسية أو اقتصادية أو اجتماعية أو ثقافية أو غيرها.

5.4. الإحصاء والمعلوماتية:

كلما كانت كمية المعطيات محلّ المعالجة كبيرة، كلما كانت هذه الأخيرة اقتصادية باستخدام الحاسوب مقارنة بالطرق الأخرى وأحيانا تكون هي المخرج والسبيل الوحيد لتحقيق ذلك، فضلا عن كيفية الحصول كذلك على معلومات أكثر بأسرع وقت وبلوغ نتائج أكثر دقة.

وفي حالة وجود عدد كبير من المتغيرات التي تتعلق بدراسة ظاهرة معينة وارتباطها فيما بينها بعلاقات تتصف بنوع من التعقيد فلا يوجد مجال للشك بأنّ اعتماد الحاسوب يصبح أمرا لا مفرّ منه.

5. مفاهيم أساسية في الإحصاء:

هناك بعض المفاهيم الأساسية التي تمثل لغة الإحصاء نبرزها فيما يلي:

1.5. الوحدة الإحصائية:

يطلق هذا المصطلح على الكائن الواحد سواء كان إنسانا أو حيوانا أو شيئا، يشترك في صفة أو أكثر تدور الدراسة الإحصائية حولها مثل: عامل، طالب، طائر، كتاب، حاسوب...الخ.

2.5.المجتمع الإحصائي:

تطلق كلمة مجتمع على المجموعة الإحصائية (أفراد المجتمع) وبالتالي هو مجموع الوحدات الإحصائية المراد دراستها والمشتركة في الصفة الأساسية التي تهم الباحث في دراسته، مثل عدد الطلاب في قسم L.M.D، عدد العمال في مؤسسة صناعية...الخ.

3.5. العينة:

يطلق هذا المصطلح على الجمع الذي يضم عددا كبيرا أو صغيرا من الوحدات الإحصائية[1] وهي جزء من المجتمع يتم اختيارها بطرق إحصائية معينة وتكون ممثّلة للمجتمع الإحصائي ككل على أن تتوزع فيها خصائص

[1]- شريف شطيبي، محاضرات في مقياس الاحصاء الوصفي لطلبة السنة الأولى، السنة الجامعية 2001-2002، ص12.

المجتمع بنفس النسب الواردة فيه.

على سبيل المثال عند القيام بدراسة ظاهرة معينة عن طلبة جامعة قسنطينة2، فإننا نأخذ مجموعة صغيرة من الطلبة بدلا من القيام بالدراسة على الجميع.

والعينات أنواع منها:

1.3.5. العينة العشوائية البسيطة:

وهي العينة التي نعطي فيها لجميع وحدات المجتمع المراد دراسته نفس الفرصة في الاختيار[1]، طبقا لحجم المجتمع الإحصائي، لذلك يراعى على أن تكون العينة ممثلة للمجتمع تمثيلا صادقا حتى تكون نتائج الدراسة مقنعة وذات مصداقية.

2.3.5. العينة الطبقية:

يتم تقسيم المجتمع الإحصائي إلى فئات (طبقات) متجانسة ويتم اختيار جزء من العينة من كل فئة، يتناسب وحجم تلك الفئة.

3.3.5.العينة العنقودية (متعددة المراحل):

وهي بديل للعينة الطبقية عندما لا تتوافر قائمة بعناصر المجتمع الإحصائي وفيها يتم تقسيم هذا الأخير إلى مجموعات جزئية واضحة يسمى كل منها عنقود. فإذا أردنا مثلا دراسة إتقان طلبة إحدى الجامعات لاستخدام الحاسوب فنقوم في مرحلة أولى بتقسيم الجامعة إلى الكليات المختلفة التي تضمها، ثم إلى التخصصات في المرحلة الثانية وتعتبر هي عناصر المجتمع الإحصائي وكل وحدة من هذه المجموعات تسمى عنقودا.

4.3.5. العينة المنتظمة:

وهي بديل آخر عن العينة العنقودية عندما لا تتوافر قائمة بعناصر المجتمع الإحصائي، وتتم بتحديد نقطة الانطلاق ومدى السحب من خلال نسبة حجم المجتمع إلى حجم العينة.

[1]- موساوي عبد النور، دروس في الاحصاء الوصفي، منشورات جامعة قسنطينة، 2004، ص4.

5.3.5. العينة المعيارية:

وهي تلك العينة التي تتفق مع المجتمع الإحصائي من حيث مقاييسه الإحصائية كالوسط الحسابي والوسيط والانحراف المعياري وتختار مثل هذه العينات بطريقة تتابعية.

4.5. المتغير الإحصائي:

الصفة التي تتغيّر من شخص إلى آخر أو من مفردة إلى أخرى تسمى المتغير ويرمز له (X) فمثلا عند دراسة أطوال مجموعة من الطلاب في قسم معين، فإننا نرمز لصفة الطول بالرمز (X) وطول طالب أو طالبة ما بالرمز Xi.

ويقسم المتغير الإحصائي إلى:

1.4.5. المتغيرات النوعية (الكيفية):

وهي تلك المتغيرات التي لا يمكن قياسها مباشرة بالأرقام العددية، ويمكن أن تكون قابلة للترتيب مثل مستوى التأهيل العلمي أو غير قابلة للترتيب مثل لون العين، الجنسية...الخ.

2.4.5. المتغيرات الكمية:

وهي تلك المتغيرات التي يمكن قياسها أو التعبير عنها في صورة رقمية، مثل الطول، الوزن، العمر...الخ، وهي أكثر المتغيرات انتشارا واستعمالا لأن لغة الإحصاء أساسا هي لغة الأرقام وتنقسم إلى قسمين:

1.2.4.5. المتغيرات المنفصلة (المتقطعة):

وهي تلك المتغيرات التي تأخذ قيما ثابتة في شكل أعداد طبيعية، وحدة القياس فيها لا تقبل التجزئة، مثل: عدد أفراد الأسرة أو عدد الوحدات الإنتاجية في مصنع ما...الخ.

2.2.4.5. المتغيرات المتصلة (المستمرة):

وهي تلك المتغيرات التي تأخذ مدى معين أو مجال معين من القيم، مثل: طول الطلبة، الوزن، العمر...الخ.

الفصل الثاني

البيانات الإحصائية

تسمى المعلومات التي تجمع وترتب وتحلّل من قبل الإحصائي بالبيانات الإحصائية:

1. تعريف البيانات الإحصائية:

تعرف البيانات الإحصائية بأنها المعلومات التي نحصل عليها من قيم المتغير وأن البيانات الكمية هي البيانات التي نحصل عليها من قيم المتغير الكمي، أمّا البيانات النوعية فنحصل عليها من قيم المتغير النوعي، فعلى قدر توفرها وشمولها ودقتها تتوقف دقة التحليل والاستدلال الإحصائي وأهمية النتائج المتوصل إليها وصحة القرارات المبنية عليها، يعتبر جمع البيانات الإحصائية وعرضها وتحليلها من أهم مراحل البحث العلمي والتي نوضحها كما يلي:

2. جمع البيانات الإحصائية:

تعدّ عملية جمع البيانات أقدم وظائف الإحصاء وهي مرحلة أساسية في العمل الإحصائي لا يمكن تخطيها. وقبل الشروع في عملية جمع البيانات لا بد على الباحث أوّلا أن يلمّ بعدة خطوات وهي[1]:

- تحديد نوع المشكلة وفي أي مجال يودّ الدراسة أو البحث فيه.
- الاتفاق على وحدة القياس التي ستعتمد في جمع البيانات.
- تعيين المتغيرات التي ستتناولها الدراسة وحصر مصادر المعلومات.
- تحديد الأسلوب أو الطريقة التي تعتمد في جمع المعلومات.

1.2. مصادر جمع البيانات:

هناك عدة مصادر للحصول على البيانات الخاصة بالظاهرة محل الدراسة ويمكن تصنيفها إلى مصادر

[1]- السعدي رجال، مرجع سابق، ص30.

تاريخية، مصادر داخلية ومصادر ميدانية[1].

تعتبر المصادر التاريخية والداخلية مصادر غير مباشرة، بينما تعتبر المصادر الميدانية مصادر مباشرة.

1.1.2. المصادر التاريخية:

وتعرف هذه المصادر بالمصادر الرسمية والتي يتم جمع البيانات فيها من السجلات الرسمية المحفوظة نتيجة التسجيل المطلوب بالقوانين والأنظمة أو سبق نشرها عن هذا المجتمع وهي جاهزة للاستخدام مثل: الوثائق والمطبوعات والسجلات والدراسات الإحصائية التي تصدرها المصالح و الهيئات العامة والخاصة.

2.1.2. المصادر الداخلية:

وهي مجموعة البيانات التي تجمعها الهيئات والمؤسسات بصفة مستمرة ودورية لأغراض التنظيم والإدارة داخلها وهي إمّا:

– وطنية كمنشورات المتعاملين الاقتصاديين، مثل بنك الجزائر، الشركة الوطنية للكهرباء والغاز أو منشورات الجهات المتخصصة مثل الديوان الوطني للإحصاء أو منشورات التنظيمات المركزية الخاصة بالحكومة والوزارات...الخ.

– أو دولية: تصدرها هيئات دولية مثل: صندوق النقد الدولي FMI، منظمة التجارة العالمية OMC، المكتب الدولي للعمل BTT...الخ.

3.1.2. المصادر الميدانية:

تمثل استقصاء البيانات من مصادرها الأصلية، حيث يقوم الباحث بجمعها بنفسه عن طريق: المقابلة، البريد، الهاتف...الخ ويسمّى البحث بحثا ميدانيا[2].

2.2. طريقة جمع البيانات:

يتم جمع البيانات إمّا بطريقة الحصر الشامل أو طريقة العيّنة، ويتم المفاضلة بين الطريقتين استنادا لعدة

[1]- السعدي رجال، مرجع سابق، ص31.

[2]- المرجع نفسه، ص32.

عوامل منها:

طبيعة المجتمع أو طبيعة البيانات المطلوبة أو الفترة الزمنية المتاحة أو الإمكانيات المادية والفنية المتاحة للبحث.

1.2.2. طريقة الحصر الشامل:

تقوم هذه الطريقة على التعداد الكامل لجميع الوحدات الإحصائية المكوّنة للمجتمع الإحصائي محلّ الدراسة دون استثناء وخلال مدة زمنية محددة[1]، ورغم تميز هذه الطريقة بالدقة اللازمة إلاّ أنها باهظة التكاليف مالا وجهدا ومعرفة، كما تتطلب وقتا كبيرا للفرز إضافة إلى جهاز إحصائي كبير ومتخصص.

2.2.2. طريقة العيّنة:

تقوم هذه الطريقة على دراسة جزء من المجتمع الإحصائي، بأخذ عينة تمثل هذا المجتمع تمثيلا صادقا، ودراسة خواصها واستخلاص المعلومات اللازمة منها[2] ليتم تعميم النتائج فيما بعد على المجتمع الذي سحبت منه.

3. عرض البيانات الإحصائية:

بعملية تبويب وتصنيف البيانات تصبح الخصائص الهامة لها أكثر وضوحا، ويعتبر العرض الجدولي والعرض البياني من الأساليب التي تساعد على زيادة الوضوح في الخصائص وبروزها.

1.3. العرض الجدولي:

تمتاز طريقة العرض الجدولي بالدقة وتعتبر أهم أسلوب متبع لعرض البيانات الإحصائية شريطة أن يتم مراعاة عدة أسس عند بناء الجدول وهي:

-أن يكون للجدول عنوانا واضحا ومختصرا ليعطي فكرة واضحة عمّا يحتويه.

- يجب توضيح وحدات القياس المستخدمة.

[1]- السعدي رجال، مرجع سابق، ص33.

[2]- أماني عزوزة، محاضرات في الإحصاء، مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى ل م د جذع مشترك، علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير، جامعة عبد الحميد مهري-قسنطينة 2019،2-2020، ص7.

-يجب توضيح المصدر الذي أخذت منه المعلومات.

-أن ترتب البيانات حسب ترتيبها الزمني أو حسب أهميتها من الناحية الوصفية.

مثال: الجدول التالي بين الإنتاج الزراعي في الجزائر خلال الفترة (2010-2019)

جدول رقم(01)

السنة	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
الإنتاج الزراعي (مليون دولار)	13644	16219	18339	20512	21978	19227	20572	26300	28000	29100

المصدر: وزارة الفلاحية والتنمية الريفية MADR

2.3. العرض البياني:

يتم عرض المعلومات الإحصائية بيانيا من خلال تحويل الأرقام المطلقة إلى أشكال بيانية[1] تسهّل استيعاب خصائص الظاهرة المدروسة وتعطي فكرة شاملة، واضحة وسريعة عنها عكس العرض الجدولي، وتتمثل أهمّ طرق العرض البياني في:

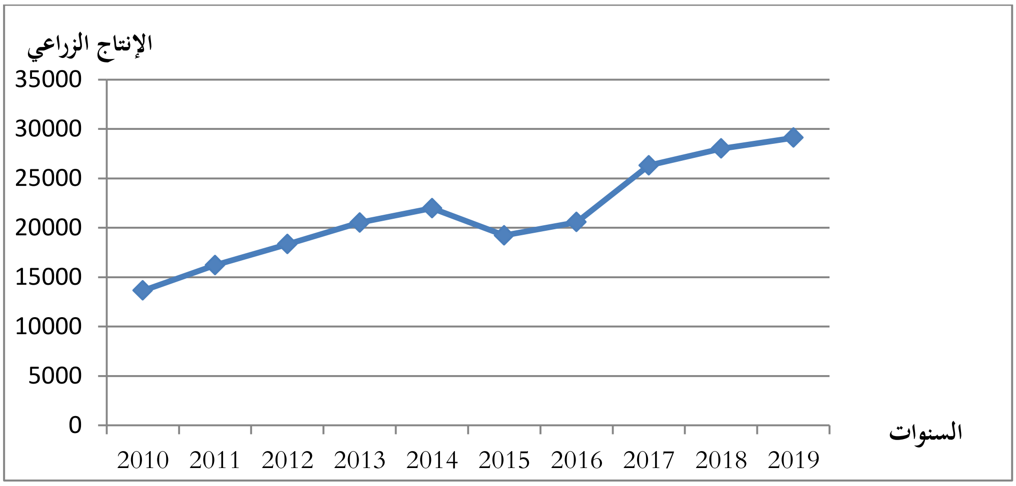
1.2.3. الخط البياني:

ويستعمل لتمثيل العلاقة بين ظاهرتين أو متغيرين أو أكثر من خلال فرض أحدها مستقلا والآخر تابعا له، ثم ننشئ محورين متعامدين حيث يمثل المتغير المستقل على المحور الأفقي والمتغير أو المتغيرات التابعة له على المحور العمودي، كما هو موضح فيما يلي:

مثال: من الجدول السابق رقم (01) والخاص بقيمة الإنتاج الزراعي في الجزائر خلال الفترة (2010-2019)نرسم الخط البياني الذي يوضح تطور قيمة الإنتاج الزراعي في الجزائر لتلك الفترة.

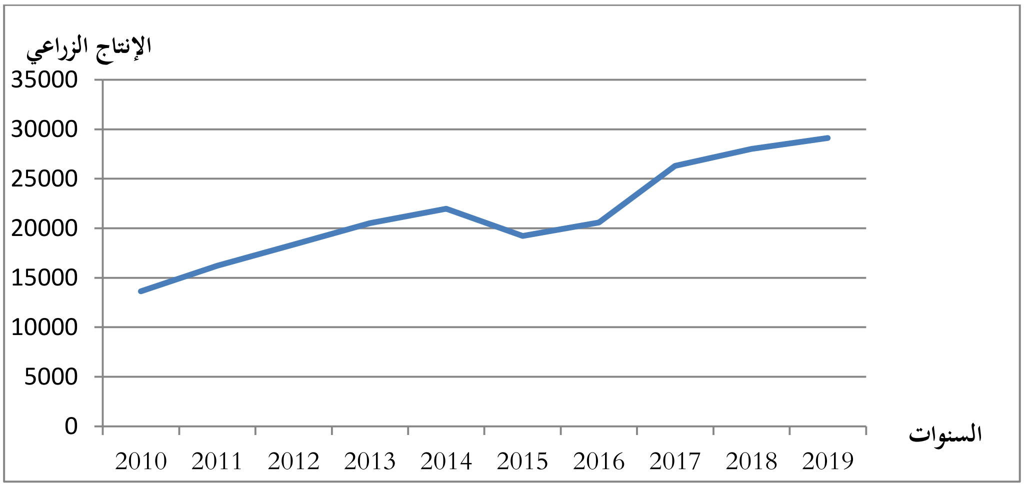
[1]- زهية حوري، ملخص، الإحصاء الوصفي، دروس وتمارين محلولة، مطبعة إقرأ، قسنطينة، الجزائر، الطبعة الأولى، 2013، ص11.

شكل رقم (01)



ومن الجدير بالذكر أنه إضافة إلى الخط البياني المنكسر هناك خط بياني منحني يكون كما هو مبين في الشكل التالي حسب نفس المثال السابق:

شكل رقم (02)



- **تطبيقات SPSS:**

يمكن تمثيل المنحنى البياني باستخدام البرنامج الإحصائي SPSS كمايلي: نختار graphs من القائمة الرئيسية ثم نختار Line ونحدد منه Simple ونختار ثالث خيار من البيانات وننقر على define لنختار المتغير Variable ثم ننقر على ok وإذا كان التوزيع طبيعيا نحدد خيار regression ثم نحدد Line من

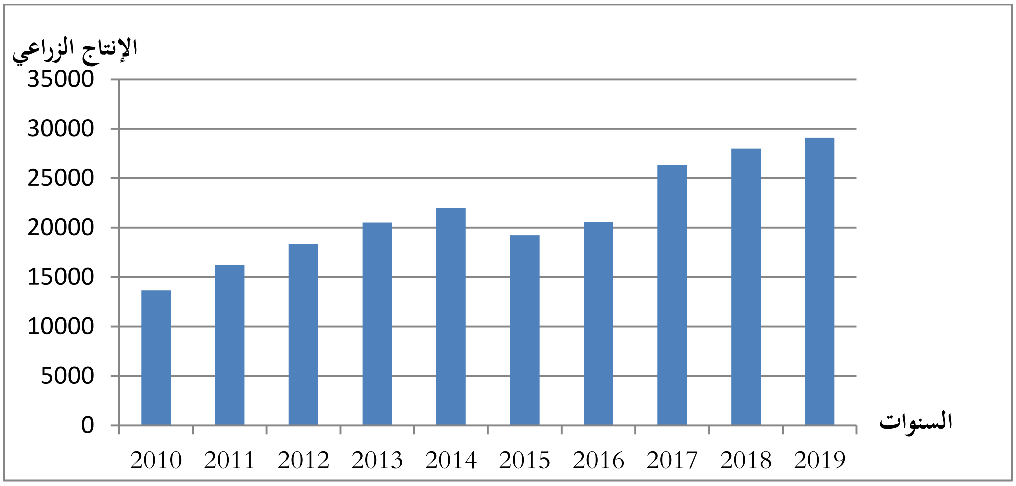
خيار Plot[1].

2.2.3. الأعمدة البيانية:

تعتبر طريقة الأعمدة البيانية كعرض للبيانات الإحصائية من أكثر أنواع التمثيل، وتتخلص برسم مستطيلات (أعمدة) متساوية القاعدة أي بعرض واحد ولكن ارتفاع كل منها يتناسب مع حجم القيمة التي يمثلها، ويترك عادة بين كل عمود وآخر مسافة لفصلهما عن بعض.

مثال رقم 01: من المثال السابق (جدول رقم 01) نرسم الأعمدة البيانية الممثلة له كما يلي:

شكل رقم(03)



وفي حالة متغيرين لدينا المثال التالي:

مثال رقم02: يبين الجدول التالي تطور التجارة الجارة الخارجية، الجزائرية في إطار الشراكة الأورو جزائرية خلال الفترة (2010-2016).

[1]- بلال القاضي، سهيلة عبد الله، محمود البياتي، الإحصاء للإداريين والاقتصاديين، دار الحامد للنشر والتوزيع، الأردن، عمان، 2003، ص41.

جدول رقم (02)

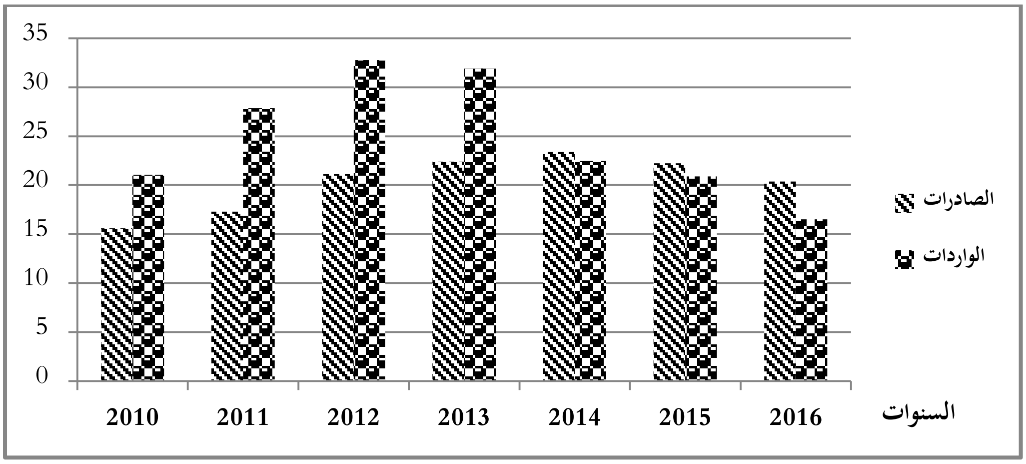
الوحدة: مليار يورو

السنة	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
الصادرات	15,595	17,312	21,125	22,386	23,375	22,241	20,384
الواردات	21,075	27,850	32,764	31,920	22,458	20,908	16,513

المصدر: European commission, Trade in goodswithAlgeria, 2017

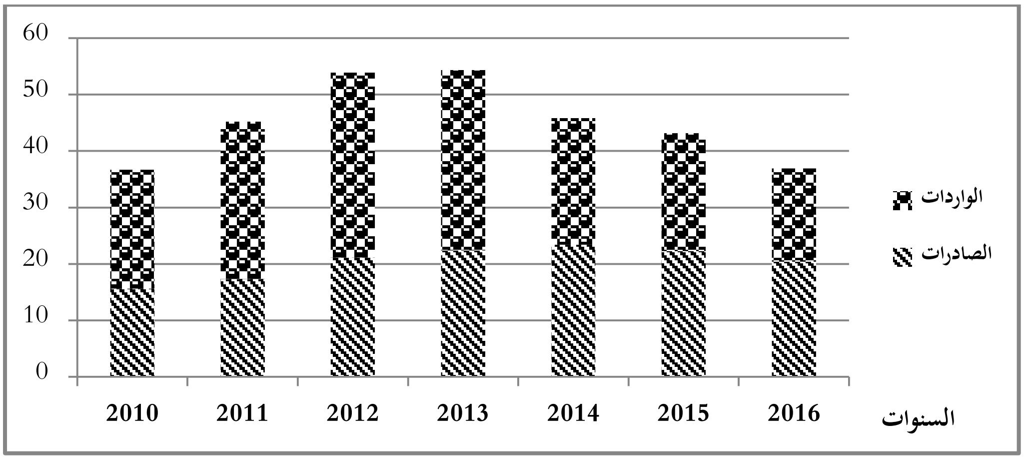
يمكن تمثيل تطور الصادرات والواردات في ظل الشركة الأورو وجزائرية عن طريق الأعمدة البيانية كما يلي:

شكل رقم (04)



كما يمكن رسم الأعمدة البيانية لبيانات (الجدولرقم 02) كما يلي:

شكل رقم (05)



- **تطبيقات SPSS**:

يمكن تمثيل الأعمدة البيانية باستخدام البرنامج الإحصائي SPSSكمايلي: نختار graphsمن القائمة الرئيسية ثم نحدد الخيارBarونختار Simple ومن ثم نحدد المتغيرVariableالمراد رسمه[1].

3.2.3. الدوائر:

تستعمل الدوائر للدلالة على التغيرات التي تطرأ على قيم ظاهرة معينة زمانيا ومكانيا، وتتم المقارنة بين مساحات الدوائر بما يتناسب وقيم الظاهرة محلّ الدراسة. مساحة الدائرة تساوي جداء مربع نصف القطر بالقيمة وتعطى بالقانون التالي:

$$Y=\pi R^2$$

حيث:

R: نصف القطر.

π:قيمة ثابتة تساوي تقريبا 3,143 (7/22).

Y: مساحة الدائرة وتمثل قيمة الظاهرة المدروسة.

مثال: يبين الجدول التالي مساحة بلدان المغرب العربي والمطلوب تمثيل مساحات هذه البلدان عن طريق الدوائر:

جدول رقم (03)

البلد	ليبيا	تونس	الجزائر	المغرب الأقصى	موريتانيا
المساحة (كلم^2)	1759540	163610	2381741	446550	1030000

المصدر: ملامح العالم الاقتصادية

الحل: نفترض أن مساحة هذه البلدان y تمثل مساحة الدائرة وبالتالي يكون نصف القطر يساوي:

[1]– بلال القاضي، سهيلة عبد الله، محمود البياتي، مرجع سابق، ص37.

$$R=\sqrt{\frac{Y}{\pi}}$$

جدول رقم (04)

البلد	ليبيا	تونس	الجزائر	المغرب الأقصى	موريتانيا
R	560078,98	52078,68	758131,71	142141,28	327589,18

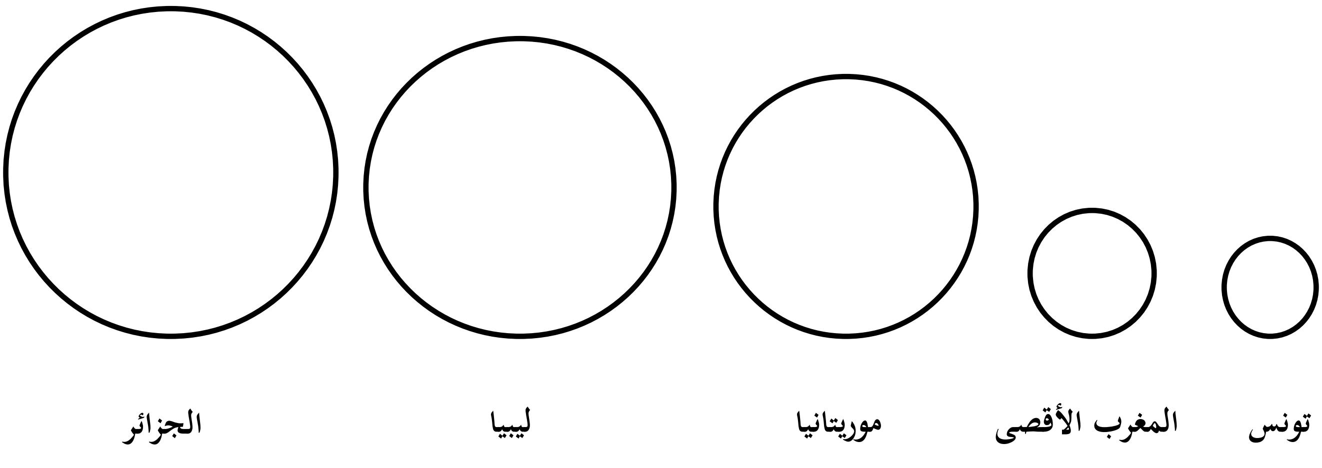
يتضح لنا أن قيمR كبيرة جدّا واختصارها لا يؤثر في تناسب مساحات الدوائر، نقسم قيم R على 300.000 لنحصل بذلك على $\bar{R}$ والتي تمثل أنصاف أقطار الدوائر بعد الاختصار:

جدول رقم (05)

البلد	ليبيا	تونس	الجزائر	المغرب الأقصى	موريتانيا
$\bar{R}$	1,87	0,17	2,53	0,47	1,09

ويبرز لنا الشكل التالي الدوائر الممثلة لمساحات البلدان المغرب العربي

شكل رقم (06)



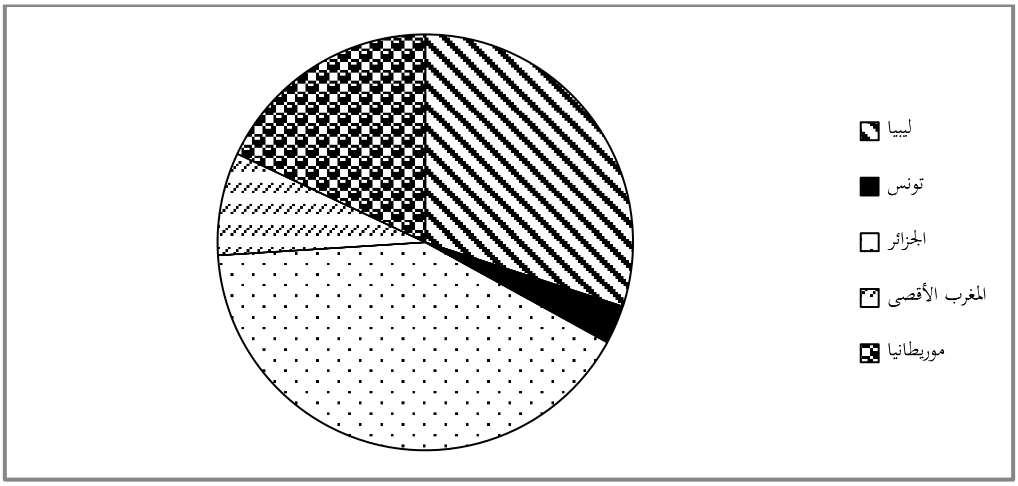
وهناك استعمال آخر للدوائر، يتجلى في الدائرة النسبية ونبحث عن الزاوية المقابلة لكل قيمة من قيم الظاهرة المدروسة والجدول التالي يبين النسب ومقدار الزاوية لكل قيمة من قيم مساحات بلدان المغرب العربي.

جدول رقم (06)

البلد	ليبيا	تونس	الجزائر	المغرب الأقصى	موريتانيا
المساحة (كلم^2)	1759540	163610	2381741	446550	1030000
النسبة %	30	3	41	8	18
مقدار الزاوية	108	10,08	147,6	28,8	64,8

نحصل على النسبة بقسمة مساحة البلد على المساحة الإجمالية والتي تبلغ 5781441 كلم^2.أمّا مقدار الزاوية فنحصل عليه إمّا من خلال قسمة النسبة على 10 ثم ضربها في 360 درجة أو قسمة مساحة كل بلد على المساحة الإجمالية ومن ثم ضربها في 360 درجة والشكل التالي يوضح تمثيل المساحات السابقة.

شكل رقم (07)



- **تطبيقات SPSS:**

يمكن أيضا استخدام البرنامج الإحصائي SPSS للحصول على هذا الشكل البياني كما يلي: نختار

Graphs من القائمة الرئيسية ومنهار نختار pie وبعدها نحدد نوع البيانات والمتغير المطلوب[1].

4.2.3. المربعات:

يمكن الحصول أيضا على التمثيل البياني عن طريق المربعات وذلك من خلال استخدام مساحة المربع والتي تساوي مربع ضلعه، وباعتبار قيمة الظاهرة والمتمثلة في مساحة البلدان هي مساحة المربع، فإن ضلع المربع وهو الجذر التربيعي لمساحته.

$$\mathbf{Y=c^2=>C=}\sqrt{y}$$

حيث:

Y: هي مساحة المربع.

C: هو ضلع المربع.

من المثال السابق، نمثل مساحات بلدان المغرب العربي عن طريق المربعات ويتضح لنا ذلك من خلال مايلي:

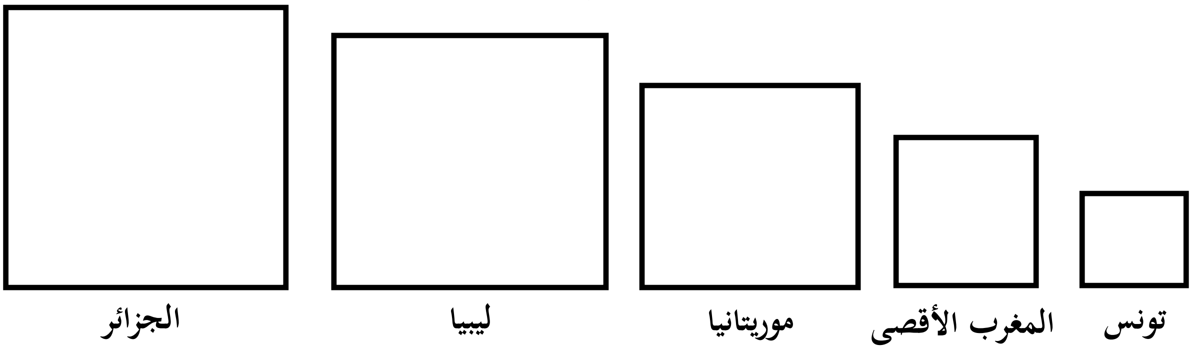
جدول رقم (07)

البلد	ليبيا	تونس	الجزائر	المغرب الأقصى	موريتانيا
المساحة (كلم^2)	1759540	163610	2381741	446550	1030000
C	1326,48	404,49	1543,29	668,24	1014,89
$\bar{C}$	3,32	1,01	3,85	1,67	2,64

بما أن قيم C الظاهرة كبيرة فلا بد من اختصارها وذلك بقسمتها على 400 فنحصل على $\bar{C}$ والتي تمثل ضلع المربع المراد تمثيله ويتضح لنا ذلك من خلال الشكل التالي:

[1]- بلال القاضي، سهيلة عبد الله، محمود البياتي، مرجع سابق، ص39.

شكل رقم (08)



الفصل الثالث

الجداول التكرارية

عندما يكون عدد المفردات أو القيم قليلا أو صغيرا فإنه يمكن ملاحظة كل منها على انفراد أمّا عندما يضم مجال الدراسة عددا كبيرا من القيم فمن الأفضل استخدام ما يسمى بالجدول التكراري Table Frequencyويسمى أيضا التوزيع التكراري، لأنه يقوم على توزيع البيانات كمجموعة كبيرة من القيم إلى أكثر من مجموعة أو ما يسمى بالفئة Class وحساب عدد القيم في كل فئة ويسمى بتكرار الفئة Frequency Class لذلك يعتبر الجدول التكراري من أكثر أنواع الجداول استعمالا في التحليل الإحصائي، فهو يعمل على تبسيط وتلخيص النتائج الإحصائية في أقل حيّز ممكن بطريقة مرتبة ترتيبا منطقيا يسهل على الباحث التعرف على خواصها من جهة ومن جهة أخرى يقوم بإعطاء صورة مختصرة عن توزيع تلك البيانات.

1. خطوات إعداد الجدول التكراري:

لبناء أو إعداد جدول تكراري وبعد ترتيب البيانات الإحصائية إمّا بشكل تصاعدي أو تنازلي نقوم بإتباع الخطوات التالية:

1.1. تحديد المدى (**Range**):

وهو الفرق بين أكبر قيمة للبيانات وأصغر قيمة لها.

ويمكن التعبير عنه كالآتي :

$$\mathbf{R = X_{max} - X_{min}}$$

حيث:

$\mathbf{X_{max}}$**:** هي أكبر قيمة في البيانات المعطاة.

$\mathbf{X_{min}}$**:** هي أصغر قيمة في البيانات المعطاة.

2.1. تحديد عدد الفئات (Number of classes):

يمكن القول أنه ليست هناك قاعدة عامة ولكن يمكن اختيار ذلك العدد من الفئات بما يتناسب مع حجم البيانات والأهداف المرجوة من التحليل، ويعتمد أيضا على خبرة الباحث. ويمكن أن نختار عدد فرضي للفئات على ألاّ تقل عن 5 وألا تزيد عن 15 تبعا لطبيعة البيانات، فلا يمكن أن يكون عدد الفئات صغيرا جدا حتى نضطر إلى دمج معظم المعلومات معا، وبذلك لا نستطيع توضيح وفهم فكرة عامة عن البيانات، كما لا يمكن أن يكون العدد كبيرا حتى تكون معظم المعلومات مشتتة بين فئات عديدة، وبذلك لن يكون هناك فرق كبير بين البيانات في وضعها الأصلي وبين الجدول المعدّ.

وتتبع معادلة ستورجس Sturges لإيجاد عدد الفئات، حيث استطاع هذا العالم الإحصائي أن يكوّن صيغة رياضية نقدمها فيما يلي:

$$K=1+3{,}322\ \log N$$

حيث: **K** يمثل عدد الفئات.

N: يمثل عدد البيانات محل الدراسة.

3.1. تحديد طول الفئة (Class Width):

يتم تحديد طول الفئة من خلال قسمة المدى العام على عدد الفئات وهذا ما جاء به Sturges من خلال المعادلة[1]:

$$C=\frac{X\max-X\min}{1+3{,}322\ \log N}$$

تعطي معادلة سترجس مؤشرا مناسبا لطول الفئة **C** على أن يكون عددا تاما أي نقوم بتدوير الناتج إلى أقرب وحدة صحيحة.

[1]- السعدي رجال، مرجع سابق، ص51.

4.1. تحديد حدود الفئات (**Class Limits**):

بعد تعيين طول الفئات يجب أن نحدّد حدودها بوضوح تام لمنع أي تداخل بين وحداتها حيث تبدأ حدود الفئات بأصغر قيمة والتي تمثل الحدّ الأدنى للفئة الأولى وتنتهي الفئة الأخيرة بالحدّ الأعلى والذي يمثل أكبر قيمة وبذلك فإن كل فئة لها حدّين، يفضل استخدام مفهوم المجالات لتوضيح حدود الفئات بدقة كما يلي:

المجال[a,b]هو مجال مغلق تنتمي إليه قيمةaوقيمةbوكل القيم الواقعة بينهما ونكتب:

$$a \leq Xi \leq b$$

أما المجال]a,b[هو مجال مفتوحلا تنتمي إليه قيمة aولا قيمة bبينما تنتمي إليه كل القيم الواقعة بينهما ونكتب:

$$a < Xi < b$$

في حين أن المجال]a,b[هو مجال نصف مفتوح تنتمي إليه قيمة a دونbوكل القيم الواقعة بينهما ونكتب:

$$a \leq Xi < b$$

وعليه يمكن كتابة حدود الفئات بالشكل التالي على سبيل المثال:

]60-50]

]70-60]

]80-70]

ويمكن كذلك التعبير عنها بالشكل التالي:

50 وأقل من 60

60 وأقل من 70

70 وأقل من 80 وهكذا...

5.1. إيجاد مراكز الفئات (Class Midpoint):

يمثل مركز كل فئة حاصل قسمة مجموع الحدّين على 2، فهو متوسط الحد الأعلى والحد الأدنى لكل فئة، ويمكن حسابه باستخدام العلاقة التالية:

$$Xi=\frac{L1+L2}{2}$$

حيث: **Xi** يمثل مركز الفئة.

L_1: يمثل الحد الأدنى للفئة.

L_2:يمثل الحد الأعلى للفئة.

إذا كان لدينا طول الفئة Cفإنه أيضا يمكن إيجاد مركز الفئة بإحدى الطريقتين الآتيتين:

الطريقة الأولى: $Xi= L_1+\frac{C}{2}$

الطريقة الثانية: $Xi= L_2-\frac{C}{2}$

إذا كانت الفئات متساوية في الطول سمي التوزيع: توزيعا منتظما وهو التوزيع المحبّذ لما يقدمه من مزايا من حيث سهولة العرض البياني والعمليات الحسابية التي تجرى عليه، ففيما يتعلق بمراكز الفئات في جدول منتظم يكفي أن يحسب بإحدى الطرق السابقة للفئة الأولى ونحصل على x_1 وهو مركز الفئة الأولى بعد ذلك نضيف طول الفئة لكل مركز فئة متحصل عليه يعني:

$$X_2=X_1+C$$

$$X_3=X_2+C$$

وهكذا تدرج مراكز الفئات دون الاضطرار إلى تطبيق العلاقة في كل مرة.

6.1. تفريغ البيانات وإيجاد عدد التكرارات:

يتم تفريغ البيانات بتسجيل القيم الواحدة بعد الأخرى في الفئة الخاصة بها على شكل إشارة أو علامات وتسجل عادة بخطوط مائلة (/) يعكس كل خط قيمة واحدة، وعند الوصول إلى خمس قيم نقوم بغلق الأربعة خطوط الأولى بخط مائل كما يلي: (~~////~~) لتسهيل الحساب لا غير وبذلك تتشكّل لدينا حزمة تتكون من (5) خمس قيم، بعدها تترجم إلى أرقام أو أعداد والبيانات التي تخص فئة معينة يسمى بتكرار الفئة Class frequency ويرمز له fi وبعدها يتم جمع هذه التكرارات للتأكد من المجموع والذي يمثل حجم العينة.

وبذلك فإن الشكل العام للجدول التكراري يتكون من 3 أعمدة رئيسية وهي عمود للفئات وعمود للقيم الموزعة (بالخطوط المائلة) وعمود للتكرارات المقابلة لكل فئة.

مثال: تمثل البيانات التالية عدد الساعات التي اشتغلها 50 عاملا خلال أسبوع والمطلوب تهيئة البيانات في شكل جدول توزيع تكراري.

35	36	43	48	47	38	43	48	42	46
23	27	29	23	44	32	33	44	24	25
34	24	46	48	46	39	41	29	28	33
24	45	23	41	43	48	48	47	33	46
23	49	36	22	39	36	41	43	38	32

الحل: كما لاحظنا سابقا لا بد من اتباع الخطوات السابقة الذكر، بعد ترتيب البيانات ترتيبا تصاعديا كما يلي:

1) ترتيب البيانات:

27	25	24	24	24	23	23	23	23	22
35	34	33	33	33	33	32	29	29	28
41	41	41	39	39	38	38	36	36	36
46	46	45	44	44	43	43	43	43	42
49	48	48	48	48	48	47	47	46	46

2) تحديد المدى:

من خلال الترتيب يتضح لنا أن أصغر قيمة في البيانات المعطاة هي 22 وأكبر قيمة هي 49 وعليه يكون المدى كما يلي:

$$R = Xmax - Xmin$$

$$R = 49 - 22 = 27$$

3) تحديد عدد الفئات:

يتم تحديد عدد الفئات كما رأينا سابقا بالصيغة التالية:

$$K = 1 + 3,322 \log N$$

$$K = 1 + 3,322 \log 50 = 6,6440$$

وبعد تقريب هذه القيمة إلى أقرب وحدة صحيحة يكون لدينا 7 فئات.

4) تحديد طول الفئة:

نطبق معادلة ستورجسSturges:

$$C = \frac{R}{K} = \frac{27}{6,6440} = 4,06 \cong 4$$

5) تحديد حدود الفئات:

نأخذ أصغر قيمة كحدّ أدنى للفئة الأولى وعليه يكون لدينا ما يلي:

]26-22]

]30-26]

]34-30]

]38-34]

]42-38]

]46-42]

]50-46]

نلاحظ أن أكبر قيمة وهي قيمة 49 تندرج ضمن الفئة الأخيرة ويتجلى واضحا أن عدد الفئات هو:7

ويمكن أن يعبّر عنها أيضا بالشكل التالي:

22 وأقل من 26.

26 وأقل من 30...وهكذا

6) مراكز الفئات:

يحسب مركز الفئة بثلاث طرق كما تم التطرق إليه سابقا وعليه يكون مركز الفئة الأولى كما يلي:

$$X_1=\frac{L1+L2}{2}=\frac{22+26}{2}=24$$

$$X_1=L1+\frac{c}{2}=22+2=24$$

$$X_1=L_2-\frac{c}{2}=26-2=24$$

وبعد حساب مركز الفئة الأولى ولأن الجدول منتظم باعتبار طول الفئات متساوي في جميع الفئات فإننا نضيف 4 لكل مركز فئة سابق فينتج لدينا ما يلي:

48-44-40-36-32-28-24

7) تفريغ البيانات وإيجاد عدد التكرارات:

جدول رقم (01)

الفئات	تفريغ البيانات بالقيم	التكرارات f_i	X_i
22 وأقل من 26	25-24-24-24-23-23-23-22	9	24
26 وأقل من 30	29-29-28-27	4	28
30 وأقل من 34	33-33-33-32-32	5	32
34 وأقل من 38	36-36-36-35-34	5	36
38 وأقل من 42	41-41-41-39-39-38-38	7	40
42 وأقل من 46	45-44-44-43-43-43-43-42	8	44
46 وأقل من 50	-48-48-47-47-46-46-46-46 48-48-48-48-48	12	48
المجموع	-	**50**	-

ويمكن أيضا تفريغ البيانات بالخطوط المائلة وبكتابة حدود الفئات على شكل مجالات كما موضح في الجدول التالي:

جدول رقم (02)

الفئات	تفريغ البيانات بالخطوط المائلة	التكراراتf_i	X_i
26 -22	~~////~~ ////	9	24
30 -26	////	4	28
34 -30	~~////~~	5	32
38 -34	~~////~~	5	36
42 -38	~~////~~ //	7	40
46 -42	~~////~~ ///	8	44
50 - 46	~~////~~ ~~////~~ //	12	48
المجموع	-	50	-

- **التكرار التجميعي الصاعد والنازل:**

بعد تحديد وكتابة التكرارات الخاصة بكل فئة فإنه في بعض الأحيان قد نحتاج إلى معرفة عدد القيم التي تقل أو تزيد عن قيمة معنية لذلك نلجأ إلى التكرار التجميعي للفئات وهناك نوعان:

– التكرار التجميع الصاعد: ويرمز له عادة بـ (ت ت ص) اختصارا له، أو نضع الإشارة (↑) وهو التكرار الذي يعطي عدد القيم التي تقل عن الحدّ الأعلى لفئة معينة، ويمثل ت ت ص للفئة الأولى نفس تكرار الفئة الأولى (f_1)، أمّا ت ت ص للفئة الثانية فهو ت ت ص للفئة الأولى + تكرار الفئة الثانية وهكذا نستمر بإضافة تكرار الفئة التالية ل ت ت ص إلى أن نصل إلى آخر فئة، حيث يمثل ت ت ص للفئة الأخيرة مجموع التكرارات الكلية.

– التكرار التجميعي النازل: ويرمز له بـ (ت ت ن) أو نضع له الإشارة (↙) وهو التكرار الذي يعطي عدد القيم التي تضم الحد الأدنى لفئة معينة فأكثر، يمثل ت ت ن للفئة الأولى مجموع التكرارات الكلية أما ت ت ن للفئة الثانية يساوي ت ت ن للفئة الأولى مطروحا منه تكرار الفئة الأولى (f_1) وهكذا إلى أن نصل إلى آخر فئة حيث يمثل ت ت ن للفئة الأخيرة التكرار المطلق للفئة الأخيرة.

مثال: الجدول التالي يبين توزيع الدخل الشهري لـ 150 أسرة مأخوذة بـ1000دج.

جدول رقم (03)

الفئات	]28-18]	]38-28]	]48-38]	]58-48]	]68-58]	**المجموع**
التكرار	20	35	50	35	10	150

المطلوب: أدرج التكرار التجميعي الصاعد والنازل للتوزيع.

الحل:

جدول رقم (04)

الفئات	التكرار f_i	ت ت ص ↑	ت ت ن ↓
]28-18]	$\boxed{20}$	$\boxed{20}$	150
]38-28]	35	55	130
]48-38]	50	105	95
]58-48]	35	140	45
]68-58]	10	150	10
المجموع	150	-	

- **التكرارات النسبية:**

يمثل التكرار النسبي قسمة تكرار كل فئة إلى مجموع التكرارات، لذلك فهو يبين الأهمية النسبية لكل فئة، والجدول الذي يعرض التكرارات النسبية يسمى عندئذ الجدول التكراري النسبي وإذا ضربناه في 100 نحصل على التكرار النسبي المئوي.

تساوي مجموع التكرارات النسبية الواحد و100% بالنسبة للتكرارات النسبية المئوية.

وكذلك نفس الأمر بالنسبة للتكرار التجميعي الصاعد والنازل حيث بقسمة ت ت ص على مجموع التكرارات مضروبا في 100 نتحصل على ت ت ص نسبي مئوي، وبقسمة ت ت ن على مجموع التكرارات

مضروبا في 100 ينتج لنا ت ت ن نسبي مئوي. ونلخص ذلك من خلال المثال الآتي.

مثال: الجدول التالي يبيّن توزيع 40 عامل حسب أعمارهم في مؤسسة حديثة النشأة.

جدول رقم (05)

فئات العمل	]25-20[	]30-25[	]35-30[	]40-35[	]45-40[	]50-45[
عدد العمال	3	6	9	11	7	4

المطلوب: أحسب التكرارات النسبية المئوية، ت ت ص نسبي مئوي و ت ت ن نسبي مئوي.

الحل: أولا نقوم بإعداد عمودي ت ت ص و ت ت ن وتسمى مع التكرارات fi(عدد العمال) بالتكرارات المطلقة والتي يمكن التعبير عنها فيما بعد بنسب مئوية وهو المطلوب.

جدول رقم (06)

الفئات	التكرار f_i	ت ت ص	ت ت ن	f_i%	ت ت ص%	ت ت ن%
]25-20[	3	3	40	7,5	7,5	100
]30-25[	6	9	37	15	22,5	92,5
]35-30[	9	18	31	22,5	45	77,5
]40-35[	11	29	22	27,5	72,5	55
]45-40[	7	36	11	17,5	90	27,5
]50-45[	4	40	4	10	100	10
المجموع	40	-	-	100	-	-

لدينا:

$$f_1\%=\frac{3}{40}x100=7,5\%$$

$$\text{ت ت ص}_1=\frac{3}{40}x100=7,5\%$$ وهكذا...

$$\text{ت تن}_1=\frac{40}{40}x100=100\%$$ وهكذا...

يتضح لنا من خلال الجدول على سبيل المثال أن نسبة العمال الذين تتراوح أعمارهم بين 25 وأقل من 30 سنة هو 15% وأن نسبة العمال الذين تقل أعمارهم عن 40 سنة هو 72,5%بينما تبلغ نسبة العمال الذين تكون أعمارهم من 35 سنة فأكثر هو 55%.

2. عرض التوزيعات التكرارية بيانيا:

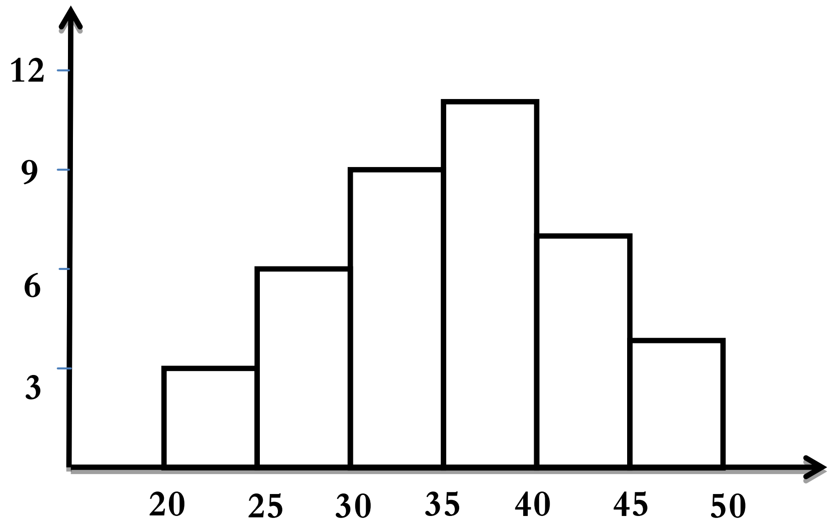
يمكن توضيح البيانات الإحصائية بشكل مناسب باستخدام الرسوم البيانية حيث تساعد القارئ على سهولة فهم المعلومات الواردة واستيعاب قيم الظاهرة وبالتالي مقارنتها مع بعضها، إذن يمكن تمثيل البيانات المعروضة في شكل توزيع تكراري، وهناك عدّة طرق نذكر منها:

1.2. المدرج التكراري:

هو عبارة عن مستطيلات متلاصقة ويتكون من محورين متعامدين، حيث يمثل المحور الأفقي الفئات أمّا المحور العمودي فيمثل التكرارات. تمثل قواعد المستطيلات أو عرض كل عمود طول الفئة أما ارتفاعها فتمثل التكرارات المقابلة لكل فئة.

انطلاقا من المثال السابق والمتعلق بأعمار 40 عامل في مؤسسة حديثة النشأة نقوم برسم المدرج التكراري كما يلي:

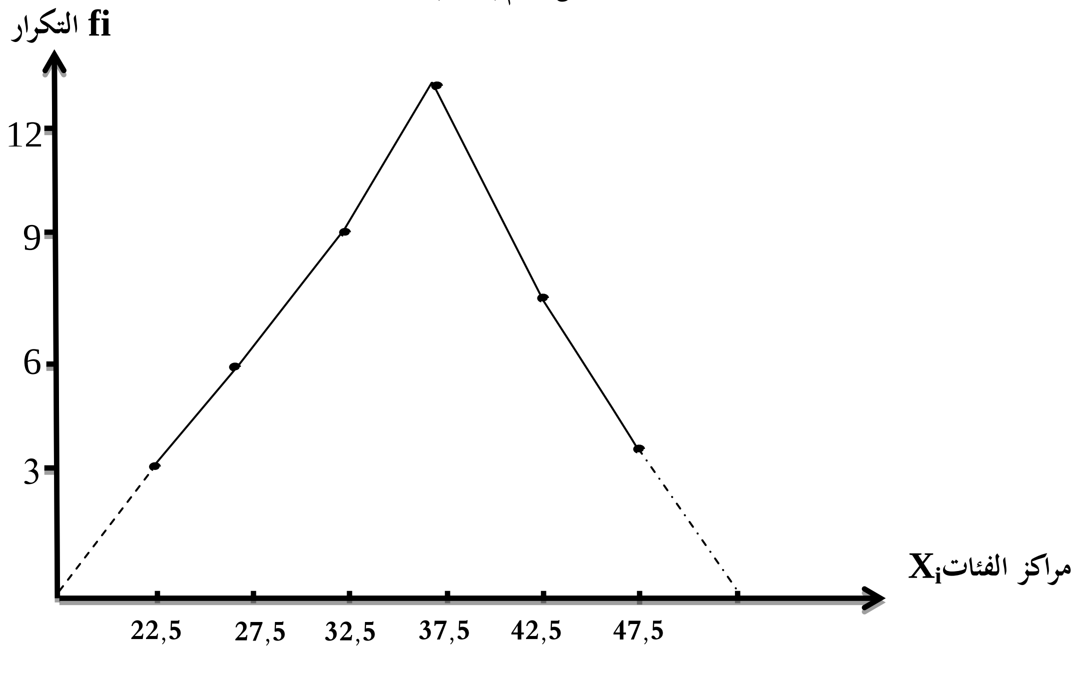
شكل رقم (01)



2.2. المضلع التكراري:

يمكن رسمه مباشرة من المدرج التكراري وذلك بتصنيف الأضلاع العلوية للمستطيلات (أخذ منتصف كل ضلع علوي) ثم توصيل هذه النقاط ببعضها البعض بخطوط منكسرة، كما يمكن أخذ مراكز الفئات مباشرة على المحور الأفقي والتكرارات على المحور العمودي، ونحدّد جميع النقاط ونوصل فيما بينها، أمّا بداية الخط فنوصله بمركز فئة وهمي يسبق الفئة الأولى تكرارها يساوي الصفر، كما نوصل نهاية الخط بمركز فئة وهمي لاحق للفئة الأخيرة تكرارها يساوي الصفر، والشكل التالي يوضح ذلك:

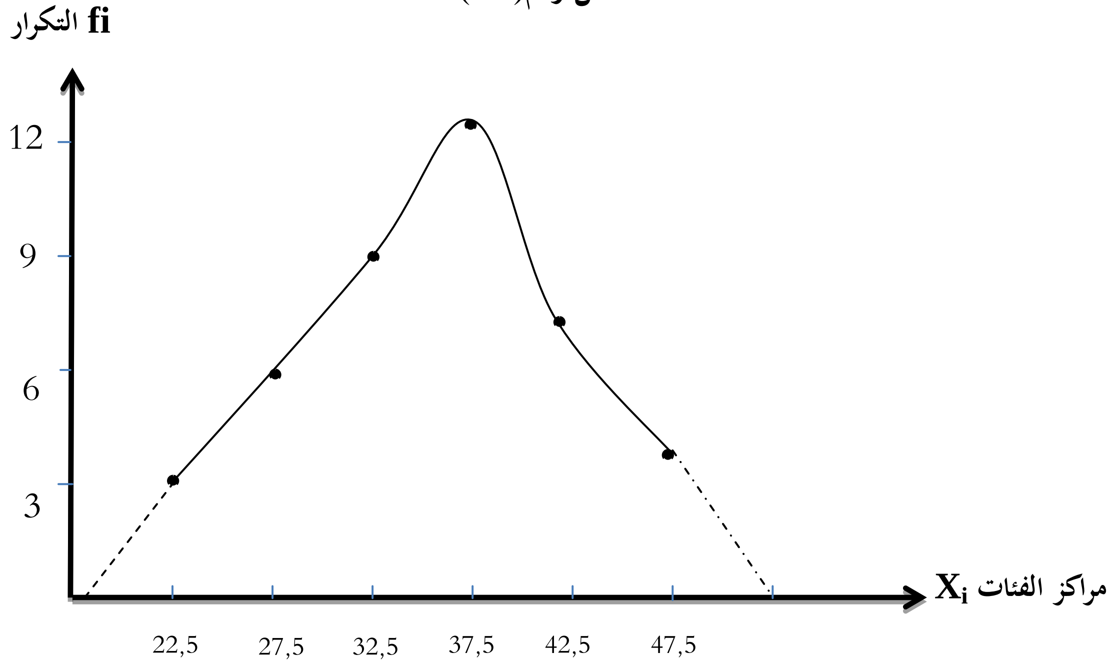
شكل رقم(02)



3.2. المنحنى التكراري:

وهو عبارة عن منحنى يمرّ بالنقاط التي تمثل إحداثياتها مراكز الفئات على المحور الأفقي والتكرارات على المحور العمودي، أي باتباع الخطوات التي قمنا بها في رسم المضلع التكراري لكن بدل استخدام الخط المنكسر نوصل بين النقاط بخط ممهّد كما هو موضح في الشكل التالي:

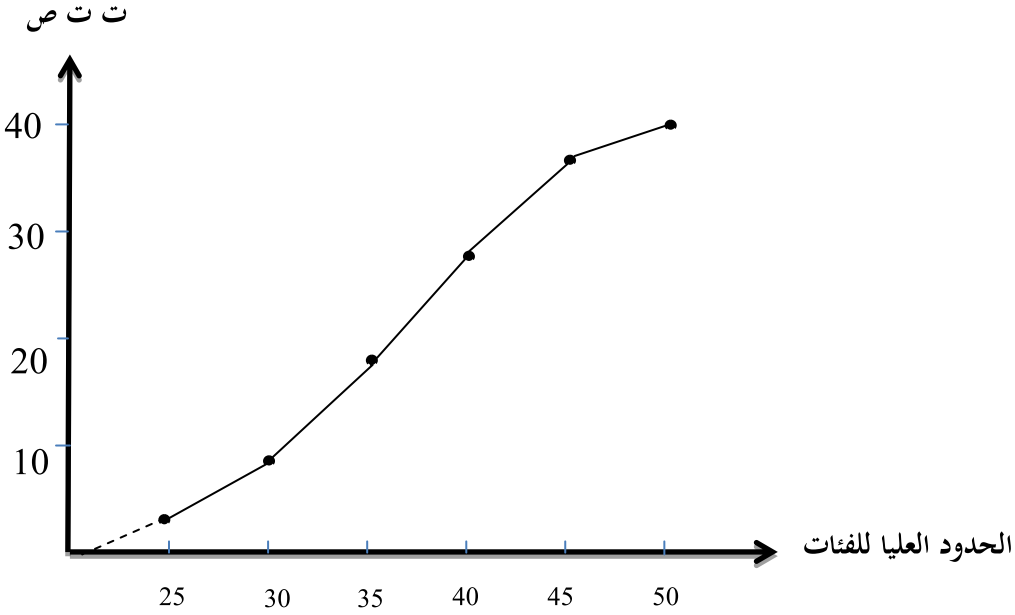
شكل رقم(03)



4.2. منحنى التكرار التجميعي الصاعد:

نكتب على المحور الأفقي الحدود العليا للفئات وعلى المحور العمودي التكرار التجميعي الصاعد، ثم نضع نقاط أمام كل حدّ أعلى للفئة ارتفاعها يمثل التكرار التجميعي الصاعد ونوصل تلك النقاط ببعضها البعض ونوصل بداية الخط بالمحور الأفقي، كما هو موضح في الشكل التالي:

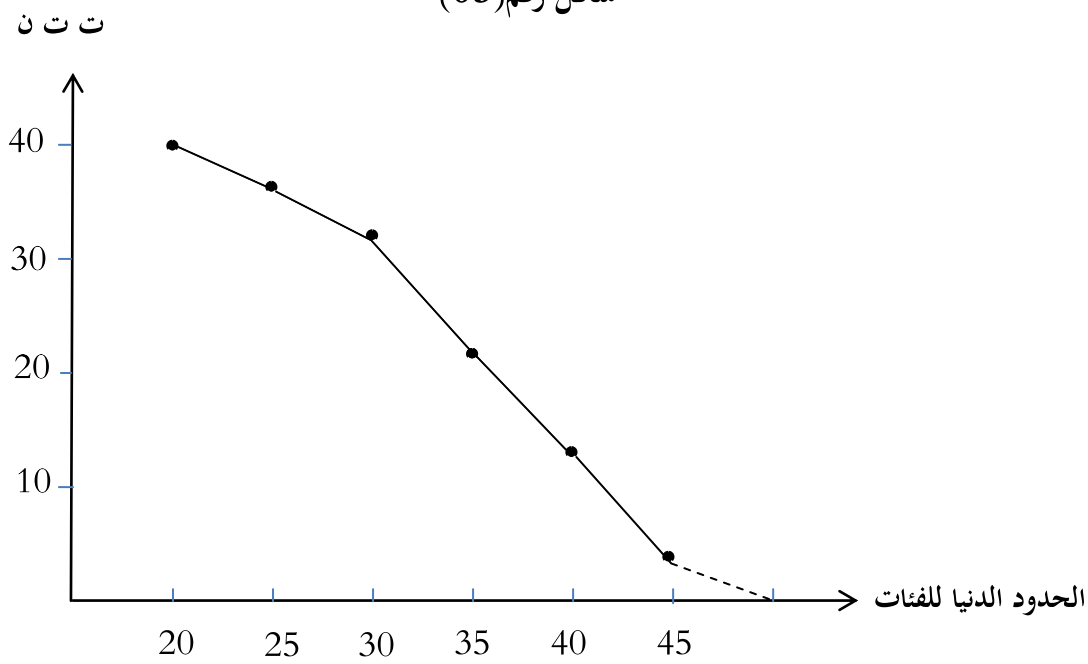
شكل رقم(04)



5.2. منحنى التكرار التجميعي النازل:

نكتب على المحور الأفقي الحدود الدنيا للفئات وعلى المحور العمودي التكرار التجميعي النازل ثم نوضح نقاط تتناسب مع الحدّ الأدنى لكل فئة والتكرار التجميعي النازل لها ونوصل بينها ونهاية الخط نوصله بالمحور الأفقي كما يوضحه لنا الشكل التالي:

شكل رقم(05)



تجدر الإشارة إلى أنه إذا استعملنا التكرارات النسبية بدلا من التكرارات المطلقة فإن شكل الرسومات البيانية لن يتغير.

3. أنواع الجداول التكرارية:

هناك أنواع مختلفة من الجداول التكرارية يستجيب كل منها لطبيعة البيانات الواردة ونذكر منها:

1.3. الجدول التكراري المنتظم:

وهو الجدول الذي يكون فيه طول الفئات متساوي في جميع الفئات مثل ما رأيناه في الجداول السابقة.

2.3. الجدول التكراري غير المنتظم:

وهو الجدول الذي يكون فيه طول فئة على الأقل لا يساوي طول بقية الفئات، ويتطلب التمثيل البياني لهذا النوع من الجداول تعديل التكرارات وذلك في حال رسم المدرج التكراري على غرار المضلع التكراري والمنحنى التكراري الذين يمكن رسمهما دون تعديل للتكرارات.

إذا رمزنا للتكرارات العادية ب**fi**ولطول الفئات ب**Ci** وللتكرار المعدّل ب$\overline{fi}$فإنه يتم حسابه وفق العلاقة التالية:

$$\overline{fi}=\frac{fi}{ci}$$

مثال: الجدول التالي يمثل الأجور الأسبوعية ل85 عاملا في إحدى الشركات، والمطلوب إيجاد التكرار المعدل.

جدول رقم(07)

الفئات	]40-30]	]60-40]	]65-60]	]80-65]
التكرار	10	40	20	15

الحل:ندرج الحسابات اللازمة في الجدول التالي:

جدول رقم(08)

الفئات	f_i	Ci	$\overline{fi}=\frac{fi}{c}$
]40-30]	10	10	1
]60-40]	40	20	2
]65-60]	20	5	4
]80-65]	15	15	1
المجموع	85	-	-

3.3. الجدول التكراري المغلق:

وهو الجدول الذي يكون فيه الحدّ الأدنى للفئة الأولى والحدّ الأعلى للفئة الأخيرة معلومين ومثال ذلك كل الجداول السابقة.

4.3. الجدول التكراري المفتوح:

وهو الجدول الذي يكون فيه إمّا الحد الأدنى للفئة الأولى أو الحد الأعلى للفئة الأخيرة أو كليهما غير معلوم والجداول التالية توضح هذا النوع.

الفئات	fi
أقل من 60	3
]70-60]	5
]80-70]	8
]90-80]	4
المجموع	20

جدول مفتوح من الأسفل

الفئات	fi
]60-50]	3
]70-60]	5
]80-70]	8
80 فأكثر	4
المجموع	20

جدول مفتوح من الأعلى

الفئات	fi
أقل من 60	3
]70-60]	5
]80-70]	8
80 فأكثر	4
المجموع	20

جدول مفتوح من الطرفين

5.3. الجدول التكراري المتصل:

وهو الجدول الذي يكون فيه الحدّ الأعلى للفئة السابقة هو نفسه الحدّ الأدنى للفئة اللاحقة لها ومثال ذلك الجداول السابقة.

6.3. الجدول التكراري المتقطع:

وهو الجدول الذي لا يكون فيه الحدّ الأعلى للفئة السابقة هو نفسه الحدّ الأدنى للفئة اللاحقة لها، والجدول التالي يوضح حدود الجدول المتقطع:

جدول رقم (9)

الفئات	التكرار
[50-59]	3
[60-69]	5
[70-79]	8
[80-89]	4
المجموع	20

تسمى حدود الفئات في جدول متقطع بالحدود الظاهرية ولتحويله إلى جدول متصل يكفي أن نطرح $0,5$ من الحدود الدنيا للفئات ونضيف $0,5$ للحدود العليا لها وعندئذ تظهر لنا حدود جديدة تسمّى بالحدود الفعلية للفئات، كما يبرزه الجدول التالي:

جدول رقم (10)

الفئات	التكرار
]59,5-49,5]	3
] 69,5-59,5]	5
]79,5-69,5]	8
]89,5-79,5]	4
المجموع	20

الفصل الرابع

مقاييس النزعة المركزية

بعد عرض طرق تنظيم وتبويب البيانات وتفريغها في جداول وتمثيلها بيانيا، سمح لنا ذلك بأخذ فكرة إجمالية عن الظاهرة محلّ الدراسة وتوضيح الإطار العام لتوزيع القيم، فأصبح من الممكن الوقوف على نمط التوزيع، إلاّ أن الاعتماد على تلك الطرق يبقى وصفا نظريا للتوزيعات التكرارية لا يمكن الاعتماد عليها لإصدار حكم نهائي عن الظاهرة المدروسة، لذلك أضحى من الضروري الاستعانة بطرق وأساليب أخرى تجعل القرار الذي سيتخذ أكثر عقلانية.

عند التمعن في الظواهر المحيطة بنا، والقيم التي تأخذها الوحدات الإحصائية المختلفة لهذه الظواهر نجد على العموم أن معظم القيم تتركز في الوسط أو قريبة منه، لذلك نلاحظ أن لها ميلا نحو الانتشار حول قيمة مركزية يسمى هذا الميل بالنزعة المركزية، وسميت بالنزعة لأنها ظاهرة طبيعية لا يمكن التحكم فيها.

تستعمل تلك القيمة المركزية لتنوب عن باقي المعطيات وتعبّر عن قيم المجموعة التي يشملها البحث، ويطلق على القيم التي تتمركز حولها أغلبية البيانات وتمثلها أفضل تمثيل اسم "مقاييس النزعة المركزية" أو "المتوسطات".

إنّ لهذه المقاييس أهمية كبيرة في التحليل الإحصائي وتختلف باختلاف الغرض الذي تستخدم فيه للتعبير عن هذه الظاهرة فيتوقف اختيار الباحث لأي من هذه المقاييس على طبيعة البيانات المتوفرة والتي يهتم بتحليلها فضلا عن الهدف المنشود من التحليل، وسندرس كل مقياس من هذه المقاييس بالتفصيل وهي: الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال، الوسط الهندسي، الوسط التوافقي والوسط التربيعي.

1. الوسط الحسابي (The Arithmetic Mean):

يعرف الوسط الحسابي بأنه مجموع القيم مقسوما على عددها[1]، وهو أحد أهم مقاييس النزعة المركزية وأكثرها استخداما كما يفضل على جميع المقاييس الأخرى لكونه يستعمل جميع البيانات ويستخدم الصيغ الرياضية.

[1]– أماني عزوزة، مرجع سابق، ص25.

يرمز له عادة بـ $\bar{X}$

1.1. حساب الوسط الحسابي لبيانات غير مبوبة:

وتسمى أيضا البيانات الخام RawData وتوجد عدة طرق لحساب الوسط الحسابي لهذا النوع من البيانات ندرجها كما يلي:

1.1.1. الطريقة المباشرة:

إذا رمزنا للقيم بالرموز $X_1, X_2, X_3 .... X_N$ وللوسط الحسابي بالرمز $\bar{X}$ ولعدد القيم بـ N يكون لدينا:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 \dots\dots\dots\dots.. + X_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = \frac{\sum X_i}{\mathrm{N}}$$

مثال: أحسب الوسط الحسابي للقيم التالية:

20، 9، 15، 11، 5، 18

الحل:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{\mathrm{N}} = \frac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6}{6} = \frac{20+9+15+11+5+18}{6} = \frac{78}{6} = 13$$

نلاحظ أن قيمة الوسط الحسابي تنتمي إلى مجال القيم المعطاة، أي بين أصغر قيمة (5) وأكبر قيمة (20) ولا يمكن أن تكون خارج مجال القيم.

2.1.1. طريقة الانحرافات عن وسط فرضي:

لتكن لدينا القيم X_1، $X_2, \dots\dots\dots X_N$ وعددها Nووسطها الحسابي $\bar{X}$ ولنفرض أنه لدينا وسط حسابي فرضي آخر نرمز له بالرمز A يختلف عن الوسط الحسابي الفعلي $\bar{X}$ وأن انحرافات الوسط الفرضي A عن القيمX_i يرمز لها بالرمز d_i بحيث تكون الانحرافات كمايلي:

$$d_1 = X_1 - A$$

$$d_2 = X_2 - A$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$d_N = X_N - A$$

وعليه تكون صيغة الوسط الحسابي $\bar{X}$ بطريقة الانحرافات عن وسط فرضي كمايلي:

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i}{N}$$

مثال: أحسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات عن وسط فرضي للقيم السابقة.

الحل:

أ. نفرض أن:

$A=11$ (وسط فرضي من بين القيم المعطاة).

$$d_1 = X_1 - A = 20 - 11 = 9$$

$$d_2 = X_2 - A = 9 - 11 = -2$$

$$d_3 = X_3 - A = 15 - 11 = 4$$

$$d_4 = X_4 - A = 11 - 11 = 0$$

$$d_5 = X_5 - A = 5 - 11 = -7$$

$$d_6 = X_6 - A = 18 - 11 = 7$$

لدينا $\varepsilon di = 12$ إذن: $\bar{X} = A + \frac{\varepsilon di}{N} =$

$$\bar{X} = 11 + \frac{12}{6} = 11 + 2 = 13$$

وهي نفس النتيجة التي تحصلنا عليها بالطريقة المباشرة

ب.نفرض أن $A=0$ (وسط فرضي لا يوجد ضمن البيانات المعطاة)

$$d_1=20-8=9$$

$$1d_2=9-8=$$

$$7d_3=15-8=$$

$$3d_4=11-8=$$

$$3d_5=5-8=-$$

$$10=d_6=18-8$$

$$\varepsilon di = 30$$

$$\bar{X}=8+\frac{30}{6}=8+5=13$$

نلاحظ أنه سواء كان الوسط الفرضي A من بين القيم المعطاة أو خارج مجالها فإن النتيجة تبقى نفسها.

3.1.1. الوسط الحسابي لمتتالية حسابية:

إذا كانت لدينا متتالية حسابية حدها الأول X_1 وحدها الأخر X_N وأساسها r فإن الوسط الحساب لها هو مجموع الحدين على 2 أي انه يقع في منتصف السلسلة تماما وتكون لدينا الصيغة التالية:

$$\bar{X}=\frac{X_1+X_N}{2}$$

مثال 01: أحسب $\bar{X}$ لمتتالية حسابية تتكون من خمسة حدود، حدّها الأول $X_1=3$ وأساسها $r=4$

الحل: قيم المتتالية حسب المعطيات وهي:

3، 7، 11، 15، 19

$$\bar{X}=\frac{X1+XN}{2}=\frac{3+19}{2}=11$$

وباستخدام الطريقة المباشرة نجد:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{\text{N}} = \frac{3+7+11+15+19}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

نلاحظ أن قيمة الوسط الحسابي هي نفسها باستخدام الطريقتين وتمثل واحدة من بين القيم المعطاة.

مثال 02: أحسب $\bar{X}$ لمتتالية حسابية حدّها الأول $X_1=1$ وأساسها r=4 وحدها الأخير $X_N = 29$

الحل: قيم المتتالية هي:

1،5، 9، 13، 17، 21، 25، 29

$$\bar{X} = \frac{X_1+X_N}{2} = \frac{1+29}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

نلاحظ أن $\bar{X}$ يتوسط قيم السلسلة في كلا المثالين حيث في المثال (01) تشكل قيمته أحد أرقام السلسلة (11) بينما لا توجد قيمته (15) ضمن السلسلة في المثال (02) إذن تجدر الإشارة إلى أن الوسط الحسابي يجب أن ينتمي إلى مجال القيم المعطاة وليس بالضرورة أن يشكل أحد تلك القيم.

2.1. حساب الوسط الحسابي لبيانات مبوبة:

إذا كانت لدينا بيانات في صورة جدول تكراري ذي فئات أو ما يسمى بالبيانات المبوبة *GroupedData* مثل ما تم التطرق له في الفصل السابق وأردنا حساب الوسط الحسابي لهذه البيانات فإنه يتوجب علينا حساب مراكز الفئات واعتبار هذه المراكز هي القيم القابلة للتكرارات المتواجدة أمام الفئة لأننا لا نستطيع الحصول على القيم الأصلية من الجدول فنعتبر أن القيم موزعة بانتظام داخل الفئة لذلك يكون مركزها هو أفضل ممثل لها، فإذا ضربنا كل مركز فئة في التكرار المقابل له نحصل على مجموع القيم في تلك الفئة وبجمع هذه المجاميع المقابلة لكل فئة نحصل على المجموع الكلي للقيم وبقسمته على مجموع التكرارات نحصل على الوسط الحسابي للتوزيع المدروس كما يلي:

1.2.1. الطريقة المباشرة:

$$\bar{X} = \frac{f_1 \times X_1 + f_2 \times X_2 + \cdots \dots \dots \dots \dots \dots + f_k \times X_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots \dots \dots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$
$$= \frac{\sum f_i X_i}{\sum f_i}$$

مثال: الجدول التالي يبين توزيع العمال حسب العمر في مؤسسة صناعية.

جدول رقم (01)

فئات العمر	[20-25[	[25-30[	[30-35[	[35-40	[40-45[	[45-50[	[50-55[	[55-60[	المجموع
عدد العمال	25	32	41	49	46	31	34	22	280

المطلوب: أحسب الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة.

الحل:

بما أن أعمار العمال بالتفصيل غير واضحة فإن مركز كل فئة يمثل متوسط العمر فيها وعليه يتم حساب الوسط الحسابي كما يلي:

جدول رقم (02)

الفئات	عدد العمال fi	مراكز الفئات Xi	$fiXi$
[20-25]	25	22,5	562,5
[25-30]	32	27,5	880
[30-35]	41	32,5	1332,5
[35-40]	49	37,5	1837,5
[40-45]	46	42,5	1955
[45-50]	31	47,5	1472,5
[50-55]	34	52,5	1785
[55-60]	22	57,5	1265
المجموع	280	-	11090

$$\bar{X}=\frac{\sum f_i X_i}{\sum f_i}=\frac{11090}{280}=39,61$$

نلاحظ أن قيمة الوسط الحسابي محصورة بين أدنى قيمة في البيانات المعطاة والتي تمثل الحد الأدنى للفئة الأولى 20 وأكبر قيمة والمتمثلة في الحد الأعلى للفئة الأخيرة.

2.2.1. طريقة الانحرافات عن وسط فرضي:

إذا كانت لدينا بيانات كبيرة من حيث الحجم وكثيرة من حيث العدد تنتج لدينا أرقام كبيرة جدا اعتمادا على الطريقة السابقة لذلك نلجأ إلى طريقة الوسط الفرضي لتبسيط الحساب، حيث نفرض وسطا حسابيا ونختاره من أحد مراكز الفئات لتسهيل الحساب لا غير، ونطبق الصيغة التالية:

$$\bar{X} = \mathrm{A} + \frac{\sum f_i\, d_i}{\sum f_i}$$

تجدر الإشارة إلى أن القيمة $\sum f_i\, d_i$ يمكن أن تكون موجبة أو سالبة أو معدومة.

مثال: من المثال السابق والمتعلق بتوزيع أعمار 280 عامل في مؤسسة صناعية (جدول رقم 01) أحسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات عن وسط فرضي:

الحل: نفرض وسطا فرضيا من مراكز الفئات $A=37,5$ فيكون لدينا الجدول التالي:

الفئات	fi	Xi	di=Xi-A	fidi
[20-25[	25	22,5	-15	-375
[25-30[	32	27,5	-10	-320
[30-35[	41	32,5	-5	-205
[35-40[	49	**A=37,5**	0	0
[40-45[	46	42,5	5	230
[45-50[	31	47,5	10	310
[50-55[	34	52,5	15	510
[55-60[	22	57,5	20	440
المجموع	280	-	-	590

$$\bar{X} = \mathrm{A} + \frac{\sum f_i\, d_i}{\sum f_i} = 37,5 + \frac{590}{280} = 39,61$$

3.2.1. الطريقة المختصرة:

تستخدم هذه الطريقة في الجداول التكرارية المنتظمة فقط، وتقوم على فكرة اختصار الانحرافات عن وسط فرضي بقسمتها على طول الفئة، فإذا رمزنا للانحراف المختصر بالرمز Ui ولطول الفئة بـ C والانحراف عن وسط فرضي بـ di فإن:

$$Ui = \frac{di}{C} = \frac{X_{i-A}}{C}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد: $di=Ui.C$

ولدينا العلاقة السابقة والخاصة بطريقة الانحرافات عن وسط فرضي كما يلي:

$$\bar{X} = \text{A} + \frac{\sum f_i \, d_i}{\sum f_i}$$

نعوض فيها قيمة di نحصل على قانون $\bar{X}$ بالطريقة المختصرة وهو كما يلي:

$$\bar{X} = A + \frac{\sum f_i \, U_i}{\sum f_i} . C$$

تجدر الإشارة كذلك إلى أن $\sum f_i \, U_i$ يمكن أن تكون موجبة أو سالبة أو معدومة.

مثال: أحسب الوسط الحسابي بالطريقة المختصرة من المثال السابق.

الحل: باعتبار دوما أن $A=37.5$ فإنه يكون لدينا الجدول التالي:

جدول رقم (04)

fiui	$Ui=\frac{di}{c}$	Di	fi	الفئات
75-	-3	15-	25	]25-20]
-64	-2	-10	32	]30-25]
-41	-1	-5	41	]35-30]
0	0	0	49	]40-35]
46	1	5	46	]45-40]
62	2	10	31	]50-45]
102	3	15	34	]55-50]
88	4	20	22	]60-55]
118	-	-	280	المجموع

$$\bar{X} = \mathrm{A} + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}.c=37,5+\frac{118}{280}.5=39,61$$

3.1. الوسط الحسابي المرجح أو الموزون (The WeightedMean):

عندما نكون بصدد بيانات غير مبوبة ونحسب $\bar{X}$فإن القيم لها نفس الوزن (الأهمية) بينما في بعض الأحيان تكون لدينا قيم لها أوزان مختلفة في هذه الحالة نضرب كل قيمة في وزنها ونقسم المجموع على مجموعة الأوزان (المعاملات) فنحصل على الوسط الحسابي المرجح أو الموزون.

إذا رمزنا للقيم بـ $\mathrm{X}_1, X_2, X_3 \dots X_N$ ولأوزانها بالرموز $w_1, w_2, w_3 \dots \dots w_N$ على الترتيب، يتم حساب الوسط الحسابي المرجح كما يلي:

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{X_1 \times w_{1+} X_2 \times w_{2+} \dots\dots\dots\dots\dots\dots X_n \times w_N}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots \dots\dots + w_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i w_i}{\sum wi} = \frac{\sum X_i w_i}{\sum wi}$$

مثال: أوجد معدل أحد الطلبة عند تخرجه من الجامعة إذا كانت علاماته في ست مواد هي: 10، 14، 15، 16، 13، 12، وكانت معاملات هذه المواد هي: 2، 3، 2، 1، 1، 3 على الترتيب.

الحل:

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{\sum X_i w_i}{\sum wi} = \frac{(10X2)+(14X3)+(15X2)+(16X1)+(13X1)+(12X3)}{2+3+2+1+1+3}$$

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{157}{12}=13,08$$

أما لو تم حساب الوسط الحسابي بدون أوزان (معاملات) فإنه ينتج لدينا:

$$33\overline{\mathrm{X}} = \frac{80}{6}=13,$$

4.1. خواص الوسط الحسابي:

- المجموع الجبري لانحرافات قيم المجموعة عن وسطها الحسابي يساوي الصفر فإذا رمزنا لـ

$X_i - \bar{X}$ بـ x_i (x_i صغيرة) نجد:

$$\sum(X_i-\bar{X})=\sum x_i=0$$

- مجموع مربع إنحرافات قيم المجموعة عن وسطها الحسابي هو أصغر من مجموع مربع انحرافات قيم المجموعة عن آية قيمة أخرى أي:

$$\sum(X_i-\bar{X})^2<\sum(X_i-A)^2 \Rightarrow \sum x_i^2<\sum {d_i}^2$$

مثال: إذا كانت لدينا القيم التالية: 10، 12، 9، 7، 15 والمطلوب إثبات صحة الخاصيتين السابقتين.

الحل:بفرض أن القيمة المختارة هي A=8

جدول رقم(05)

القيم xi	Xi-$\bar{X}$	$(Xi$-$\bar{X})$	Xi-A	$(Xi-A)^2$
10	0,6-	0,36	2	4
12	1,4	1,96	4	16
9	-1,6	2,56	8	64
7	-3,6	12,96	-1	1
15	4,4	19,36	7	49
المجموع	$\sum(X_i-\bar{X})=0$	$\sum(X_i-\bar{X})^2=37{,}2$	-	$\sum(Xi-A)^2=134$

$$\bar{X}=\frac{\sum \mathrm{xi}}{N}=\frac{53}{5}=10{,}6$$

تبين لنا من خلال الجدول أن:

$$\sum(\boldsymbol{X_i}-\bar{X})=0$$

$$\sum(\boldsymbol{Xi}-\bar{X})^2<\sum(\boldsymbol{Xi}-\boldsymbol{A})^2$$

$$37,2<134$$

5.1. مزايا وعيوب الوسط الحسابي:

للوسط الحسابي مزايا يتمتع بها وعيوب نذكر منها:

✓ **المزايا:**

- يعتبر من المقاييس الأكثر استخداما لأنه سهل الفهم والحساب.

-يعدّ من أهم المقاييس الإحصائية.

-يدخل في حسابه جميع القيم المعطاة.

-قابل للعمليات الجبرية.

-يستخدم في حساب كثير من المقاييس والاختبارات الإحصائية الأخرى.

✓ **العيوب:**

-يتأثر بالقيم الشاذة (المتطرفة) فينحاز لها.

-لا يمكن إيجاده من الجداول التكرارية المفتوحة، حيث يتطلب حسابه إلى معرفة مركز الفئة وهو ما يتعذر إيجاده في الجداول المفتوحة.

-يصعب حسابه في حالة البيانات الوصفية(النوعية) باعتباره من المتوسطات الكمية.

-لا يمكن تحديده بيانيا.

-يتأثر بأخطاء المعاينة حيث أن أي خطأ في قياسات العينة يؤثر على قيمته.

2. الوسيط (The Median):

هو المقياس الثاني من مقاييس النزعة المركزية من حيث الأهمية، ويعرّف بأنه القيمة التي تتوسط القيم والتي

تقسم البيانات إلى قسمين متساويين بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا[1] ويرمز له عادة بـ: *Med*

1.2. حساب الوسيط لبيانات غير مبوبة:

لابدّ من اتباع الخطوات التالية:

أ. ترتيب البيانات ترتيبا تصاعديا أو تنازليا.

ب. حساب رتبة (موقع) الوسيط وفق الصيغة: $\frac{N+1}{2}$، N هو عدد القيم.

ج. البحث عن القيمة التي تقابل الرتبة $\frac{N+1}{2}$ وتلك هي قيمة الوسيط .

مثال 01: أوجد قيمة الوسيط للبيانات التالية:

25، 4، 7، 22، 9، 13، 2

الحل:

أ. القيم بعد الترتيب:

2، 4، 7، 9، 13، 22، 25، وعددها 7 قيم.

ب. رتبة الوسيط:

$$\frac{N+1}{2}=\frac{7+1}{2}=\frac{8}{2}=4$$

ج. القيمة الرابعة ضمن البيانات هي 9 وتمثل الوسيط

مثال 02:أوجد الوسيط للقيم التالية:

4، 9، 1، 10، 8، 13، 6، 14.

[1]- شريف شطيبي، مرجع سابق، ص40.

الحل:

أ. القيم بعد الترتيب:

1، 4، 6، 8، 10، 12، 13، 14 عددها 8 قيم

ب. رتبة الوسيط:

$$\frac{N+1}{2}=\frac{8+1}{2}=\frac{9}{2}=4.5$$

ج. إيجاد القيمة التي تقابل الرتبة:

لا توجد أي قيمة ترتيبها 4,5 لذلك يقع الوسيط بين القيمة الرابعة والقيمة الخامسة، ويكون الوسط الحسابي لهاتين القيمتين هو قيمة الوسيط.

$$Med=\bar{X}=\frac{8+10}{2}=\frac{18}{2}=9$$

2.2. حساب الوسيط لبيانات مبوبة:

لحساب الوسيط في بيانات مبوبة نستخدم القانون التالي:

$$Med = L_1 + \frac{\frac{\sum fi}{2} - \sum f1}{f_{Med}}.C$$

حيث: Med : الوسيط

$\mathbf{L_1}$: الحد الأدنى للفئة الوسطية.

$\frac{\sum f_i}{2}$:رتبة أو موقع الوسيط

$\sum f_1$:مجموع التكرارات السابقة لموقع الوسيط أو (ت ت ص للفئة التي تسبق الفئة الوسطية)

f_{Med}:التكرار العادي للفئة الوسطية.

C: طول الفئة الوسطية.

إن الفئة التي تقابل رتبة الوسيط والتي تساوي نصف مجموع التكرارات أو التي تكبرها مباشرة في عمود التكرار التجميعي الصاعد تسمى الفئة الوسيطية(*Median class*)

مثال:

أحسب الوسيط من بيانات الجدول رقم (01) (أعمار 280 عامل).

الحل:

نحسب رتبة الوسيط:

$$140=\frac{280}{2}=\frac{\sum fi}{2}$$

ونبحث عنها في عمود ت ت ص فإن لم نجدها نختار تلك القيمة التي تكبرها مباشرة .

جدول رقم (06)

ت ت ص	***fi***	**الفئات**
25	25	]25-20]
57	32	]30-25]
98	41	]35-30]
147	49	]40-35]
193	46	]45-40]
224	31	]50-45]
258	34	]55-50]
280	22	]60-55]

بما أن رتبة الوسيط تساوي 140 وهي غير موجودة في عمود ت ت ص نحدّد التي تكبرها مباشرة وهي 147 والفئة المقابلة لها هي [35-40[وهي الفئة الوسطية، وتكرارها هو 49 أمّا مجموع التكرارات التي تسبق هذه الفئة أو التكرار التجميعي الصاعد الذي يسبق مباشرة رتبة الوسيط هو 98 وعليه إذا قمنا بتعويض هذه القيم في قانون الوسيط نتحصل على ما يلي:

$$Med = L1 + \frac{\frac{\sum fi}{2} - \sum f1}{fMed} . c$$

$$Med = 35 + \frac{140-98}{49} . 5 = 39{,}29$$

3.2. المقاييس الشبيهة بالوسيط:

رأينا أن الوسيط يستخدم لتحديد القيمة التي تتوسط البيانات وتقع في منتصفها فتقسمها إلى قسمين متساويين تماما، ويمكن أن تبرز الحاجة إلى تقسيمات أخرى للبيانات كأن تقسم إلى أربعة أقسام متساوية أو إلى عشرة أقسام أو إلى مئة قسم، وتلك هي المقاييس الشبيهة بالوسيط من حيث طريقة الحساب وتسمّى أيضا مشتقات الوسيط.

1.3.2. الربيعات (Quartiles):

هي قيم ثلاث تقسم البيانات إلى أربعة أقسام متساوية كل قسم يمثل 25% من البيانات وتسمى الربيع الأول Q_1، الربيع الثاني Q_2، والربيع الثالث Q_3.

رتبة Q_1 في بيانات غير مبوبة هي: $\frac{N+1}{4}$ أما في البيانات المبوبة فهي $\frac{\sum fi}{4}$، رتبة Q_2 في بيانات غير مبوبة هي: $\frac{2(N+1)}{4}$ وهي نفس رتبة الوسيط: $\frac{N+1}{2}$ وكذلك في بيانات مبوبة هي $\frac{\sum fi}{2}$ أمّا Q_3 فرتبته في بيانات غير مبوبة هي: $\frac{3(N+1)}{4}$ ورتبته في بيانات مبوبة هي $\frac{3N}{4}$ ونكتب $\frac{3\sum fi}{4}$ باعتبار أن $N=\sum fi$

2.3.2. العشيرات (Deciles):

وهي تسع قيم تقسم البيانات إلى عشرة أقسام متساوية كل قسم يمثل 10% من البيانات وهي من العشير الأوّل إلى العشير التاسع ويرمز لها بالرموز: $D_1, D_2, \ldots .D_9$ على التوالي رتبة D_1 في بيانات غير مبوبة هي

$\frac{N+1}{10}$ أما في البيانات المبوبة فهي $\frac{N}{10}$ أو $\frac{\sum fi}{10}$ورتبة D_2هي $\frac{2(N+1)}{10}$ في بيانات غير مبوبة و $\frac{2N}{10}$ في بيانات مبوبة، وهكذا إلى أن نصل إلى D_9الذي تكون رتبته في البيانات غير المبوبة $\frac{9(N+1)}{10}$ وفي البيانات المبوبة $\frac{9N}{10}$ علما أن D_5هو نفسه الوسيط.

3.3.2. المئينات(Percentiles):

وهي تسعة وتسعون قيمة تقسم البيانات إلى 100 قسم متساو، كل قسم يمثل 1% من البيانات وهي من المئين الأول إلى المئين التاسع والتسعون ويرمز لها بالرموز: $P_1, p_2, \ldots\ldots p_{99}$على التوالي.

رتبة P_1هي $\frac{(N+1)}{100}$ في بيانات غير مبوبة و في بيانات مبوبة $\frac{N}{100}$.

أما رتبة P_2 فهي $\frac{2(N+1)}{100}$ في بيانات غير مبوبة و $\frac{2N}{100}$ في بيانات مبوبة.

ورتبة P_{65}على سبيل المثال فهي $\frac{65(N+1)}{100}$ في بيانات غير مبوبة و $\frac{65N}{100}$ في بيانات مبوبة وعليه فإنه رتبة P_{99}وهو المئين الأخيرفي بيانات غير مبوبة $\frac{99(N+1)}{100}$وفي بيانات مبوبة $\frac{99(N)}{100}$، فيتضح لنا أن المئين الذي يقسم البيانات إلى قسمين متساويين هو P_{50} وهو نفسه الوسيط.

-لا تعتبر هذه المقاييس من مقاييس النزعة المركزية إلاّ تلك التي تتساوى مع الوسيطوهي:

$D_5 - Q_2 - P_{50}$.

$$Med = Q_2 = D_5 = P_{50}$$

- طريقة الحساب:

بعد تحديد رتبة المقياس المراد حسابه يتم تعيين قيمته وفقا لرتبته وذلك بعد ترتيب القيم في بيانات غير مبوبة أمّا في البيانات المبوبة فتستخدم القانون التالي:

$$\text{قيمة المقياس} = \text{الحد الأدنى للفئة} + \frac{\text{رتبة المقياس} - \text{مجموع التكرارات السابقة للرتبة}}{\text{التكرار العادي للفئة}} X \text{طول الفئة}$$

مثال 01: لتكن لدينا القيم التالية:3، 17، 8، 19، 26، 1، 30.

أحسب الربيع الثالث والعشير السابع والمئين الثمانون.

الحل:

بعد ترتيب القيم ترتيبا تصاعديا يكون لدينا:

1، 3، 8، 17، 19، 26، 30.

-رتبة Q_3

$$6=\frac{3(7+1)}{4}=\frac{3(N+1)}{4}$$

-قيمة Q_3 هي القيمة السادسة وهي 26.

-رتبة D_7

$$\frac{7(N+1)}{10}=5,6=\frac{7(7+1)}{10}$$

-قيمة D_7 هي بين القيمتين الخامسة والسادسة أي بين 19 و 26 بحيث يبعد عن القيمة الخامسة ب 0,6 (60%) من المسافة الفاصلة بين القيمتين الخامسة والسادسة .

$$D_7=19+0,6(26-19)=23,2$$

$$\frac{80(N+1)}{10} = P_{80}\text{رتبة}=\frac{8(7+1)}{100}=6,4$$

-قيمة P_{80} هي بين القيمتين السادسة والسابعة أي بين 26 و30 بحيث يبعد 0,4 أو 40% من المسافة الواقعة بينهما:

$$P_{80} = 26 + 0,4(30 - 26) = 27,6$$

مثال 02:

الجدول التالي يمثل تصنيف عدد من الأسر حسب انفاقهم اليومي بالدينار

جدول رقم (07)

فئات الانفاق	]0-100]	]100-200]	]200-300]	]300-400]	]400-500]	المجموع
عدد الأسر	1	6	10	4	2	23

-أحسب الربيع الثالث، العشير التاسع والمئين الستون.

الحل: نحسب التكرار التجميعي الصاعد

جدول رقم (08)

الفئات	*fi*	ت ت ص
]0-100]	1	1
]100-200]	6	7
]200-300]	10	17
]300-400]	4	21
]400-500]	3	24
المجموع	24	-

-الربيع الثالث:

رتبة $\frac{3(24)}{4}\frac{3\sum fi}{4} Q_3 = 18=$ من خلال التكرار التجميعي الصاعد لأوزان الطلبة نجد أن فئة Q_3 هي]300-400] وعليه:

$$Q_3 = L_1 + \frac{\frac{3\sum fi}{4} - \sum f1}{f_{Q_3}}.c = 300 + \frac{18-17}{4}.100 = 325$$

-العشير التاسع:

رتبة$D_9 = \frac{9(\sum fi)}{10} = \frac{9(24)}{10} = 21.6$ وعليه فإن فئة D_9 هي [400-500[

$$D9 = L_1 + \frac{\frac{9\sum fi}{10} - \sum f1}{f_{Q_9}} . c = 400 + \frac{21.6 - 21}{3} .100 = 420$$

-المئين الستون:

رتبة$P_{60} = \frac{60(\sum fi)}{100} = \frac{60(24)}{100} = 14.4$ وعليه فئة P_{60} هي [200 - 300[

$$P_{60} = L_1 + \frac{\frac{60\sum fi}{100} - \sum f1}{f_{p_{60}}} . c = 200 + \frac{14.4 - 7}{10} .100 = 274$$

$$\text{Med} = Q_2 = D_5 = p_{50}$$

4.2. تحديد الوسيط بيانيا:

يتم تحديد الوسيط بيانيا من خلال نقطة تقاطع كلا من منحنى التكرار التجميعي الصاعد ومنحنى التكرار التجميعي النازل، نسقط عمودا على المحور الأفقي فنجد قيمة الوسيط أما بالإسقاط على محور الأعمدة فنجد رتبة الوسيط.

كما يمكن استخدام منحنى ت ت ص فقط بإسقاط رتبة الوسيط عليه ومن ثم إسقاطها على المحور الأفقي وتمثل بذلك قيمة الوسيط.

يمكن أيضا بنفس المبدأ استخدام رتبة Q_1 ورتبة Q_3 وإسقاطهما لإيجاد قيمتهما على المحور الأفقي.

مثال: نستخدم بيانات الجدول رقم (1) لتحديد الوسيط بيانيا.

الحل:

جدول رقم (09)

الفئات	Fi	ت ت ص	ت ت ن
[20-25]	25	25	280
[25-30]	32	57	255
[30-35]	41	98	223
[35-40]	49	147	182
[40-45]	46	193	133
[45-50]	31	224	87
[50-55]	34	258	56
[55-60]	22	280	22
المجموع	280	-	-

- الربيع الأول:

رتبة $\frac{\sum fi}{4} = Q_1 = \frac{280}{4} = 70$ من خلال التكرار التجميعي الصاعد لأوزان الطلبة نجد أن فئة Q_1 هي [30-35] وعليه:

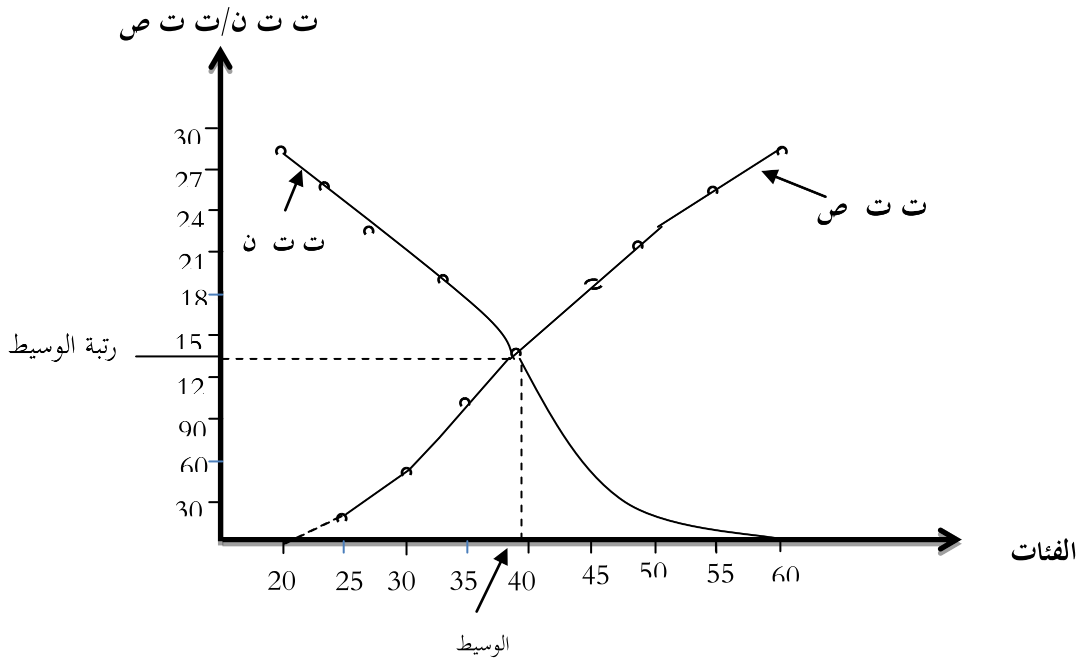
$$Q_1 = L_1 + \frac{\frac{\sum fi}{4} - \sum f1}{f_{Q_1}}.c = 30 + \frac{70-57}{41}.5 = 31.59$$

- الربيع الثالث:

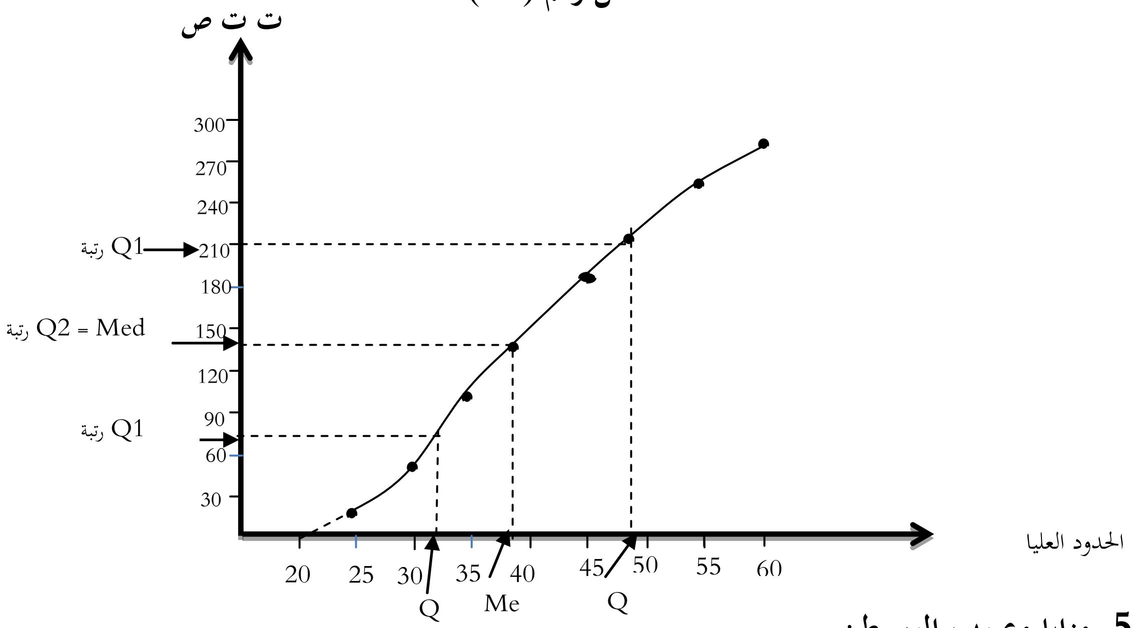
رتبة $\frac{3\sum fi}{4} = Q_3 = \frac{3(280)}{4} = 210$ من خلال التكرار التجميعي الصاعد لأوزان الطلبة نجد أن فئة Q_3 هي [45-50] وعليه:

$$Q_3 = L_1 + \frac{\frac{3\sum fi}{4} - \sum f1}{f_{Q_3}} . c = 45 + \frac{210 - 193}{31} .5 = 47.74$$

شكل رقم(01)



شكل رقم (02)



5.2. مزايا وعيوب الوسيط:

✓ **المزايا:**

- يصف البيانات بأكثر واقعية في حالة وجود قيم متطرفة ولا يتأثر بها.

- يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.

- يمكن تحديده بيانيا.

- لا يتأثر بالفئات غير المتساوية في الجداول غير المنتظمة.

- يعمل على توازن القيم من حيث عددها.

✓ **العيوب**:

- غير قابل للعمليات الجبرية.

-لا يدخل في حسابه جميع البيانات المعطاة بل يتأثر بترتيبها فقط.

-يصعب حسابه في حالة البيانات الوصفية(النوعية) المقاسة بمعيار إسمي.

-إذا كانت لدينا مجموعة كبيرة من البيانات فذلك يستغرق وقتا لترتيبها تصاعديا ومن ثم إيجاد قيمته حسب رتبته.

3. المنوال (**The Mode**):

المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها، وهو سهل الحساب ولا يوجد تأثير القيم الشاذة عليه. يمكن أن يكون للسلسلة العددية منوالا واحدا أو منوالان أو لا يكون لديها منوال على الإطلاق.

1.3. تحديد المنوال لبيانات غير مبوبة:

مثال: أوجد المنوال لكل من المجاميع التالية:

(a) 5 ،5 ،7 ،5 ،3 ،8 ،1 ،5 ،9 ،2 ،4 ،5

(b) 1 ،9 ،6 ،7 ،10 ،20 ،5 ،2 ،25 ،30

(c) 4 ،2 ،7 ،2 ،4 ،9 ،10 ،4 ،9 ،8 ،2

الحل :

(a) يوجد منوال واحد وهو 5 (يسمى التوزيع*unimodel*).

(b)لا يوجد منوال.

(c) يوجد منوالين وهما 4 و 2، ويسمى التوزيع في هذه الحالة ***bimodel***.

2.3. حساب المنوال لبيانات مبوبة:

تسمى الطريقة المتبعة لحساب وتحديد المنوال في هذه الحالة من البيانات طريقة الفروق وتنسب إلى بيرسون *Pearson*، وتسمى أيضا طريقة المدّ الداخلي، وتعتبر الفئة الأكبر تكرارا هي الفئة المنوالية ويتم التركيز على الفئتين السابقة والموالية لها على أساس أن التجمع للتكرار داخل الفئة المقابلة لأكبر تكرار يتأثر بالتجمعات المجاورة في الفئتين السابقة واللاحقة، ويتم تطبيق الصيغة التالية:

$$\text{Mod} = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2} . c$$

حيث: Mod : المنوال

L_1: الحد الأدنى للفئة المنوالية

Δ_1:الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة السابقة لها.

Δ_2: الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة اللاحقة لها.

C: طول الفئة المنوالية.

مثال: حدّد المنوال من بيانات الجدول رقم (01)

الحل: من خلال الجدول نلاحظ أن الفئة المنوالية هي التي تقابل أكبر تكرار وهي [35-40[كما يتبين لنا:

جدول رقم (10)

الفئات	[20-25[	[25-30[	[30-35[	[35-40[	[40-45[	[45-50[	[50-55[	[55-60[
fi	25	32	41	49	46	31	34	22

$$5.\text{Mod} = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2} . c = 35 + \frac{(49-41)}{(49-41)+(49-46)}$$

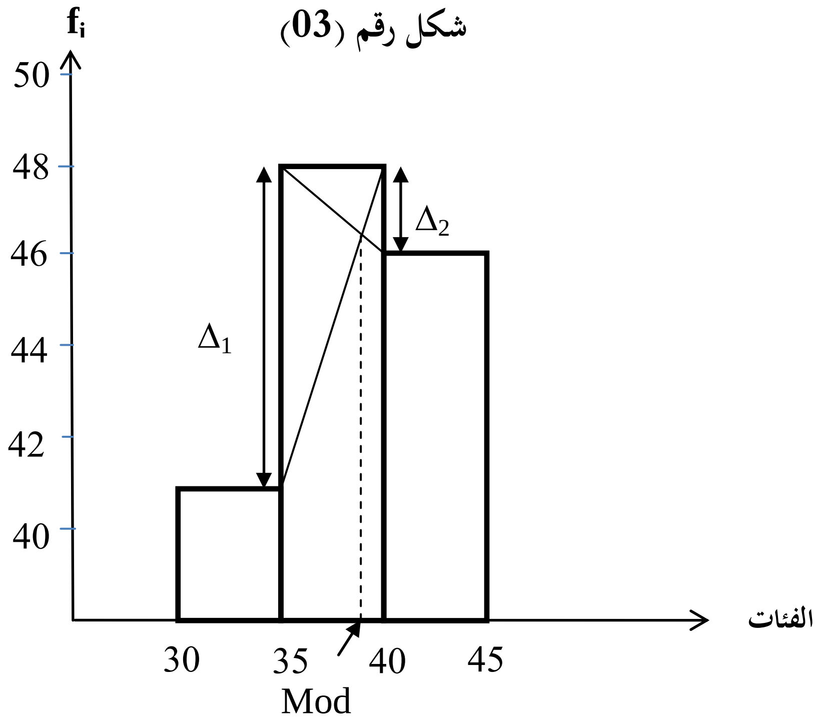
$$5 = 38{,}64 . \text{Mod} = 35 + \frac{8}{8+3}$$

3.3. تحديد المنوال بيانيا:

من مزايا المنوال أنه يمكن تحديده عن طريق الرسم مثل الوسيط وذلك برسم المدرج التكراري للفئات الثلاث وهي الفئة المنوالية وهي التي تقابل أكبر تكرار، الفئة التي تسبقها والفئة التي تليها.

ثم نوصل بخط مستقيم رأس الحد الأعلى للفئة المنوالية برأس الحد الأعلى للفئة التي تسبقها ورأس الحد الأدنى للفئة المنوالية برأس الحد الأدنى للفئة التي تليها، من تقاطع المستقيمين نسقط عمودا على المحور الأفقي تكون قيمة المنوال هي نقطة تقاطعه مع المحور الأفقي كما يبرزه الشكل الموالي اعتمادا على الجدول رقم (10).

شكل رقم (03)



4.3. إيجاد المنوال من التوزيع التكراري غير المنتظم:

في جدول تكراري غير منتظم لابدّ من تعديل التكرارات ولهذا الغرض نطبق الصيغة التالية:

$$\acute{f\imath}=\frac{fi}{c}$$

حيث:

$\acute{f\imath}$: هي التكرار المعدّل.

fi: هي التكرار المطلق.

C : هي طول الفئة.

مثال 01: أحسب المنوال من الجدول التكراري التالي ومثله بيانيا.

جدول رقم(11)

[95-90]	[90-80]	[80-60]	[60-50]	**الفئات**
10	30	40	10	**Fi**

الحل: نلاحظ أن طول الفئات غير متساوي وبالتالي نحن بصدد جدول تكراري غير منتظم ولحساب المنوال رياضيا وتمثيله بيانيا لا بدّ من تعديل التكرارات كما يوضحه لنا الجدول الموالي.

جدول رقم (12)

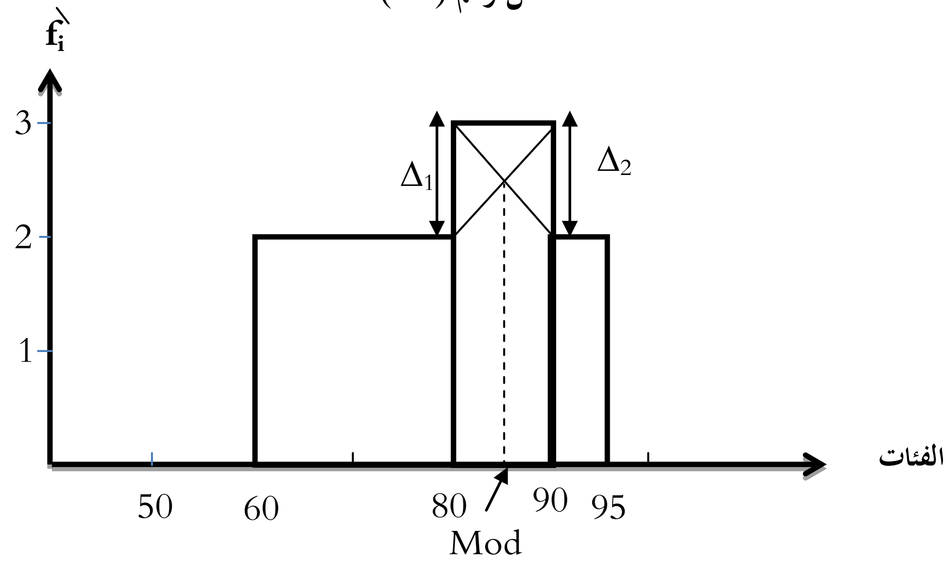
$\acute{f\imath}$**=fi/c**	**C**	**fi**	**الفئات**
1	10	10	[60-50]
2	20	40	[80-60]
3	10	30	[90-80]
2	5	10	[95-90]
8	**-**	**90**	**المجموع**

الفئة المنوالية هي [80-90[وهي التي تقابل أكبر تكرار معدّل

$$Mod = L1 + \frac{\Delta 1}{\Delta 1 + \Delta 2} . C = 80 + \frac{(3-2)}{(3-2)+(3-2)} . 10 = 85$$

وتجدر الإشارة إلى أنه يتم رسم المدرج التكراري في حالة الجدول غير المنتظم بالاعتماد على التكرارات المعدلة بدل التكرارات العادية.

شكل رقم (04)



مثال 02: أوجد المنوال من بيانات الجدول التالي ومثله بيانيا.

جدول رقم (13)

الفئات	]5-10]	]10-15]	]15-25]	]25-40]	]40-60]	المجموع
fi	15	45	70	60	20	210

الحل:

بما أن طول الفئات غير متساو فإننا نلجأ إلى تعديل التكرارات.

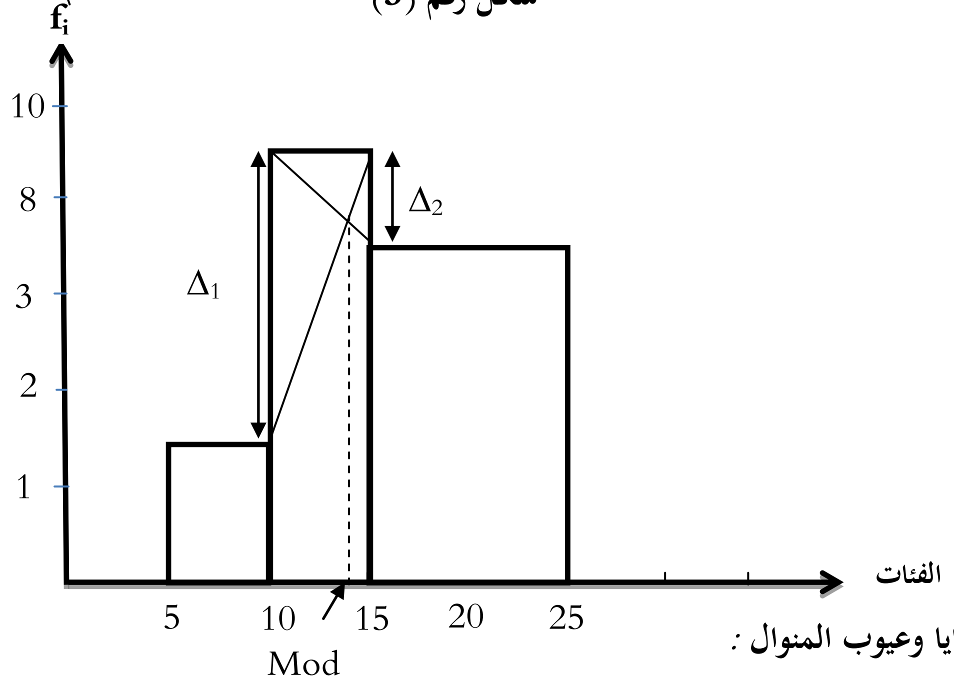
جدول رقم (14)

$\bar{f_i}=\frac{f_i}{c}$	C	f_i	الفئات
3	5	15	]10-5]
9	5	45	]15-10]
7	10	70	]25-15]
4	15	60	]40-25]
1	20	20	]60-40]

وعليه يتجلى واضحا أن الفئة المنوالية من خلال عمود التكرارات المعدلة هي [10-15[والتي تقابل أكبر تكرار وهو 9 وعليه يتم حساب المنوال كما يلي :

$$Mod= 10+\frac{(9-3)}{(9-3)+(9-7)}.5 = 13,75$$

شكل رقم (5)



5.3. مزايا وعيوب المنوال :

✓ **المزايا:**

- لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

- لا يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.

- لا يمكن تحديده بيانيا.

- يعتبر أحسن المتوسطات لوصف الظواهر النوعية.

✓ **العيوب:**

-لا يدخل في حسابه جميع القيم.

- يتأثر بالفئات غير المتساوية وبالتالي يتطلب الأمر تعديل التكرارات.

- لا يمكن حسابه إذا لم تكن للفئة المنوالية فئة سابقة وفئة لاحقة.

- **العلاقة بين الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال:**

لقد درس العالم الإحصائي كارل بيرسون *Karl Pearson* العلاقة بين هذه المتوسطات ووجد أنه في حالة التوزيعات التكرارية أحادية المنوال وذات التواء بسيط (درجة معقولة من التماثل) يكون لدينا:

$$\bar{X}\text{-}Mod=3\ (\bar{X}\text{-}Med)$$

وفي حالة التوزيعات ذات الالتواء الشديد لا تتحقق هذه العلاقة.

أما في حالة التوزيع التكراري المتماثل يكون لدينا:

$$\bar{X}=Mod=Med$$

وفي حالة التوزيع التكراري ذو التواء موجب (ذيل التوزيع يتجه نحو اليمين) يكون لدينا:

$$Mod<Med<\bar{X}$$

وفي حالة التوزيع التكراري ذو التواء سالب (ذيل التوزيع يتجه نحو اليسار) يكون لدينا:

$$\bar{X}< Med<Mod$$

-يستفاد من علاقة بيرسون من أجل:

-حساب أحد المتوسطات بدلالة المتوسطات الأخرى.

-وضع فرضية عن طبيعة شكل التوزيع.

-تقدير قيمة الوسط الحسابي من الجداول المفتوحة.

ويتم ذلك من خلال قيمتي الوسيط والمنوال حيث أنهما لا يرتبطان بالحد الأول للفئة الأولى والحد الأخير للفئة الأخيرة أو أحدهما.

4. مشتقات الوسط الحسابي:

هناك ثلاثة متوسطات مشتقة عن الوسط الحسابي وهي لا تقل أهمية عنه، بل وأحيانا يعتبر اعتمادها من أجل حساب المتوسط الملائم ضروريا وهي: الوسط الهندسي، الوسط التوافقي والوسط التربيعي.

1.4. الوسط الهندسي (The Geometric Mean):

يصادفنا في بعض الحالات والمواقف أننا نود وصف ظاهرة حسب نسبة تغيرها، أي نودّ وصف معدل تغيرات ظاهرة ما مثل تغيرات السكان، السرعة، الأسعار...الخ، في هذه الحالة لن يصف الوسط الحسابي الظاهرة محل الدراسة وصفا صحيحا وسليما[1] وعليه نلجأ إلى استخدام الوسط الهندسي، ويعرف بأنه الجذر النوني لحاصل ضرب (N) قيمة معطاة[2].

1.1.4. الوسط الهندسي لبيانات غير مبوبة:

إذا رمزنا للقيم بـ $X_1, X_2, X_3 .... X_N$ ولعددهابـ N وللوسط الهندسي بـ G فإن:

$$G = \sqrt[N]{X_1 \times X_2 \times \dots\dots\dots .. X_N}$$

ولتسهيل العملية الحسابية ندخل اللوغاريتم على الصيغة السابقة كما يلي:

$$\log G = \frac{1}{N} \log(X_1 \times X_2 \dots\dots\dots X_N)$$

---

[1]- السعدي رجال، مرجع سابق، ص105.

[2]- شريف شطيبي، مرجع سابق، ص54.

$$\log G = \frac{1}{N}(\log X_1 + \log X_2 + \cdots \ldots \ldots . \ldots + X_N) \Rightarrow \text{Log G} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \log X_i}{N}$$

نبحث عن القيمة G المقابل للقيمة $\log G$ في الجداول اللوغارتية أو بواسطة الآلة الحاسبة العلمية.

مثال: أوجد الوسط الهندسي للقيم التالية: 2، 3، 5، 7.

الحل: باستخدام الصيغة السابقة نجد:

$$\log G = \frac{\log \sum X_i}{N} = \frac{\log(2) + \log(3) + \log(5) + \log(7)}{4}$$
$$= \frac{0{,}3010 + 0{,}4771 + 0{,}6990 + 0{,}8451}{4}$$

$$log\ G = \frac{2{,}3222}{4} = 0{,}58 \ \Rightarrow \log G = 0{,}58 \Rightarrow \ \text{G} = 10^{0{,}58} \ = 3{,}80$$

لوحظ في الجزائر أن معدّل التضخم خلال تنفيذ المخطط الخماسي الأول منذ سنة 1980 ولخمس سنوات متتالية كان: 4%، 7%، 10%، 12%، 13%.

المطلوب: أوجد معدّل التضخم خلال المخطط الخماسي الأول

الحل: إذا استخدمنا الوسط الحسابي كمعدّل للتضخم نجد:

$$\overline{X} = \frac{\sum XI}{N} = \frac{4+7+10+12+13}{5} = \frac{46}{5} = 9{,}2\%$$

غير أنّه لا يأخذ في الحسبان ظاهرة التراكم التي يعرفها المفهوم التضخمي لذلك يكون الوسط الهندسي هو المقياس الملائم لإيجاد ذلك المعدّل ويكون كما يلي:

$$\text{G} = \sqrt[5]{4X7X10X12X13} = 8{,}47\%$$

مثال: يمثل الجدول الموالي عدد السكان في الجزائر خلال الفترة 2014-2021 بالملايين

جدول رقم(15)

السنة	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
عدد السكان	39,1	39,9	40,4	41,3	42,2	43,4	43,9	44,7

المصدر: الديوان الوطني للإحصاء (ONS)

المطلوب: أحسب معدل النموّ السكاني (نسبة التزايد السنوية).

الحل: يجب تحويل عدد السكان والذي يتبين أنه عبارة عن قيم مطلقة إلى قيم لوغاريتمية ثم نطبق القانون والجدول التالي يبين الحسابات اللازمة.

جدول رقم(16)

السنوات	عدد السكان	نسبة السكان	***Logxi***
2014	39,1	-	-
2015	39,9	1,0205	0,0088
2016	40,4	1,0125	0,0054
2017	41,3	1,0222	0,0095
2018	42,2	1,0218	0,0094
2019	43,4	1,0284	0,0122
2020	43,9	1,0115	0,0050
2021	44,7	1,0182	0,0078
المجموع	-	-	0,0581

تم حساب نسبة السكان بقسمة عدد السكان في سنة معينة على عدد السكان في السنة التي تسبقها.

$$\text{Log G}=\frac{\sum logxi}{N}=\frac{0{,}581}{7}=0{,}0083$$

ومنه G=1,019

وبطرح العدد 1 من G نحصل على معدل النمو (نسبة التزايد السنوية) والذي نرمز بـ r فنجد:

$$(r=1.9)\%0,019$$

كما يمكن تطبيق طريقة الفائدة المركبة حسب القانون التالي:

$$Pn=Po(1+r)^n$$

حيث:

Pn: يمثل عدد السكان في نهاية الفترة المدروسة.

Po: يمثل عدد السكان في بداية الفترة المدروسة.

r: يمثل معدل النمو.

n: يمثل عدد السنوات.

ومن القانون السابق لدينا:

$$(1+r)n=\frac{Pn}{Po}=>1+r=\sqrt[n]{\frac{P_n}{P_o}}$$

وبإدخال اللوغاريتم على الطرفين نجد:

$$Log(1+r)= log(\frac{P_n}{P_O})^{\frac{1}{n}}$$

$$Log(1+r)=\frac{1}{n}(logPn\text{-}log\ Po)=\frac{logPn-logPo}{n}$$

$$Log(1+r)=\frac{1,6503-1,5922}{7}=0,0083$$

$$1+r=1,019=>r=0,019=>r=1,9\%$$

نستنتج من خلال الطريقتين أنه إذا طلب حساب معدّل النمو لظاهرة معينة خلال فترة زمنية ما وكانت لدينا معطيات عن تطور تلك الظاهرة فإننا نطبق قانون الوسط الهندسي أو قانون الفائدة المركبة لأنهما الأنسبين لقياس معدلات النمو والتطور .

2.1.4. الوسط الهندسي لبيانات مبوبة:

إذا رمزنا لمراكز الفئات بـ $X_1, X_2, X_3 .... X_k$ ولتكرارتها بـ $f_1, f_2, ... f_k$ على الترتيب، فإن الوسط الهندسي وفق التعريف السابق لبيانات مبوبة يحسب كما يلي:

$$G = \sqrt[N]{X_1 \times X_1 \times X1 \times X_2 \times X_2 \times X_2 \times \dots \dots \dots \times X_k \times X_k \times X_k}$$

$$G = \sqrt[N]{{X_1}^{f_1} \times {X_1}^{f_2} \times \dots \dots \dots . \times {X_k}^{f_k}}$$

ولتسهيل الحساب ندخل اللوغاريتم كما يلي:

حيث: $f_1 + f_{2+\dots} ...._{+} f_{k=} \sum f_k = \mathrm{N}$

$$\log G = \frac{1}{\sum f_i} \log(X_1 f_1 \times X_1 f_2 \dots \dots \dots \dots \dots \dots . \times X_k f_k)$$

$$Log\ G = \frac{1}{\sum f_i}(f_1 log X_1 + f_2 log X_2 + \cdots \dots \dots \dots \dots \dots f_k log X_k) \Rightarrow$$

$$\log G = \frac{\sum_{k=1}^{N} f_i log X_i}{\sum f_i}$$

مثال: أحسب الوسط الهندسي من بيانات الجدول رقم (01) والمتعلق بتوزيع أعمار 280 عامل في مؤسسة صناعية.

الحل:

باستخدام الصيغة السابقة يبين الجدول التالي الحسابات اللازمة لحساب G .

جدول رقم (17)

الفئات	*Fi*	*Xi*	*logXi*	*fi.logXi*
]25-20[	25	22,5	1,35	33,75
]30-25[	32	27,5	1,44	46,08
]35-30[	41	32,5	1,51	61,91
]40-35[	49	37,5	1,57	76,93
]45-40[	46	42,5	1,63	74,98
]50-45[	31	47,5	1,68	52,08
]55-50[	34	52,5	1,72	58,48
]60-55[	22	57,2	1,76	38,72
المجموع	280	-	-	442,93

$$logG=\frac{\sum filogXi}{\sum fi}=\frac{442,93}{280}=1,58$$

$$G=10^{\,10,58}=38,02$$

3.1.4. الوسط الهندسي المرجح (الموزون):

إذا رمزنا للقيم بـ $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots X_N$ ولأوزانها بـ $w_1, w_2, \ldots\ldots\ldots\ldots w_N$ على الترتيب، فإنالوسط الهندسي لهذه القيم هو:

$$G = \sqrt[N]{X_1 w_1 \times X_2 w_2 \times \;\ldots\ldots\ldots \times X_N w_N}$$

ولتسهيل الحساب ندخل اللوغاريتم كما يلي:

حيث: $N= \sum w_i \; w_1+w_{2+\cdots\ldots\ldots\ldots+}w_{N=}$

$$\log G = \frac{1}{\sum \boldsymbol{w_i}} \log(X_1 w_1 \times X_1 w_2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . \times X_N w_N)$$

$$\text{Log G} = \frac{1}{\sum \boldsymbol{w_i}} (w_1 logX_1 + w_2 logX_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots w_N logX_N)$$

$$\log G = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i \, logX_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$$

مثال: إذا كان لديك القيم التالية:

9، 10، 12 وأوزانها هي: 3، 2، 1 على الترتيب

أحسب الوسط الهندسي المرجح.

الحل:

$$logG = \frac{\sum wilogXi}{\sum wi} = \frac{w1logX_1 + w2logX_2 + w3logX_3}{W1 + W2 + W3}$$

$$logG = \frac{3Log9 + 2log10 + 1log12}{3+2+1}$$

$$log\ G = \frac{3(0,954) + 2(1) + 1(1,079)}{6}$$

$$logG = \frac{2,862 + 2 + 1,079}{6} = \frac{5,941}{6} = 0,99$$

$$G = 10^{0,99} = 9,77$$

4.1.4. مزايا وعيوب الوسط الهندسي:

✓ **المزايا:**

- يصف الظواهر النسبية بأكثر واقعية (كتغير السعر، نمو السكان، نمو الإنتاج...)
- يدخل في حسابه جميع القيم.

- أقل تأثرا بالقيم المتطرفة مقارنة مع الوسط الحسابي.

- قابل للعمليات الجبرية.

✓ **العيوب:**

- لا يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.

- لا يمكن حسابه في حالة وجود قيمة سالبة أو معدومة.

- لا يمكن حسابه في حالة البيانات الوصفية.

2.4. الوسط التوافقي (*The HarmonicMean*):

يعرف الوسط التوافقي بأنه مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات القيم[1] ويرمز له ب H.

1.2.4. الوسط التوافقي لبيانات غير مبوبة:

إذا رمزنا للقيم بالرموز $X_1, X_2, \dots \dots \dots .. X_N$ ولعددها ب N وللوسط التوافقي ب Hوفقا للتعريف السابق نجد:

مقلوب القيم: $\frac{1}{X_1}, \frac{1}{X_2} \frac{1}{X_N} \dots\dots\dots\dots$

والوسط الحسابي لهذه المقلوبات هو $\frac{\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\cdots\dots\dots\dots+\frac{1}{X_N}}{N}$

وعليه فإن الوسط التوافقي هو:

$$H = \frac{N}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . + \frac{1}{X_N}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{X_i}}$$

مثال 01: لتكن لدينا السلسلة الإحصائية التالية:6، 11، 10، 8

[1]- مونية بجاوي، محاضرات في الإحصاء الوصفي، مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك، جامعة احمد بوقرة، بومرداس السنة الجامعية 2016-2017 ، ص37.

المطلوب: حساب الوسط التوافقي لتلك القيم.

الحل: باعتماد الصيغة السابقة نجد:

$$H=\frac{N}{\sum\frac{1}{Xi}}=\frac{4}{\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}=\frac{4}{0,48}=8,33$$

يستخدم الوسط التوافقي عندما نريد حساب العدد في الوحدة النقدية أو السرعة في الوحدة الزمنية أو القيمة في الوحدة القياسية، فمثلا السعر هو ناتج قسمة المبلغ الكلي (بالدينار مثلا) على عدد القطع (أو وزن الكميات التي اشتريناها) والسرعة هي ناتج قسمة المسافة (بالكلم مثلا) على الزمن (بالساعة مثلا) والإنتاجية الزراعية هي ناتج قسمة الإنتاج الزراعي (بالطن مثلا) على المساحة (بالهكتار مثلا)...الخ، لذلك المتوسط المناسب لقياس الزمن المتوسط أو متوسط عدد القطع التي يمكن شراؤها أو متوسط المساحة التي يجب زراعتها هو الوسط التوافقي غير أنه نادرا ما يستعمل في الإحصاء الاقتصادي ويحبذ الاعتماد عليه عندما نكون بصدد مقادير متناسبة عكسيا.

مثال 02: قطع دراج مسافة 600 كلم على أربع مراحل متساوية بسرعات مختلفة في كل مرحلة وذلك لطبيعة الطريق فكانت على التوالي: 25 كلم /ساعة، 50 كلم/ساعة، 30 كلم/ساعة و45 كلم/ ساعة.

المطلوب: ماهو متوسط السرعة عند هذا الدراج؟

الحل: 600 كلم على أربع مراحل متساوية يعني أن الدراج قطع مسافة 150 كلم لكل مرحلة فيكون لدينا:

- المرحلة الأولى قطعها في 6 ساعات ⟵ ($\frac{150}{25}$=6)
- المرحلة الثانية قطعها في 3 ساعات ⟵ ($\frac{150}{50}$=3)
- المرحلة الثالثة قطعها في 5 ساعات ⟵ ($\frac{150}{30}$=5)
- المرحلة الرابعة قطعها في 3 ساعات و 20 دقيقة ⟵ ($\frac{150}{45}$=3,20)

وعليه فإن الدراج قطع مسافة 600 كلم في 17 ساعة و20 دقيقة:

6+3+5+3,20=17,20

أي: 17,33 وبالتالي فإن:

متوسط السرعة $\frac{600}{17,33}$=34,62 كلم/ساعة.

-وباستخدام المتوسط التوافقي للسرعات نحصل على:

$$H=\frac{4}{\frac{1}{25}+\frac{1}{50}+\frac{1}{30}+\frac{1}{45}}=34,62$$

ولكن إذا اعتمدنا على الوسط الحسابي فإننا نحصل على:

$$\bar{X}=\frac{25+50+30+45}{4}=37,5$$

وبالتالي فإن الوسط التوافقي هو المقياس الأنسب لحساب متوسط السرعة.

2.2.4. الوسط التوافقي لبيانات مبوبة:

إذا رمزنا لمراكز الفئات بـ $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_k$ ولتكرارتها بـ $f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots f_k$ فإن الوسط التوافقي لبيانات مبوبة حسب التعريف السابق كما يلي:

$$H=\frac{f_1+f_2+\cdots\ldots f_k}{\underbrace{\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_1}}+\underbrace{\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_2}}\ldots\ldots+\underbrace{\frac{1}{X_k}+\frac{1}{X_k}+\frac{1}{X_k}}}=\frac{\sum f_i}{\frac{f_1}{X_1}+\frac{f_2}{X_2}+\cdots\ldots\frac{f_k}{X_k}}=\frac{\sum f_i}{\sum_{i=1}^{N}\frac{f_i}{X_i}}$$

مثال: أحسب الوسط التوافقي من بيانات الجدول رقم (01): (أعمار 280 عامل)

الحل: الجدول التالي يوضح الحسابات اللازمة:

جدول رقم (18)

الفئات	fi	Xi	$\frac{fi}{Xi}$
]25-20]	25	22,5	1,11
]30-25]	32	27,5	1,16
]35-30]	41	32,5	1,26
]40-35]	49	37,5	1,31
]45-40]	46	42,5	1,08
]50-45]	31	47,5	0,65
]55-50]	34	52,5	0,65
]60-55]	22	57,2	0,38
المجموع	280	-	7,6

$$H=\frac{\sum fi}{\sum\frac{fi}{Xi}}=\frac{280}{7,6}=36,84$$

3.2.4. الوسط التوافقي المرجح (الموزون):

إذا رمزنا للقيم بـ $X_1, X_2, \dots \dots \dots \dots .. X_N$ ولأوزانها بـ $w_1, w_2, \dots \dots \dots \dots .. w_N$ على الترتيب، فإن الوسط التوافقي حسب هو التعريف هو:

$$H=\frac{\mathrm{N}}{\frac{w1}{X_1}+\frac{w2}{X_2}+\cdots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .+\frac{wN}{X_N}}=\frac{\mathrm{N}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{wi}{X_i}}$$

مثال: حصل طالب على العلامات التالية في أربعة مقاييس كالتالي:

13، 10، 14، 12 فإذاعلمت أن لهذه العلامات أوزان هي: 2، 3، 1، 2 على التوالي، ما هو الوسط

التوافقي للعلامات؟

الحل:

$$59,11 \; H = \frac{N}{\sum \frac{wi}{xi}} = \frac{8}{\frac{2}{13}+\frac{3}{10}+\frac{1}{14}+\frac{2}{12}} = \frac{8}{0,69} =$$

4.2.4. مزايا وعيوب الوسط التوافقي:

✓ **المزايا:**

- يدخل في حسابه جميع القيم.
- قابل للعمليات الجبرية.
- يصف الظواهر النسبية بأكثر واقعية.

✓ **العيوب:**

- يتأثر بالقيم المتطرفة خاصة تلك المتطرفة في الصّغر.
- في حالة وجود قيمة تساوي الصفر لا يصبح له معنى.
- لا يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.

3.4. الوسط التربيعي:

يعرّف الوسط التربيعي بأنه الجذر التربيعي لمتوسط مربع القيم[1] ويرمز له بـ: M

1.3.4. الوسط التربيعي لبيانات غير مبوبة:

إذا رمزنا للقيم بـ $X_1, X_2, \dots \dots \dots .. X_N$ ولعددها بـ N وللوسط التربيعي بـ M فإن:

[1]–أماني عزوزة، مرجع سابق، ص47.

$$M=\sqrt{\frac{{X_1}^2+{X_2}^2+\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots+{X_N}^2}{N}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=N}^{N}{X_i}^2}{N}}$$

مثال: لتكن لدينا السلسلة الإحصائية التالية:

4، 8، 9، 2، 10.

-أحسب الوسط التربيعي.

الحل:

$$M=\sqrt{\frac{4^2+8^2+9^2+2^2+10^2}{5}}=\sqrt{\frac{265}{5}}=\sqrt{53}=7,28$$

2.3.4. الوسط التربيعي لبيانات مبوبة:

إذا رمزنا لمراكز الفئات بـ $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots X_k$ ولتكراراتها بـ $f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots\ldots f_k$ على الترتيب فإن:

$$M=\sqrt{\frac{f_1{X_1}^2+f_2{X_2}^2+\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f_k{X_k}^2}{f_1+f_2+\cdots\ldots\ldots.+f_k}}$$
$$=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}f_{i_i}X_i^2}{\sum f_i}}$$

مثال: أحسب الوسط التربيعي من بيانات الجدول رقم (01) (أعمار 280 عامل)

الحل: يبين الجدول التالي الحسابات اللازمة.

جدول رقم (19)

$fiXi^2$	Xi^2	Xi	fi	الفئات
12656,25	506,25	22,5	25	]25-20]
24200	756,25	27,5	32	]30-25]
43306,25	1056,25	32,5	41	]35-30]
68906,25	1406,25	37,5	49	]40-35]
83087,5	1806,25	42,5	46	]45-40]
69943,75	2256,25	47,5	31	]50-45]
93712,5	2756,25	52,5	34	]55-50]
72737,5	3306,25	57,2	22	]60-55]
468550	-	-	280	**المجموع**

$$M=\sqrt{\frac{\sum fiXi^2}{\sum fi}}=\sqrt{\frac{468550}{280}}=\sqrt{1673,39}=40,91$$

3.3.4. الوسط التربيعي المرجح (الموزون):

إذا كان للقيم أوزان أو معاملات مختلفة يمكن حساب الوسط التربيعي المرجح بالصيغة التالية:

$$M=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i {X_i}^2}{\sum_{i=1}^{N} Wi}}$$

مثال: أحسب الوسط التربيعي من المثال السابق (علامات الطالب في أربعة مقاييس).

الحل:

$$M=\sqrt{\frac{\sum wiXi^2}{\sum wi}}=\sqrt{\frac{2(13)^2+3(10)^2+1(14)^2+2(12)^2}{8}}$$

$$M = \sqrt{\frac{338+300+196+288}{8}} = \sqrt{\frac{1122}{8}} = \sqrt{140,25} = 11,84$$

يترتب الوسط الحسابي ومشتقاته أي الوسط الهندسي والوسط التوافقي والوسط التربيعي كمايلي:

$$H<G<\bar{X}<M$$

الفصل الخامس

مقاييس التشتت

لقد رأينا في الفصل السابق أن مقاييس النزعة المركزية تعطينا فكرة عامة عن البيانات التي حسبت منها، لذلك فهي تصف لنا فقط جانب الاتجاه العام للقيم، ويمكن من خلالها تحديد القيمة التي تتركز حولها معظم القيم وعليه فهي لا تكفي لوحدها لتحليل ووصف البيانات ومقارنة التوزيعات التكرارية حيث أنها لا تعطينا درجة تجانس أو عدم تجانس القيم مع بعضها، لذا توجب البحث عن مقاييس أخرى تمكننا من وصف الظاهرة محل الدراسة بدقة أكثر وتعطينا معلومات عن مدى تجانس أو انتشار البيانات الإحصائية حول قيمة مركزية هذه المقاييس تدعى مقاييس التشتت.

يعرّف التشتت لمجموعة من القيم بأنه درجة التفاوت أو الاختلاف بين قيم هذه المجموعة، فإذا كانت هذه الأخيرة متقاربة من بعضها البعض يكون التشتت صغيرا، وإذا كانت متباعدة يكون التشتت كبيرا.

قد تشترك مجموعات في متوسط وتختلف فيما بينها بمدى تجانس أو تشتت القيم حول مقاييس النزعة المركزية.

فرضا لدينا خمسة أشخاص في مجموعتين أجورهم الشهرية ب(دج) لكل فرد كما يلي:

	1	2	3	4	5
المجموعة الأولى	45000	45000	45000	45000	45000
المجموعة الثانية	30000	35000	38000	42000	8000

نجد أن الوسط الحسابي للمجموعتين متساوي ويقدّر بـ 45000 دج ونلاحظ أن قيم المجموعة الأولى تامة التجانس يعني أن انتشارها أو تباعدها يساوي الصفر لذلك فإن الوسط الحسابي يمثلها أصدق تمثيل، بينما قيم المجموعة الثانية غير متجانس والفروق في الأجور كبيرة، لذلك يفقد الوسط الحسابي الكثير من قيمته كممثل لها، عندئذ يتوجب التركيز على مدى تقارب وتباعد القيم عن بعضها البعض من خلال دراسة مقاييس التشتت وهي

نوعان:

-**مقاييس التشتت المطلق**: ويقصد بها تلك المقاييس التي تقيس مقدار التشتت حول المتوسط مقدّرا بوحدات تقيس قيم الظاهرة نفسها مثل: الدينار، العلامة، الكغ...الخ.

- **مقاييس التشتت النسبي**: وهي أن ننسب مقياس التشتت إلى أحد مقاييس المتوسطات والذي يلائم هذا المقياس.

1. مقاييس التشتت المطلق:

1.1. المدى (TheRange)[1]:

وهو الفرق بين أعلى قيمة وأصغر قيمة، ويعتمد بشكل كامل على القيمتين المتطرفتين، وهو من أبسط مقاييس التشتت مفهوما وتطبيقا وحسابا باعتباره الوسيلة المباشرة لمعرفة مدى تقارب القيم أو تباعدها في أي توزيع ويرمز له بـ R ويعطى بالعلاقة التالية:

$$R = x_{max} - x_{min}$$

حيث أن x_{min} تمثل أصغر قيمة و x_{max} تمثل أكبر قيمة.

مثال: أحسب المدى للقيم التالية:

30، 8، 25، 19، 6، 9، 7، 8، 10.

الحل: $R = x_{max} - x_{min} = 30-6=24$

في البيانات المبوبة، يمكن حساب المدى بطريقتين إمّا الفرق بين مركز آخر فئة ومركز أوّل فئة أو الفرق بين الحدّ الأعلى للفئة الأخيرة والحدّ الأدنى للفئة الأولى، وتفضل الطريقة الأولى لكونها تعمل على إلغاء أثر وجود قيم متطرفة (شاذة).

[1]-شريف شطيبي، مرجع سابق، ص74.

- **مزايا وعيوب المدى:**

✓ **المزايا:**

- أبسط المقاييس وأسهلها.
- يمكّننا من الحصول على فكرة عامة عن تشتت القيم.
- كثير الاستخدام في مراقبة الجودة.

✓ **العيوب:**

- لا يعطي تصورا واضحا ودقيقا عن مدى انتشار القيم.
- لا يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.
- يتأثر بالقيم المتطرفة فهو يهتم بها ولا يهتم بتوزيع بقية القيم.

2.1. الانحراف الربيعي (**The Quartile Deviation**):

ويسمّى أيضا نصف المدى الرُبيعي[1]، ويعرّف على أنه نصف الفرق بين الربيع الثالث والرُبيع الأول، ويرمز له بـ Q ويعطى بالعلاقة التالية:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

يفضلاستخدام الانحراف الربيعي في الحالتين التاليتين:

- إذا استخدم الباحث الوسيط كمقياس للنزعة المركزية.
- إذا كانت التوزيعات التكرارية مفتوحة.

[1]- بنية صابرينة، محاضرات في الإحصاء الوصفي (الإحصاء01) مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى علوم اقتصادية وعلوم تجارية وعلوم التسيير، جامعة ابن خلدون، تيارت السنة الجامعية، 2017-2018، ص121.

- **مزايا وعيوب الانحراف الربيعي:**

✓ **المزايا:**

- لا يتأثر بالقيم المتطرفة.
- يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.

✓ **العيوب:**

- يحدد بعدد البيانات وليس بقيمتها.
- يهمل قيم البيانات في نهايتي التوزيع.

3.1. الانحراف المتوسط (The MeanDeviation):

يمتاز الانحراف المتوسط بميزة التعامل مع جميع القيم، ويتأثر بكل قيمة في المجموعة بعكس المدى والانحراف الربيعي ويعرّف على أنه متوسط الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابي أي أنه يقوم على أساس إهمال الإشارات الجبرية للانحرافات، ويمكن حسابه حول الوسط الحسابي وحول الوسيط.

1.3.1. الانحراف المتوسط لبيانات غير مبوبة:

إذا رمزنا للقيم بـ $X_1, X_2, \dots\dots\dots X_N$ وللإنحراف المتوسط حول الوسط الحسابي بـ $EM_{\bar{X}}$ وللانحراف المتوسط حول الوسيط بـ EM_{Med} فإن:

$$\boldsymbol{EM_{\bar{X}}} = \frac{|X_1 - \bar{X}| + |X_2 - \bar{X}| + \dots\dots\dots\dots + |X_N - \bar{X}|}{\boldsymbol{N}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} |X_i - \bar{X}|}{\boldsymbol{N}}$$

فإذا كان: $x_i = X_i - \bar{X}$ فإن: $\boldsymbol{EM_{\bar{X}}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i|}{\boldsymbol{N}}$

$$\boldsymbol{EM_{Med}} = \frac{|X_1 - Med| + |X_2 - Med| + \cdots ..+|X_N - Med|}{\boldsymbol{N}}$$
$$= \frac{\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{N}} |X_i - Med|}{\boldsymbol{N}}$$

2.3.1. الانحراف المتوسط لبيانات مبوبة:

نقوم في هذه الحالة بضرب الانحرافات المطلقة في التكرارات المقابلة فينتج لدينا مايلي:

$$\boldsymbol{EM_{\bar{x}}} = \frac{\boldsymbol{f_1}|X_1 - \bar{X}| + \boldsymbol{f_2}|X_2 - \bar{X}| + \cdots \dots \dots ..+\boldsymbol{f_k}|X_k - \bar{X}|}{\boldsymbol{f_1} + \boldsymbol{f_2} + \cdots \dots \dots \dots \boldsymbol{f_k}}$$
$$= \frac{\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{f_i}|X_i - \bar{X}|}{\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{f_i}}$$

$$\boldsymbol{EM_{Med}}$$
$$= \frac{\boldsymbol{f_1}|X_1 - Med| + \boldsymbol{f_2}|X_2 - Med| + \cdots \dots ..+\boldsymbol{f_k}|X_k - Med|}{\boldsymbol{f_1} + \boldsymbol{f_2} + \cdots \dots \dots \dots \boldsymbol{f_k}}$$
$$= \frac{\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{f_i}|X_i - Med|}{\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{f_i}}$$

3.3.1. مزايا وعيوب الانحراف المتوسط:

- ✓ **المزايا:**

-بما أنه يأخذ في اعتباره كل القيم فهو مقياس أكثر دقة.

- ✓ **العيوب:**

-غير قابل للعمليات الجبرية.

- يتأثر بكل القيم وخاصة المتطرفة.

4.1. الانحراف المعياري (The Standard Deviation):

يعتبر الانحراف المعياري من أهم مقاييس التشتت أو الانتشار وهو الأكثر استخداما في القوانين والنظريات الإحصائية لأنه يعطي فكرة سليمة ومنطقية عن ظاهرة التشتت.

سمي بالمعياري لأنه لا يهمل الإشارات الجبرية للانحرافات كما يفعله الانحراف المتوسط بل يتخلص من وجودها بطريقة رياضية مقبولة وهي تربيع تلك الانحرافات.

إذن هو الجذر التربيعي لمتوسط مجموع مربع انحراف القيم عن وسطها الحسابي، ويرمز له بـ: δ(وهو رمز يوناني يقرأ، سيقما).

ويسمي مربع الانحراف المعياري بالتباين.

1.4.1. الانحراف المعياري لبيانات غير مبوبة:

إذا رمزنا للقيم بـ $X_1X_2, X_3 .... X_N$ ولعددها بـ Nولانحرافات القيم عن وسطها الفرضي A بـ d_i بحيث $d_i = X_i - A$ ، وللانحراف المعياري بـ δ فإنه يتم حسابه وفق الصيغة التالية:

-الطريقة المباشرة: $\delta=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\bar{X})^2}{N}}$

وإذا كان: $x_{i=}(Xi-\bar{X})$ تصبح $\delta=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}{x_i}^2}{N}}$

- طريقة الانحرافات عن وسط فرضي: $\delta=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}{d_i}^2}{N}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}d_i}{N}\right)^2}$

- عن طريق قيم Xنفسها: $\delta=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}{X_i}^2}{N}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}X_i}{N}\right)^2}$

2.4.1. الانحراف المعياري لبيانات مبوبة :

إذا رمزنا لمراكز الفئات بـ $X_1,X_2,X_3...X_K$ ولتكراراتها بـ $f_1,f_2,f_3...f_K$ على الترتيب ولانحرافات مراكز الفئات عن الوسط الفرضي A بـ id بحيث $di=Xi-A$ وللانحرافات المختصر بـ Ui حيث

$\frac{d\ i}{c}=Ui$ وللانحراف المعياري بـ δ فإنه يحسب بالصيغة التالية:

-**الطريقة المباشرة** $\delta=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (X_i-\bar{X})^2}{\sum f_i}}$

-**طريقة الانحرافات عن وسط فرضي:** $\delta=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i {d_i}^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\right)^2}$

-**الطريقة المختصرة:** $\delta=C.\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i {u_i}^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i u_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\right)^2}$

-**عن طريق قيم X نفسها:** $\delta=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\right)^2}$

3.4.1. خصائص الانحراف المعياري:

كلما قل الانحراف المعياري قل تشتت القيم في التوزيع حول متوسطها والعكس، وعادة تكون قيمته أصغر من التباين ويستعمل في العديد من المجالات فهو مقياس لدرجة الثقة، ومقياس لدراسة علاقة الارتباط بين المتغيرات العشوائية وبالأخص الارتباط بين الظاهرة المدروسة والزمن.

بالإضافة إلى ذلك فإنه يتمتع بخاصية مهمة وهي في حالة التوزيع الطبيعي حيث يقع الوسط الحسابي في منتصف المنحنى فإن المدى بين $\bar{X}$ و δ يحصر نسبا معينة من قيم التوزيع كالتالي[1]:

-المجال $\bar{X} \pm \frac{2}{3}\delta$ يحصر 50% من قيم التوزيع.

-المجال $\bar{X} \pm \delta$ يحصر 68,27% من قيم التوزيع.

-المجال $\bar{X} \pm 2\delta$ يحصر 95,45% من قيم التوزيع.

-المجال $\bar{X} \pm 3\delta$ يحصر 99,73% من قيم التوزيع.

[1]- السعدي رجال، مرجع سابق، ص183.

4.4.1. مزايا وعيوب الانحراف المعياري:

✓ **المزايا:**

- أكثر مقاييس التشتت استخداما.

- يأخذ بعين الاعتبار كل القيم.

- كثير الدقة وكثير المدلولية.

- قابل للعمليات الجبرية.

- كثير الاستخدام في القوانين والنظريات الإحصائية.

✓ **العيوب:**

- يتأثر بكل القيم وخاصة المتطرفة منها أكثر من الانحراف المطلق.

- يتطلب عملا شاقا في العمليات الحسابية.

مثال 01: **(بيانات غير مبوبة)**

إذا كانت لديك القيم التالية:

200، 199، 200، 201، 202، 197، 205، 198، 196، 201.

1-أحسب الانحراف الربيعي.

2-أحسب الانحراف المتوسط حول الوسط الحسابي وحول الوسيط.

3- أحسب الانحراف المعياري بمختلف الطرق.

الحل:

1-حساب الانحراف الربيعي: لا بد أولا من إيجاد قيمتي الربيع الأول والرُبيع الثالث ولأجل ذلك نقوم بترتيب القيم وعددها 10 كخطوة أولى كما يلي: 196، 197، 198، 199، 200، 200، 201، 201، 202، 205.

-رتبة الربيع الأول $Q_1 = \frac{N+1}{4} = \frac{10+1}{4} = 2,75$ أي أن الربيع الأول بين القيمة الثانية والثالثة ويبعد عن الثانية بـ 75% من المسافة الفاصلة بين القيمتين.

$$Q_1 = 197 + 0,75(198-197) = 197,75$$

-رتبة الربيع الثالث $Q_3 = \frac{3(N+1)}{4} = 8,25$ أي أن الربيع الثالث يقع بين القيمة الثامنة والتاسعة ويبعد عن الثامنة ب25% من المسافة الفاصلة بين القيمتين.

$$Q_3 = 201 + 0,25\ (202-201) = 201,25$$

وعليه فإن الانحراف الربيعي يكون:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{201,25 - 197,75}{2} = 1,75$$

2. الانحراف المتوسط:

1.2. حول الوسط الحسابي:

نحسب أولا الوسط الحسابي: لا يهم ترتيب القيم

$$\bar{X} = \frac{\sum Xi}{N} = \frac{200+199+200+201+202+197+205+198+196+201}{10} = \frac{2000}{10} = 200$$

$$EM_{\bar{X}} = \frac{\sum |X_i - \bar{X}|}{N} = \frac{|200-200| + |199-200| + \ldots\ldots\ldots\ldots + |201-200|}{\mathbf{10}} = \frac{19}{10} = 1,9$$

2.2. حول الوسيط:

نحسب أولا الوسيط ورتبته $\frac{N+1}{2}=5,5$ وبالتالي فإن قيمة الوسيط تقع بين القيمة الخامسة والسادسة ووسطهما الحسابي هو الوسيط $200=\frac{200+200}{2}=Med$

$$EM_{Med}=\frac{\sum|X_i-Med|}{N}$$

بما أن قيمة الوسط الحسابي هي نفسها قيمة الوسيط صدفة فإن الانحراف المتوسط حول $\overline{X}$ هو نفسه حول الوسيطMed .

3. حساب الانحراف المعياري:

لتوضيح ذلك نعرض الجدول التالي بفرض أن$A=203$

جدول رقم (01)

di^2	di=Xi-A	$(Xi-\overline{X})^2$	$(Xi-\overline{X})$	Xi^2	القيمXi
9	-3	0	0	40000	200
16	-4	1	-1	39601	199
9	-3	0	0	40000	200
4	-2	1	1	40401	201
1	-1	4	2	40804	202
25	-5	4	-2	39204	198
4	2	25	5	42025	205
25	-5	4	-2	39204	198
49	-7	16	-4	38416	196
4	-2	1	1	40401	201
146	-30	56	0	400056	$\sum Xi=2000$

– الطريقة المباشرة:

$$\delta=\sqrt{\frac{\sum(Xi-\overline{X})^2}{N}}=\sqrt{\frac{56}{10}}=2{,}37$$

– طريقة الانحرافات عن وسط فرضي:

$$\delta=\sqrt{\frac{\sum di^2}{N}-\left(\frac{\sum di}{N}\right)^2}=\sqrt{\frac{146}{10}-\left(\frac{-30}{10}\right)^2}=\sqrt{14{,}6-9}=2{,}37$$

– عن طريق قيم X نفسها:

$$\delta=\sqrt{\frac{\sum Xi^2}{N}-\left(\frac{\sum Xi}{N}\right)^2}=\sqrt{\frac{40056}{10}-\left(\frac{2000}{10}\right)^2}=2{,}37$$

مثال 02: (**بيانات مبوبة**)

يبين الجدول التالي توزيع لأوزان عينة من الدواجن بالغرام حجمها 100 اخترناها من أحد المزارع.

جدول رقم (02)

فئات الوزن	[620-600[	[640-620[	[660-640[	[680-660[	[700-680[	[720-700[
عدد الدجاج	10	15	20	25	20	10

المطلوب:

1. حساب الانحراف الربيعي.

2. حساب الانحراف المتوسط حول الوسط الحسابي وحول الوسيط.

3. حساب الانحراف المعياري بمختلف الطرق.

الحل:

1.حساب الانحراف الربيعي:

لابدّ من إدراج عمود التكرار التجميعي الصاعد لإيجاد الربيع الأول والربيع الثالث والجدول التالي يوضح ذلك:

جدول رقم (03)

الفئات	***fi***	ت ت ص
]620-600]	10	10
]640-620]	15	25
]660-640]	20	45
]680-660]	25	70
]700-680]	20	90
]720-700]	10	100
المجموع	100	-

رتبة $Q_1=\frac{N}{4}=\frac{100}{4}=25$ حيث $N=\sum fi$ ، فئةهي Q_1]640-620]وعليه تكون قيمة الربيع الأول:

$$Q_1 = L_1 + \frac{\frac{\sum fi}{4}-\sum f1}{f_{Q_1}}.c=620+\frac{25-10}{15}.20=640$$

رتبة $Q_3=\frac{3N}{4}=\frac{3(100)}{4}=75$ هيفئة، Q_3:]700-680] وتكون بذلك قيمة الربيع الثالث:

$$Q_3 = L_1 + \frac{\frac{3\sum fi}{4}-\sum f1}{f_{Q_3}}.c=680+\frac{75-70}{20}.20=685$$

وعليه فإن الانحراف الربيعي يكون كما يلي:

$$Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}=\frac{685-640}{2}=22,5$$

2. حساب الانحراف المتوسط:

نحسب الانحراف المتوسط سواء حول الوسط الحسابي أو حول الوسيط اعتمادا على الجدول التالي:

جدول رقم (*04*)

الفئات	Fi	Xi	$fiXi$	ت ت ص	$\|X_i - \bar{X}\|$	$fi\|X_i - \bar{X}\|$	$\|X_i - Med\|$	$fi\|X_i - \bar{X}\|$
]620-600]	10	610	6100	10	52	520	54	540
]640-620]	15	630	9450	25	32	480	34	510
]660-640]	20	650	13000	45	12	240	14	280
]680-660]	25	670	16750	70	8	200	6	150
]700-680]	20	690	13800	90	28	560	26	520
]720-700]	10	710	7100	100	48	480	46	460
المجموع	100	-	66200	-	-	2480	-	2460

1.2. حول الوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum fiXi}{\sum fi} = \frac{66200}{100} = 662$$

$$EM_{\bar{X}} = \frac{\sum fi|X_i - \bar{X}|}{\sum fi} = \frac{2480}{100} = 24,8$$

2.2.حول الوسيط: الفئة الوسطية]680-660] ورتبة الوسيط هي: 50

$$Med = L_1 + \frac{\frac{\sum fi}{2} - \sum f1}{fMed}.c = 660 + \frac{50-45}{25}.20 = 664$$

$$EM_{Med} = \frac{\sum fi|X_i - Med|}{\sum fi} = \frac{2460}{100} = 24,6$$

3. حساب الانحراف المعياري:

لحساب δ بالطريقة المباشرة وطريقة الانحرافات عن وسط فرضي يبين الجدول التالي الحسابات اللازمة علما أن:

$$A=670 \text{ و } \bar{X}=662$$

جدول رقم (05)

الفئات	fi	Xi	$fi(Xi-\overline{X})^2$	$di=Xi-A$	di^2	$fidi$	$fidi^2$
]620-600]	10	610	27040	-60	3600	-600	36000
]640-620]	15	630	15360	-40	1600	-600	24000
]660-640]	20	650	2880	-20	400	-400	8000
]680-660]	25	670	1600	0	0	0	0
]700-680]	20	690	15680	20	400	400	8000
]720-700]	10	710	23040	40	1600	400	16000
المجموع	100	-	85600	-	-	-800	92000

-الطريقة المباشرة:

$$\delta=\sqrt{\frac{\sum fi(Xi-\overline{X})^2}{\sum fi}}=\sqrt{\frac{85600}{100}}=\sqrt{856}=29,26$$

- طريقة الانحرافات عن وسط فرضي:

$$\delta=\sqrt{\frac{\sum fidi^2}{\sum fi}-\left(\frac{\sum fidi}{\sum fi}\right)^2}=\sqrt{\frac{92000}{100}-\left(\frac{-800}{100}\right)^2}=\sqrt{856}=29,26$$

ولحساب δ بالطريقة المختصرة و عن طريق قيم X نفسها ندرج الجدول التالي.

جدول رقم (06)

الفئات	Fi	Xi	fiXi	fiXi²	Ui	Ui²	fiui	fiui²
]620-600]	10	610	6100	3.721000	-3	9	-30	90
]640-620]	15	630	9450	5.953500	-2	4	-30	60
]660-640]	20	650	13000	8450000	-1	1	-20	20
]680-660]	25	670	16750	11222500	0	0	0	0
]700-680]	20	690	13800	9522000	1	1	20	20
]720-700]	10	710	7100	5041000	2	4	20	40
المجموع	100	-	66200	43910000	-	-	-40	230

- الطريقة المختصرة:

$$\delta = C.\sqrt{\frac{\sum fiui^2}{\sum fi} - \left(\frac{\sum fiui}{\sum fi}\right)^2} = 20\sqrt{\frac{230}{100} - \left(\frac{-40}{100}\right)^2} = 29{,}26$$

- عن طريق قيم X نفسها:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum fixi^2}{\sum fi} - \left(\frac{\sum fixi}{\sum fi}\right)^2} = \sqrt{\frac{43910000}{100} - \left(\frac{66200}{100}\right)^2} = \sqrt{856} = 29{,}26$$

2. مقاييس التشتت النسبي:

إن مقاييس التشتت المطلق تعطي لنا نتائج مطلقة مقدرة بدلالة وحدات العدّ أو حدات القياس المستعملة كالدينار مثلا أو الكلغ أو الكلم...الخ، غير أنه في كثير من الحالات نحتاج إلى مقارنة التشتت في مجموعتين من البيانات تختلف في وحدات قياسها أو تختلف في متوسطاتها الحسابية أو تختلف في الحالتين معا، عندئذ لا تفي مقاييس التشتت المطلقة بالغرض لذلك وجب تحويلها إلى مقاييس نسبية، بقسمة كل مقياس تشتت مطلق على المتوسط الذي حُسب حوله.

وللتخلص من تأثير اختلاف وحدات القياس وأيضا اختلاف المتوسط عند مقارنة التشتت لظاهرتين

مختلفتينأو أكثر، يتم استخدام ما يسمى **بمعامل الاختلاف*coefficient of variation***وهو النسبة المئوية لتشتت المجموعة إلى نزعتها المركزية، أي أن معامل الاختلاف هو حاصل ضرب أي مقياس من مقاييس التشتت النسبي في 100[1] وعليه يكون لدينامقاييس التشتت النسبي كالتالي:

1.2. المدى النسبي:

يرمز له ب R_p ويعطي بالصيغة التالية:

$$\mathrm{Rp} = \frac{R}{\bar{X}}.100 = \frac{X_{max}-X_{min}}{\bar{X}}.100$$

2.2. الانحراف الربيعي النسبي:

ويسمّى أيضا معامل الاختلاف الربيعي ويرمز له ب$C.V.Q$

$$\mathrm{C.V.Q} = \frac{Q}{Med}.100 = \frac{Q_3 - Q_1}{2Med}.100$$

3.2. الانحراف المتوسط النسبي:

يرمز له بـ EM_p سواء حول $\bar{X}$ أو حول Med

1.3.2. حول الوسط الحسابي:

$$EM_{p_{\bar{X}}} = \frac{\mathrm{EM}_{\bar{X}}}{\bar{X}}.100$$

2.3.2. حول الوسيط:

$$EM_{p_{Med}} = \frac{EM_{Med}}{Med}.100$$

4.2. الانحراف المعياري النسبي:

ويسمى أيضا معامل الاختلاف أو معامل التغير غير أن التسمية الأولى هي الأكثر تداولا، ويعتمد على

[1]-زهية حوري، مرجع سابق ، ص52.

التغيرات النسبية في القيم عن مقياس النزعة المركزية ويعطي نسبة الانحراف المعياري إلى الوسط الحسابي[1]، وهو عبارة عن نسبة مئوية تخلوا خلوا تاما من وحدات القياس ويمكن عن طريقه مقارنة التشتت في حالة اختلاف الوسط الحسابي للتوزيعين أو اختلاف وحدات قياس التوزيعين يرمز له بـ: CV

$$\boldsymbol{C.V} = \frac{\delta}{\bar{X}}.100$$

مثال 01: من بيانات الجدول رقم (02) والمتعلق بتوزيع عينة من الدواجن، أحسب:

1-الانحراف الربيعي النسبي.

2-الانحراف المتوسط النسبي حول الوسط الحسابي وحول الوسيط.

3-الانحراف المعياري النسبي.

الحل: ممّا سبق لدينا:

$$\bar{X}=662,\ Med=664, Q_1=640$$

$$,\ Q_3=685, EM_{\bar{X}}=24,8, EM_{Med}=24,6,\quad \delta=29.26$$

1.الانحراف الربيعي النسبي:

$$\mathrm{C.V.Q}=\frac{Q_3-Q_1}{2Med}.100=\frac{685-640}{2(664)}.100=3,39\%$$

2. الانحراف المتوسط النسبي:

1.2. حول $\bar{X}$: $EM_{p_{\bar{X}}} = \frac{\mathrm{EM}_{\bar{X}}}{\bar{X}}100=\frac{24,8}{662}.100=3,75\%$

2.2. حول: Med $EM_{p_{med}} = \frac{EM\ med}{Med}100 = \frac{24,6}{664}.100=3,70\%$

3. الانحراف المعياري النسبي:

[1]- سليم ذياب السعدي، مبادئ علم الاحصاء، دار الكتب الوطنية، بنغازي، ليبيا، الطبعة الأولى، 2004، ص213.

$$\boldsymbol{C.V} = \frac{\delta}{\bar{X}}.100 = \frac{29,26}{662}.100 = 4,42\%$$

مثال 02:بعد قياس أوزان وأطوال طلبة السنة الأولى قسم الجذع المشترك للعلوم الاقتصادية كانت لدينا النتائج التالية:

جدول رقم (07)

	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري
الأوزان (كلغ)	$\overline{X_1}$=50	δ_1=10
الأطوال (سم)	$\overline{X_2}$=150	δ_2=12

المطلوب: أيّ الظاهرتين أكثر تشتتا؟

الحل:

نظرا لاختلاف وحدات القياس واختلاف المتوسطات نستخدم معامل الاختلاف كمايلي:

$$\boldsymbol{C.V_1} = \frac{\delta_1}{\bar{\bar{X}}_1}.100 = \frac{10}{50}.100 = 20\%$$

$$\boldsymbol{C.V_2} = \frac{\delta_2}{\bar{\bar{X}}_2}.100 = \frac{12}{150}.100 = 8\%$$

من مقارنة النتيجتين نلاحظ أن التشتت في الأوزان أكبر من التشتت في الأطوال (أي أنه أقل تجانسا).

مثال 03:أردنا دراسة ظاهرة ما فأخذنا عينتين من مجتمعين فكانت لدينا النتائج التالية:

العينة الأولى: $\sum_{i=1}^{40} Xi^2$=320 $\sum_{i=1}^{40} Xi^2$=3560

العينة الثانية: $\sum_{i=1}^{50} Xi$=200 $\sum_{i=1}^{50} yi^2$=1000

المطلوب:

1-أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل عينة.

2-أي العينتين أكثر تشتتا؟

3-إذا دُمجت العينتين، ماهو الوسط الحسابي للمجموعة الناتجة؟

الحل:

1.الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل عينة:

- **العينة الأولى:**

$$\bar{Y}=\frac{\sum X}{N}=\frac{320}{40}=8$$

$$\delta_x=\sqrt{\frac{\sum Xi^2}{N}-(\frac{\sum Xi}{N})^2}=\sqrt{\frac{3560}{40}-(\frac{320}{40})^2}=5$$

- **العينة الثانية:**

$$4\bar{X}=\frac{\sum y}{N}=\frac{200}{50}=$$

$$\delta_y=\sqrt{\frac{\sum yi^2}{N}-(\frac{\sum yi}{N})^2}=\sqrt{\frac{1000}{50}-(\frac{200}{50})^2}=2$$

2.لإيجاد أي العينتين أكثر تشتتا (أقل تجانسا) نحسب معامل الاختلاف:

$$\boldsymbol{C.V_X}=\frac{\delta_X}{\bar{X}}.100=\frac{5}{8}.100=62,5\%$$

$$\boldsymbol{C.V_y}=\frac{\delta_y}{\bar{y}}.100=\frac{2}{4}.100=50\%$$

يتضح لنا أن العينة الأولى أكثر تشتتا من العينة الثانية لأن معامل الاختلاف فيها أكبر.

3. الوسط الحسابي للعينة الناتجة بعد الدمج:

$$\bar{Z}=\frac{\sum X+\sum y}{N_X+N_y}=\frac{320+200}{40+50}=\frac{520}{90}=5,78$$

الفصل السادس

مقاييس الشكل

إن معرفة المتوسط والتشتت لا يكفيان لوصف التوزيعات التكرارية ومقارنتها، فقد يختلف توزيعان في الشكل رغم تساوي متوسطهما ودرجة تشتتهما، لذلك يجب إرفاق الوصف السابق بمقياسين آخرين لهما أهمية كبيرة في الدراسات الإحصائية، الأوّل يقيس التواء منحنى التوزيع والثاني يقيس تفرطح أو تدبب التوزيع أي يقيس ارتفاع قمة منحنى التوزيع أو اعتداله، وقبل التطرق لهذين المقياسين نعرّج ولو باختصارعلى العزوم نظرا لحاجتنا إليها لاحقا.

1. العزوم (**Moments**):

إن كلمة العزم نجدها في المجال الفيزيائي وهو ناتج ضرب القوة العمودية في طول الذراع ونظرا لأنها أصبحت تستخدم في الإحصاء فإن القوة العمودية هي التكرار، أمّا طول الذراع فهو المسافة بين نقطة المرتكز والمتمثل في الوسط الحسابي $\bar{X}$ والنقطة المعينة (القيمة) Xi.

لذلك يتطلب المفهوم الإحصائي للعزم تحديد النقطة التي يحسب عندها العزم، فقد يحسب حول نقطة اختيارية (وسط فرضي) أو حول الصفر أو حول الوسط الحسابي.

1.1. العزوم لبيانات غير مبوبة:

يتم تطبيق العزوم في حالة مجموعة من القيم كما يلي:

1.1.1. العزم حول نقطة اختيارية:

إذا رمزنا للوسط الفرضي بـ A وإذا رمزنا للقيم بـX_iولعددها بـ N وللعزم حول نقطة اختيارية من المرتبة r بـ $\overline{m}_r$ فإن :

$$\overline{m}_r = \frac{(X_1 - \mathrm{A})^r + (X_2 - \mathrm{A})^r \dots\dots\dots\dots (X_n - \mathrm{A})^r}{\mathrm{N}} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mathrm{A})^r}{N}$$

2.1.1. العزم حول الصفر:

في حال انعدمت النقطة الاختيارية أي A=0 فإن ما داخل قوس العلاقة السابقة يساوي X_i، فإذا رمزنا للعزم حول الصفر بـ $\bar{X}^r$ فيصبح:

$$\bar{X}^r = \frac{(X_1 - 0)^r + (X_2 - 0)^r \dots \dots \dots \dots (X_N - 0)^r}{\mathrm{N}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} {X_i}^r}{N}$$

والعزم الاول حول الصفر حيث r=1 يساوي الوسط الحسابي

$$\bar{X}^r = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

3.1.1. العزم حول الوسط الحسابي:

يسمى العزم الرياضي حول الوسط الحسابي أيضا بالعزم المركزي فإذا رمزنا له بالرمز m_r فإن:

$$m_r = \frac{(X_1 - \bar{X})^r + (X_2 - \bar{\mathrm{X}})^r \dots \dots \dots \dots (X_N - \bar{\mathrm{X}})^r}{\mathrm{N}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{\mathrm{X}})^r}{N}$$

العزم المركزي الأول حيث r=1 يساوي 0 أي m_1=0(من خواص الوسط الحسابي)

2.1. العزوم لبيانات مبوبة:

1.2.1. العزم حول نقطة اختيارية:

إذا رمزنا للوسط الفرضي بـA وللعزم حول الوسط الفرضي من المرتبة r بالرمز $\bar{m}_r$تكون صيغته كمايلي:

$$\bar{m}_r = \frac{f_1(X_1 - \mathrm{A})^r + f_2(X_2 - \mathrm{A})^r + \cdots \dots \dots \dots + f_k(X_k - \mathrm{A})^r}{f_1 + f_2 + \cdots \dots \dots \dots \dots . + f_k}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(X_i - \mathrm{A})^r}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i {d_i}^r}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

ويمكن حساب العزم حول نقطة اختيارية A بطريقة مختصرة وفق الصيغة التالية

$$\overline{m}_r = C^r \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i U_i^{\,r}}{\sum f_i}$$

وهذه الطريقة تطبق في التوزيعات المنتظمة فقط

حيث C: طول الفئة ، و$U_i = \frac{\mathrm{di}}{c} = \frac{X_i - A}{c}$ و r هي رتبة العزم.

1.2.2. العزم حول الصفر:

في حال انعدمت النقطة الاختيارية أي أصبحت A=0، فإن ما داخل قوس العلاقة السابقة يساوي $X_i^{\,r}$ ،فإذا رمزنا للعزم حول الصفر بـ $\bar{X}^r$، فصيغته كما يلي:

$$\bar{x}^r = \frac{f_1 X_1^{\,r} + f_2 X_2^{\,r} + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .. + f_k X_k^{\,r}}{f_1 + f_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i^{\,r}}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

-العزم الأول حول الصفرحيثr=1 يساوي الوسط الحسابي $\bar{X}$

$$\bar{X}^1 = \frac{\sum f_i X_i}{\sum f_i} = \bar{X}$$

1.2.3. العزم حول الوسط الحسابي:

يسمى العزم حول الوسط الحسابي أيضا بالعزم المركزي، فإذا رمزنا للعزم المركزي m_rمن المرتبةrفإن صيغته كمايلي:

$$m_r = \frac{f_1(X_1 - \overline{\mathrm{X}})^r + f_2(X_2 - \overline{\mathrm{X}})^r + \cdots \ldots \ldots \ldots + f_k(X_k - \overline{\mathrm{X}})^r}{f_1 + f_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (X_i - \overline{\mathrm{X}})^r}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

والعزم المركزي الأول حيثr=1 يساوي0 أي m = 0 (من خواص الوسط الحسابي) والعزم المركزي الثاني حيث r=2 يساوي التباين (θ) ويساوي مربع الإنحراف المعياري$m_2 = \theta = \delta^2$

3.1. العلاقة بين العزوم:

هناك علاقات بين العزوم المركزية m_rوالعزوم حول نقطة إختيارية $\overline{m}_r$ ويمكن تلخيصها فيما يلي:

$$m_2 = \overline{m}_2 - \overline{m}_1^2$$

$$m_3 = \overline{m}_3 - 3\overline{m}_1\overline{m}_2 + 2\overline{m}_1^3$$

$$m_4 = \overline{m}_4 - 4\overline{m}_1\overline{m}_3 + 6\overline{m}_1^2\,\overline{m}_2 - 3\overline{m}_1^4$$

مثال: ليكن لديك الجدول التالي والمتعلق بأطوال 40 طالبا في قسم معين

جدول رقم (08)

فئات الأطوال (سم)	[155-150]	[160-155]	[165-160]	[170-165]
عدد الطلبة	4	8	16	12

و**المطلوب** حساب:

- العزم الأول حول الصفر.

- العزم المركزي الثاني والثالث والرابع.

الحل: ندرج الجدول المساعد والذي يشمل جميع الحسابات اللازمة

جدول (09)

الفئات	***fi***	***Xi***	***fiXi***	$Xi-\overline{X}$	$fi(Xi-\overline{X})^2$	$f\,(Xi-\overline{X})^3$	$f\,(Xi-\overline{X})^4$
[155-150]	4	15,50	610	-9,5	361	-3429,5	33952,05
[160-155]	8	157,5	1260	-4,5	162	-729	3280,5
[165-160]	16	162,5	2600	0,5	4	2	1
[170-165]	12	167,5	2010	5,5	363	1196,5	10980,75
المجموع	40	-	6480	-	890	2160-	48214,3

– **العزم الأول حول الصفر هو الوسط الحسابي**: $\overline{X^1}=\bar{X}=\frac{\sum fiXi}{\sum fi}=\frac{6480}{40}=162$

– **العزم المركزي الثاني**: $m_2=\frac{\sum fi(Xi-\bar{X})^2}{\sum fi}=\frac{890}{40}=22,25$

– **العزم المركزي الثالث**: $m_3=\frac{\sum fi(Xi-\bar{X})^3}{\sum fi}=\frac{-2160}{40}=-54$

– **العزم المركزي الرابع**: $m_4=\frac{\sum fi(Xi-\bar{X})^4}{\sum fi}=\frac{4814,3}{40}=1205,36$

2. قياس الالتواء:

الالتواء هو بعد المنحنى عن التماثل أي وجود فروق بين مقاييس النزعة المركزية وهذا يعني أن التماثل هو أن تبتعد قيم التوزيع بشكل متناظر عن القيمة المتوسطة فنقول عندئذ أن التوزيع متماثل.

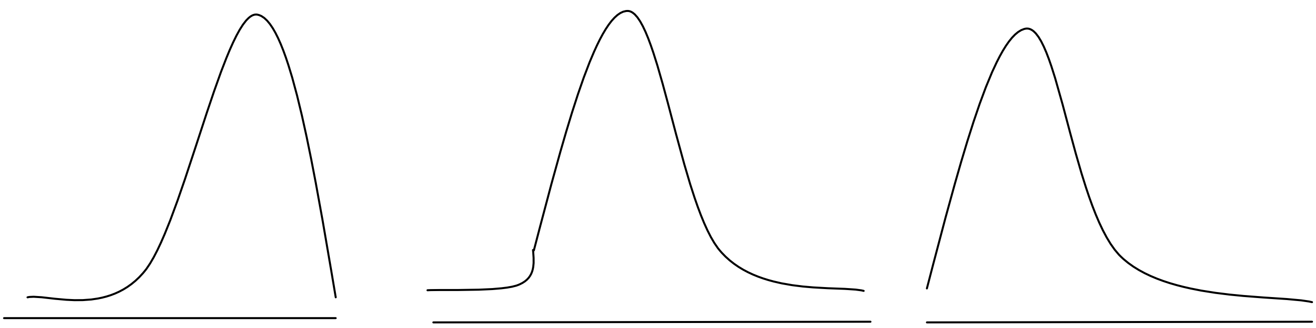
يسمى الالتواء باسم الجهة التي يمتدّ فيها التوزيع نتيجة لوجود قيم متطرفة فإذا كان:

أ–مقياس الالتواء موجبا فعندما نقول بأن التوزيع ملتو نحو اليمين (موجب الالتواء).

ب–مقياس الالتواء سالبا فعندها نقول بأن التوزيع ملتو نحو اليسار (سالب الالتواء).

ج–مقياس الالتواء يساوي الصفر فإن التوزيع متماثل (متناظر) والتناظر يكون حول الوسط الحسابي والشكل التالي يعكس ذلك.

شكل رقم (01)



X> Med >Mod	X = Med = Mod	X < Med <Mod
(القيم الصغيرة كثيرة)	(القيم متناظرة حول X)	(القيم الكبيرة كثيرة)
التواء نحو اليمين	لا يوجد التواء	التواء نحو اليسار

ولقياس الالتواء نقدّم المقاييس التالية:

1.2. معامل بيرسون الأوّل:

$$SK_1 = \frac{\bar{X} - Mod}{\delta}$$

2.2. معامل بيرسون الثاني: إذا كان التوزيع قريبا من التماثل حيث:

$$\bar{X} - \mathrm{Mod} = 3\ (\bar{X} - \mathrm{Med})$$

$$SK_2 = \frac{3(\bar{X} - Med)}{\delta}$$

تكون قيمة SK_1و SK_2 محصورة بين (−1+1)، أما في التوزيعات المتماثلة فتنعدم.

3.2. معامل فيشر:

يعطي العزم الثالث قياسا مطلقا للالتواء بنفس وحدات قياس قيم المتغير، فإذا رمزنا لمعامل فيشر عن طريق العزوم بـα_3 فإن:

$$\alpha_3 = \frac{m_3}{\delta^3}$$

يكون لدينا α_3=0 في التوزيعات تامة التماثل بينما تتحدد إشارته في التوزيعات الأخرى وفق إشارة m_3 باعتبار أن قيمة الانحراف المعياري تكون دوما موجبة.

4.2. معامل يول:

يستخدم هذا المعامل لقياس الالتواء في حالة الجداول التكرارية المفتوحة حيث يعتمد على الربيعيات ويسمى معامل الالتواء الربيعي CP أو المئينات ويسمّى معامل الالتواءالمئيني CP

$$\mathrm{CQ} = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

$$\mathrm{Cp} = \frac{(p_{90} - p_{50}) - (p_{50} - p_{10})}{p_{90} - p_{10}} = \frac{p_{90} - 2p_{50} + p_{10}}{p_{90} - p_{10}}$$

- نشير إلى أن هذا المعامل يكون محصورا بين (-1و +1) وعندما يكون معدوما فإن التوزيع يكون متماثلا.

- عندما يكون Q_3 –Med>Med-Q_1 فإذا المنحنى ملتو نحو اليمين (موجب الإلتواء).

- عندما يكونMed– Q_1>Q_3 -Med فإن المنحنى ملتو نحو اليسار (سالب الالتواء).

إلاّ أن المؤشر الناتج يعيبه عدم أخذ جميع القيم في الاعتبار حيث أنه يستبعد 50% من القيم.

3. قياس التفرطح:

قد يتساوى توزيعان من حيث متوسطهما وفي التشتت وفي الالتواء ولكن قد يكون أحدهما أكثر تفرطحا من الآخر.ظاهرة تفرطح البيانات تدلّ وتصف وتوضّح ما إذا كانت البيانات قرب المنوال أكثر تجمعا منها جانبا التوزيع فإذا كانت كذلك فإن التوزيع مدبب وإذا كانت متوزعة وكثيرة على الجانبين كان التوزيع مفرطحا ويمكن قياس التفرطح باستخدام عدد من الطرق سواء عن طريق العزوم أو الربيعيات والمئينات كما يلي:

1.3. معامل بيرسون للتفرطح:

يعتمد هذا المعامل على العزم المركزي الرابع ويعطي بالعلاقة التالية علما أن العزم المركزي الثاني هو التباين.

$$K = \beta p = \frac{m_4}{\delta^4} = \frac{m_4}{(\delta^{2})^2} = \frac{m_4}{(m_2)^2}$$

حيث:

k:معامل التفرطح.

$\boldsymbol{m_4}$: العزم المركزي الرابع

$\boldsymbol{\delta}$: الانحراف المعياري

m_2:العزم المركزي الثاني

يمكن التمييز بين النتائج بالنسبة لهذا المعامل حيث:

K=3: منحنى التوزيع التكراري طبيعي (معتدل).

K>3: منحنى التوزيع التكراري مدبب.

K<3: منحنى التوزيع التكراري مفرطح.

2.3. معامل فيشر للتفرطح:

يقترح فيشر المعامل التالي:

$$\beta_F = \frac{\mu 4}{\delta^4} - 3 = \beta_p - 3$$

ويبدو أن هذا المعامل أسهل للمعالجة لأن المقارنة تتم بالنسبة للصفر.

3.3. معامل التفرطح المئيني:

يعتمد هذا المعامل على الربيعيات والمئينات وهذا في حالة الجداول التكرارية المفتوحة حيث يتعذر إيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري ويعطى بالعلاقة التالية:

$$K = \frac{Q}{P_{90} - P_{10}} = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

حيث:

k: معامل التفرطح.

Q:الانحراف الربيعي.

P_{90}:المئين التسعون.

P_{10}: المئين العاشر.

وبدلا من استخدام القيمة 3 كمعيار في المعاملين السابقين فإن المعيار هنا هو 0,263 فينتج لدينا:

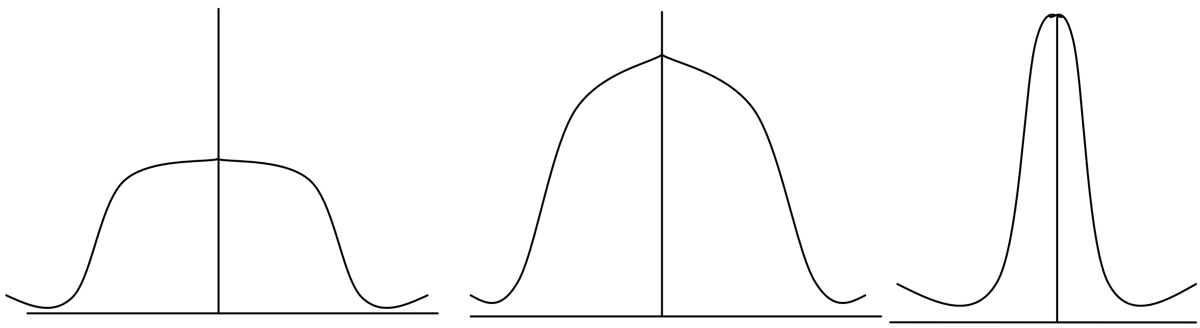
K=0,263:منحنى التوزيع طبيعي.

K>0,263:منحنى التوزيع مدبب.

K<0,263:منحنى التوزيع مفرطح.

وعلى العموم ومهما كان المعامل المستخدم لقياس التفرطح فإن كل الحالات تتوضح لنا في الشكل التالي:

شكل رقم (02)



نلاحظ من خلال الشكل أن التوزيع المدبب تتركز فيه القيم حول وسطها الحسابي بشكل صغير بينما يكون التركيز في التوزيع المتماثل بدرجة متماثلة عكس ما يكون عليه في التوزيع المفرطح حيث يكون في مدى كبير.

مثال 01: يبين الجدول التالي توزيع الوحدات السكنية بولاية قسنطينة حسب الإيجار السنوي بالألف د.ج.

جدول رقم (10)

فئات الإيجار	[10-14[	[14-18[	[18-22[	[22-26[	[26-30[
عدد الوحدات السكانية	12	14	20	9	5

والمطلوب: حساب معامل الالتواء بمختلف الطرق.

الحل:

ندرج الحسابات اللازمة لذلك في الجدول التالي:

جدول رقم (11)

الفئات	fi	Xi	$fiXi$	ت ت ص	$(Xi-\bar{X})$	$fi(Xi-\bar{X})^2$	$f(Xi-\bar{X})^3$
]14-10]	12	12	144	12	6,73-	543,51	-3657,85
]18-14]	14	16	224	26	2,73-	104,34	-284,85
]22-18]	20	20	400	46	1,27	32,26	40,97
]26-22]	9	24	216	55	5,27	249,96	1317,27
]30-26]	5	28	140	60	9,27	429,66	3982,99
المجموع	60	-	1124	-		1359,73	1398,53

1. الوسط الحسابي:

$$\bar{X}=\frac{\sum fixi}{\sum fi}=\frac{1124}{60}=18,73$$

2. الوسيط:

$$Med=L1+\frac{\frac{\sum fi}{2}-\sum f1}{fMed}.C$$

رتبة الوسيط= $\frac{\sum fi}{2}$= $\frac{60}{2}$=30 من خلال عمود ت ت ص يتضح لنا أن الفئة الوسيطية هي: [18–
]22

$$4=18,8.Med=18+\frac{30-26}{20}$$

3. المنوال:

$$C.Mod=L1+\frac{\Delta1}{\Delta1+\Delta2}$$

الفئة التي تقابل أكبر تكرار هي [18-22[.

$$4=19,41.Mod=18+\frac{(20-14)}{(20-14)+(20-9)}$$

4. الانحراف المعياري:

$$\delta=\sqrt{\frac{\sum fi(Xi-\overline{X})^2}{\sum fi}}=\sqrt{\frac{1359,73}{60}}=\sqrt{22,66}=4,76$$

-معامل بيرسون الأول:

$$0,14\text{-}SK_1=\frac{\bar{X}-Mod}{\delta}=\frac{18,73-19,41}{4,76}=$$

-معامل بيرسون الثاني:

$$0,04\text{-}=\frac{3(\bar{X}-Med)}{\delta}=\frac{3(18,73-18,8)}{4,76}={}_2SK$$

نلاحظ أن SK_1وSK_2سالبينفإن التوزيع ملتوي نحو اليسار.

- معامل فيشر:

$$m_3=\frac{\sum fi(Xi-\overline{X})^3}{\sum fi}=\frac{1359,53}{60}=23,31$$

$$\alpha_3=\frac{m3}{\delta3}=\frac{23,31}{(4,76)^3}=0,22$$

حسب فيشر فإن التوزيع ملتوي نحو اليمين.

- معامل يول:

- معامل الالتواء الربيعي:

$$\mathrm{CQ} = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

نقوم بحساب Q_1 و Q_3 بما أن $Med = Q_2$ يكون لدينا:

$$\mathrm{C.}\ Q_1 = \mathrm{L}_1 + \frac{\frac{\sum fi}{4} - \sum f1}{fQ1}$$

$$4=14{,}86.Q_1 = 14 + \frac{15-12}{14}$$

$$\mathrm{C.}Q_3 = \mathrm{L}_1 + \frac{\frac{3\sum fi}{4} - \sum f1}{fQ3}$$

$$4=21{,}8.Q\ _3 = 18 + \frac{45-26}{20}$$

-حساب معامل الالتواء الربيعي:

$$CQ = \frac{21{,}8 - 2(18{,}8) + 14{,}86}{21{,}8 - 14{,}86}$$

$$CQ = \frac{-0{,}94}{6{,}94} = -0{,}14$$

-معامل الالتواء المئيني:

$$\mathrm{Cp} = \frac{p_{90} - 2p_{50} + p_{10}}{p_{90} - p_{10}}$$

نقوم بحساب P_{90} و P_{10} بما أن: P_{50} =Med يكون لدينا:

$$P_{90} = 22 + \frac{54-46}{9}.4 = 25{,}56$$

$$P_{10} = 10 + \frac{6-0}{12}.4 = 12$$

$$\mathrm{Cp} = \frac{25{,}56 - 2(18{,}8) + 12}{25{,}56 - 12}$$

$$Cp=\frac{-0,04}{13,56}=-0,0029$$

نستنتج أن التوزيع ملتوي نحو اليسار من خلال معامل الالتواء الربيعي ومعامل الالتواء المئيني.

مثال 02: لديك الجدول التكراري التالي:

جدول رقم (12)

الفئات	[60-63[	[63-66[	[66-69[	[69-72[	[72-75[	المجموع
التكرار	5	18	42	27	8	100

والمطلوب: حساب معامل التفرطح عن طريق العزوم ومعامل التفرطحالمئيني.

الحل: ندرج الجدول المساعد التالي والذي يوضح الحسابات اللازمة كما يلي:

جدول رقم (13)

الفئات	Fi	Xi	$fiXi$	ت ت ص	$(Xi-\overline{X})$	$fi(Xi-\overline{X})^2$	$(Xi-\overline{Xi})^4$	$fi(Xi-\overline{Xi})^4$
[60-63[	5	61,5	307,5	5	-6,45	208,01	1730,77	8653,85
[63-66[	18	64,5	1161	23	-3,45	214,25	141,67	2550,06
[66-69[	42	67,5	2835	65	-0,45	8,51	0,041	1,72
[69-72[	27	70,5	1903,5	92	2,55	175,57	42,28	1141,56
[72-75[	8	73,5	588	100	5,55	246,42	948,79	7590,32
المجموع	100	-	6795	-	-	852,76	-	19937,51

1.عن طريق العزوم:

$$K=\beta_4=\frac{m_4}{\delta^4}$$

$$\bar{X}=\frac{\sum fiXi}{\sum fi}=\frac{6795}{100}=67,95$$

$$m_4 = \frac{\sum fi(Xi-\overline{X})^4}{\sum fi} = \frac{19937{,}51}{100} = 199{,}387$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum fi(Xi-\overline{X})^2}{\sum fi}} = \sqrt{\frac{852{,}76}{100}} = \sqrt{8{,}53} = 2{,}74$$

وعليه يكون معامل التفرطح كما يلي:

$$\delta = \beta_4 = \frac{m_4}{\delta^4} = \frac{199{,}38}{(2{,}92)^4} = 2{,}74$$

من خلال النتيجة نلاحظ أن $\mathbf{K<3}$ وبالتالي فإن منحنى التوزيع مفرطح.

2. معامل التفرطح المئيني:

$$K = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

ولأجل ذلك يجب حساب ما يلي:

الربيع الأول والربيع الثالث، المئين العاشر والمئين تسعون.

- الربيع الأول Q_1:

$$Q_1 = L_1 + \frac{\frac{\sum fi}{4} - \sum f1}{fQ1}.C$$

رتبة الربيع الأول $\frac{\sum fi}{4} = \frac{100}{4} = 25$ وبالتالي فئة Q_1 هي [66-69[من خلال عمود ت ت ص وعليه فإن قيمة الربيع الأول تكون كما يلي:

$$3 = 66{,}14.Q_1 = 66 + \frac{25-23}{42}$$

-الربيع الثالث Q_3:

$$C.Q_3 = L_1 + \frac{\frac{3\sum fi}{4} - \sum f1}{fQ_3}$$

رتبة الربيع الثالث Q_3 = $\frac{3\sum fi}{4}$ =$\frac{3(100)}{4}$=75وبالتالي فئة Q_3 من خلال عمود ت ت ص هي [69-72]وعليه فإن قيمة Q_3 تكون كما يلي:

$$3= 70,11.+\frac{75-65}{27}69Q_1=$$

- المئين العاشر P_{10}

$$C.P_{10}=L_1+\frac{\frac{10\sum fi}{100}-\sum f1}{fP_{10}}$$

رتبة المئين العاشر P_{10} = $\frac{10\sum fi}{100}$ =$\frac{10(100)}{100}$=10وبالتالي فئة P_{10} هي [69-72] من عمود ت ت ص وتكون قيمة P_{10} كما يلي:

$$3= 63,83.P_{10}= 63+\frac{10-5}{18}$$

-المئين تسعون P_{90}

$$C.P_{90}=L_1+\frac{\frac{90\sum fi}{100}-\sum f1}{fP_{90}}$$

رتبة المئين تسعون P_{90} = $\frac{90\sum fi}{100}$ =$\frac{90(100)}{100}$=90وعليه فئة P_{90} هي [69-72] من عمود ت ت ص وتكون قيمةP_{90} كما يلي:

$$3= 71,78.P_{90}= 69+\frac{90-65}{27}$$

من خلال النتائج السابقة يكون معامل التفرطحالمئيني هو:

$$K=\frac{70,11-66,14}{2(71,78-63,83)}=\frac{3,97}{15,9}=0,250$$

نلاحظ أن K<0,263 وعليه فإن منحنى التوزيع مفرطح.

تمارين متنوعة

تمرين 01:

حدّد أيّا من البيانات التالية متصل وأيّا منها منفصل:

أ.عدد الأفراد N في أسرة ما.

ب. الحالة العائلية لشخص معين.

ج. أطوال 1000 طالب في قسم LMD سنة أولى.

د. أعمار مصابيح منتجة في مصنع x

ه–الدولة y في أوروبا.

و. نسبة السكر في الدم.

ي. الأجر الشهري لعدد من العمال في شركة معينة.

تمرين02:

حدد أيا من المتغيرات التالية كمي وأيا منها كيفي:

أ.عدد الأسر في عينة ما.

ب. الأجر الشهري.

ج. الجنسية.

د. وزن عدد من الأطفال في مدرسة معينة.

هـ. المستوى الثقافي.

و. طول عدد من العمال في مؤسسة صناعية.

ز. لون العينين.

ح. اللغة المستعملة.

ط. درجة الحرارة.

ك. الهواية.

تمرين 03:

لتكن لديك المعلومات التالية والتي تمثل أوزان 64 عامل في مؤسسة ما:

82	63	80	72	99	72	85	80
76	90	75	74	87	52	49	100
41	78	79	68	82	75	58	67
64	88	84	74	77	76	83	86
68	61	73	43	59	56	82	80
52	83	77	94	58	70	67	98
80	79	93	70	53	69	89	65
90	85	83	60	72	77	47	90

المطلوب:

1.ما هو أصغر وأكبر وزن لهؤلاء العمال؟

2. ما هو المدى العام لهذه الأوزان؟

3. هيء البيانات السابقة في شكل جدول توزيع تكراري؟

4. أحسب كلاّ من التكرارين التجميعيين الصاعد والنازل؟

5. أحسب التكرارات النسبية.

6. أرسم كلّ من المدرج والمضلع والمنحنى التكراري.

7. أرسم منحنى التكرار التجميعي الصاعد والنازل.

تمرين 04:

إذا كانت لديك مراكز الفئات التالية: 128، 138، 148، 158، 168، 178، 188 حدّد طول الفئة ثم أوجد حدود الفئات.

تمرين 05:

فئة من توزيع تكراري مركزها 16 وحدها الأدنى الفعلي 12,5 جد طول هذه الفئة.

تمرين06:

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأجور65 عاملا بالدينار ليوم واحد في شركة ما

فئات الأجور	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[	[100-110[	[110-120[
عدد العمال	8	10	16	14	10	5	2

1. حدّد الحدّ الأدنى للفئة السادسة.

2. حدّد الحد الأعلى للفئة الرابعة.

3. مركز الفئة الثالثة.

4. طول الفئة الخامسة.

5. التكرار النسبي للفئة الثانية.

6. الفئة ذات التكرار الأكبر.

7. عدد العمال الذين يحصلون على دخل أقل من 90 دينار.

8. عدد العمال الذين يحصلون على 70 دينار فأكثر يوميا.

9. نسبة العمال الذي يحصلون على دخل 70 دينار فأكثر وأقل من 90 دينار يوميا.

10. أوجد التكرارين التجميعيين الصاعد والنازل للتوزيع.

11. أرسم المدرج التكراري.

تمرين 07:

يبين الجدول التالي توزيع الأراضي بالهكتار على 50 فلاحا:

فئات الأراضي	]40-30[	]50-40[	]60-50[	]70-60[	]80-70[	]90-80[	]100-90[
عدد الفلاحين	4	6	8	12	9	7	4

1. أحسب الوسط الحسابي بمختلف الطرق وارسم المدرج التكراري.

2. ماهي نسبة الفلاحين الذين يملكون أقل من 60 هكتار؟

3. ماهي نسبة الفلاحين الذين يملكون 70 هكتار فأكثر؟

4. أحسب قيمة الوسيط.

5. أوجد قيمة المنوال ومثله بيانيا.

تمرين08:

يمثل التوزيع التالي أوزان 25 طفل كما يلي:

الفئات	[9-5]	[13-9]	[17-13]	[21-17]	[25-21]	المجموع
عدد العمال	3	5	8	7	2	25

المطلوب:

1.أحسبالوسط الهندسي والوسطالتوافقي.

2. ماهو عدد الأطفال الذين تقل أوزانهم عن21 كلغ.

3. ما هي نسبة الأطفال الذين يزنون 13 كلغ فأكثر.

تمرين09:

ليكن لديكالتوزيع التكراري التالي:

الفئات	[15-10]	[30-15]	[40-30]	[45-40]	[50-45]
Fi	5	15	20	20	5

المطلوب:

-أحسب المنوال ومثله بيانيا.

التمرين 10:

يمثل التوزيع التكراري التالي أجور 40 عامل في مؤسسة صناعية، إذا علمت أن الأجر المتوسط لهذا التوزيع يساوي 39، أحسب:

1. قيمة الوسيط ومثله بيانيا.

2. المنوال حسابيا وبيانيا.

3. الوسط الحسابي بمختلف الطرق.

الفئات	[15-25]	[25-35]	[35-45	[45-55]	[55-65]	المجموع
التكرار	f_1	9	13	7	f_5	**40**

تمرين11:

يمثل التوزيع التكراري التالي، النقاط المحصلة حسب الخبرة لـ50 عامل في مؤسسة معينة ويعطى التكرار التجميعي النازل لهذه الظاهرة كما يلي:

ت ت ن	50	48	44	38	30	20	12	6	2

إذا علمت أن طول الفئات هو خمس (5/1) التكرار التجميعي النازل للفئة الأولى، وأن قيمة الوسيط تساوي ضعف التكرار التجميعي النازل للفئة الخامسة.

1. أحسب قيمة المنوال ومثلها بيانيا.

2. أحسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

3. ماذا تستنتج؟

4. ماهي نسبة العمال الذين تقل نقاطهم عن 55 نقطة؟

5. ماهي نسبة العمال الذين تكون نقاطهم 75 نقطة فأكثر؟

تمرين 12:

يمثل التوزيع التكراري التالي أجور 86 عامل:

12	**16**	**12**	**0**	**−16**	**−28**	***fiUi***

إذا كان $C=10$ و$A=115$

1.أحسب الوسط الحسابي بالطريقة المختصرة.

2. أحسب المنوال.

تمرين 13:

الجدول التالي يوضح التكرار التجميعي الصاعد لأوزان 100 شخص، فإذا علمت أن:

$\bar{X}=77,9$ ، $X_1=50$ ، $C=10$

$67+f_2+f_5$	$49+f_2+f_5$	$49+f_2$	$34+f_2$	$10+f_2$	10	**ت ت ص**

1.أوجد f_2 وf_5.

2. أحسب المنوال.

تمرين 14:

وجد من خلال دراسة أوزان 40 شخص أن منوال أوزانهم هو 73 و $C=10$ ويعطيت ت ص كما يلي:

$26+f_3$	$21+f_3$	$9+f_3$	**9**	**3**	**ت ت ص**

1. أحسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات عن وسط فرضي.

2. ماهي نسبة الأشخاص الذين يقل وزنهم عن الحدّ الأعلى للفئة الثالثة؟

تمرين 15:

إذا كان لديك الجدول التالي خاص بظاهرة ما:

2	1	0	-1	-2	**Ui**
20	10	0	-10	-20	**Xi-A**
f_3-6	f_1	f_3	f_3-4	f_1	**Fi**

وكان لديك: $X_3= 35$ ، $\sum fiXi= 20$، $\sum fiUi = -3$

1. أحسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

2. أحسب الوسيط.

3. أحسب الانحراف الربيعي النسبي .

تمرين 16:

حصلنا على النتائج التالية والخاصة بمقارنة الأجور في شركتين بآلاف الدنانير.

الانحراف المعياري	متوسط الأجور	
10	**39**	**الشركة 1**
8	**30**	**الشركة 2**

أيّهما أكثر تشتتا؟

تمرين 17:

لتكن لدينا البيانات التالية المتعلقة ب100 عامل

40	**20**	**0**	**20**	**40**	**$f_iU_i^2$**

إذا علمت أن:100.(?) +350=x̅

1.أحسب الوسيط والمنوال وماذا تستنتج؟

2. استنتج معامل الالتواء .

تمرين 18:

إذا كان لدينا توزيعين بحيث معامل التواء الأول0.35 ومعامل التواء الثاني يساوي – 0.25 وضح اتجاهالتواء كل توزيع وبين أيهما أكثر التواء مع التعليل.

تمرين19:

لدينا أربعة مصانع أخذنا عينات متساوية من العاملين فيها فتحصلنا على النتائج التالية والمتعلقة بالأجور فأيا منها تتوزع فيها الأجور بشكل أكثر عدالة ورتبها؟

الانحراف المعياريδ	**الوسط الحسابي$\bar{X}$**	**المصنع**
30	480	**A**
50	600	**B**
25	720	**C**
20	360	**D**

تمرين 20:

أخذت عينتين من مزرعتين لاختبار نتائج عملية بيولوجية فتحصلنا على ما يلي:

العينة 01: $\bar{X}_1=32$ و $\delta_1=4$

العينة 02: $\bar{X}_2=19$ و $\delta_2=2$

أي العينتين أقل تشتتا؟

حلول التمارين

حل التمرين 01:

أ.متغير متقطع (منفصل)

ب. متغير متقطع (منفصل)

ج. متغير مستمر (متصل)

د. متغير مستمر (متصل)

هـ. متغير متقطع (منفصل)

و. متغير مستمر (متصل)

ز. متغير مستمر (متصل)

حل التمرين 02:

متغير كمي	متغير كيفي
–عدد الأسر في عينة ما.	– الجنسية.
– الأجر الشهري.	– المستوى الثقافي.
– وزن عدد من الأطفال في مدرسة معينة.	– لون العينين.
– طول عدد من العمال في مؤسسة صناعية.	–اللغة المستعملة.
– درجة الحرارة.	– الهواية

حل التمرين 03:

1.بعد ترتيب البيانات تصاعديا نجد أن أصغر قيمة هي 41 وأكبر قيمةهي 100 .

2.**المدى العام** هو:

$$R=X_{max}-X_{min}=100-41=59$$

$$C=\frac{R}{K}=\frac{X_{max}-X_{min}}{1+3,322logN}=\frac{100-41}{1+3,322log64}=8.41\cong 8$$

نقرب النتيجة إلى أقرب وحدة صحيحة

وبذلك ندرج الجدول التكراري التالي باعتبار أن أصغر قيمة 41 وطول الفئات يساوي 8.

3.**تهيء البيانات السابقة في شكل جدول توزيع تكراري:**

الفئات	fi	Xi	ت ت ص	ت ت ن	التكرار النسبي%
]49-41]	3	45	3	64	4,69
]57-49]	5	53	8	61	7,81
]63-57]	7	61	15	56	10,94
]73-65]	11	69	26	49	17,19
]81-73]	17	77	43	38	26,56
]89-81]	12	85	55	21	18,75
]97-89]	6	93	61	9	9,38
]105-97]	3	101	64	3	4,69
المجموع	**64**	/	-	-	-

4.**طرق حساب مراكز الفئات:**

- **الطريقة 1**: $Xi=\frac{L_1+L_2}{2}$

Xi: مركز الفئة.

L_1:الحد الأدنى للفئة.

L_2: الحد الأعلىللفئة.

الطريقة 2: $Xi=L_1+\frac{C}{2}$

الطريقة 3: $Xi=L_1-\frac{C}{2}$

C: طول الفئات

وعليه يكون مركز الفئة الأولى حسب كل طريقة كما يلي:

$$Xi=\frac{41+49}{2}=45$$

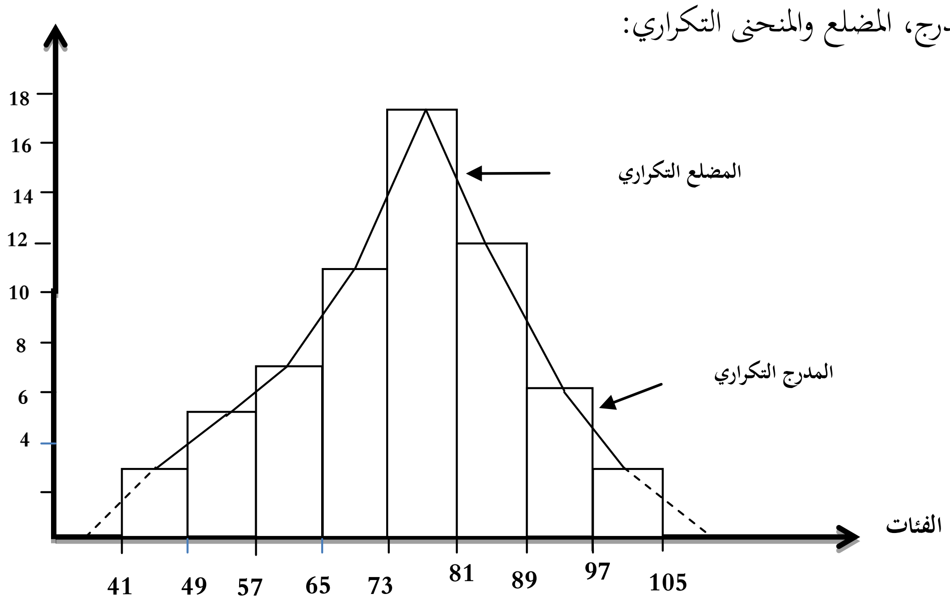
$$Xi=41+\frac{8}{2}=45$$

$$Xi=49-\frac{8}{2}=45$$

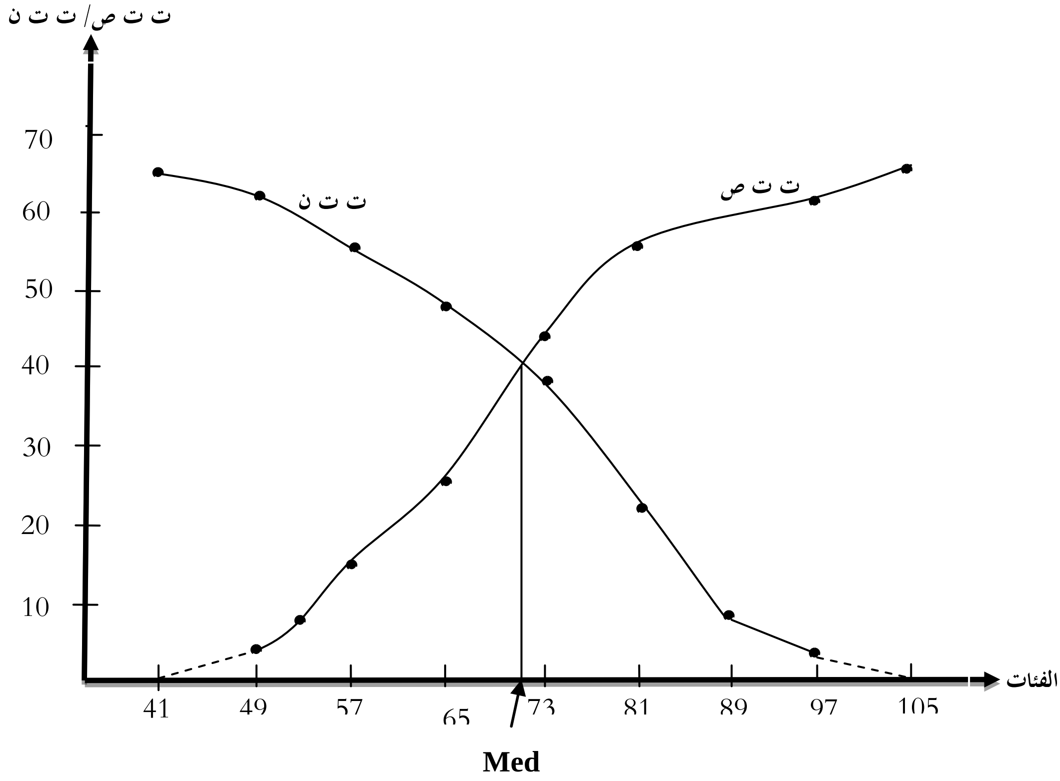
5.ولحساب التكرار النسبي نطبق الصيغة التالية:

$$\textbf{التكرار النسبي}=\frac{\text{التكرار المطلق (العادي)}}{\text{مجموع التكرارات}}\mathbf{x100}$$

6.المدرج، المضلع والمنحنى التكراري:



7. منحنى التكرار التجميعي الصاعد والنازل:



حل التمرين 04:

1. تحديد طول الفئة:

لدينا مراكز الفئات Xi كما يلي:

188-178-168-158-148-138-128

نلاحظ أن:

$$C= X_2-X_1$$

$$C=138-128=10$$

وهو جدول منتظم يتساوى فيه طول جميع الفئات.

2. إيجاد حدود الفئات:

لدينا: $Xi=L_1+\frac{C}{2}$

$$128\text{-}5=123 = L_1 = Xi - \frac{C}{2} = 128\text{-}\frac{10}{2}$$

$$128+5=133 = L_2 = Xi - \frac{C}{2}$$

وعليه تكون الفئات كالتالي:

[133-123[، [143-133[، [153-143[، [163-153[، [173-163[، [183-173[، [193-183[

حل التمرين 05:

إذا كان مركز الفئة Xi=16 وحدّها L_1 = 12,5

فإن الطول يكون كما يلي:

$$Xi = L_1 + \frac{C}{2}$$

$$(Xi - L_1) = C2$$

$$2(16-12,5)=C \Rightarrow C=7$$

وعليه فإن الفئة هي: [19,5-12,5[

حل التمرين 06:

ندرج الجدول التالي:

الفئات	Fi	Xi	fi%	ت ت ص	ت ت ن
[50–60[	8	55	12,31	8	65
[60–70[	10	65	15,38	18	57
[70–80[	16	75	24,62	34	47
[80–90[	14	85	21,54	48	31
[90–100[	10	95	15,38	58	17
[100–110[	5	105	7,69	63	7
[110–120[	2	115	3,08	65	2
المجموع	65	-	100	-	-

1.الحدّ الأدنى للفئة السادسة هو 100.

2. الحدّ الأعلى للفئة الرابعة هو 90.

3. مركز الفئة الثالثة هو 75.

4. طول الفئة الخامسة هو 10 وهو متساوي في جميع الفئات لذلك نطلق على هذا الجدول أنه جدول منتظم .

5. التكرار النسبي للفئة الثانية هو 15,38%

6. الفئة ذات التكرار الأكبر هي [70-80[وتسمّى الفئة المنوالية (يتم التطرق لها مفصلا في التمارين اللاحقة).

7. عدد العمال الذين يحصلون على دخل أقل من 90 دينار هو 8+10+16+14 أو نقرأ مباشرة العدد في عمود ت ت ص والمقابل للفئة [80-90[وهو 48.

8. عدد العمّال الذين يحصلون على 70 دينار فأكثر يوميا هو:

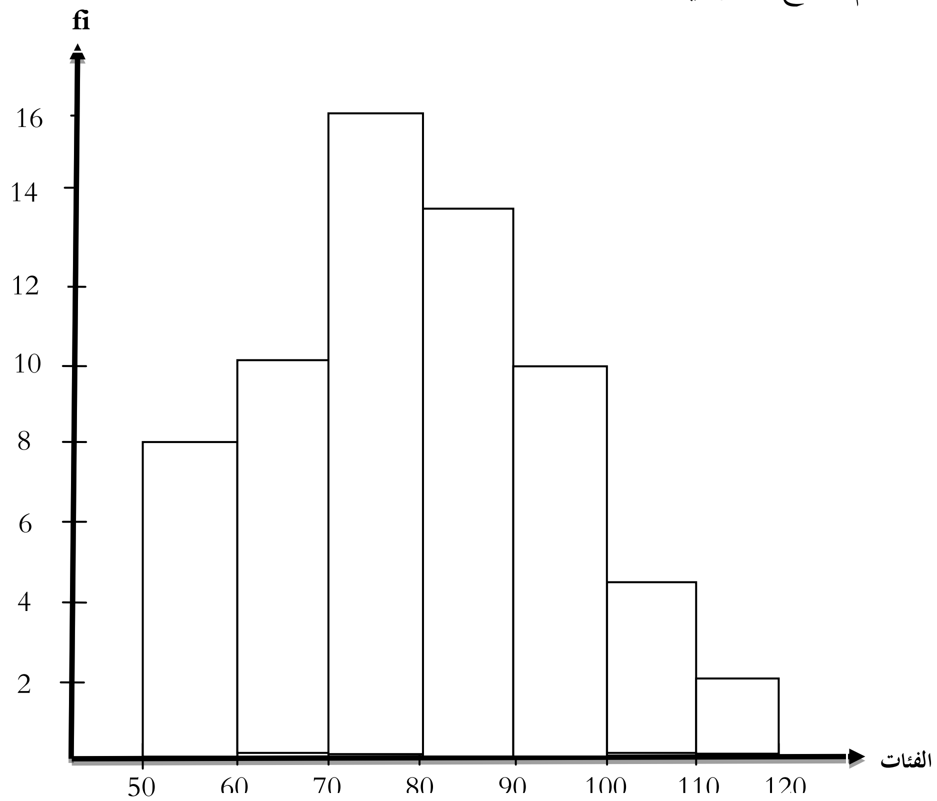
16+14+10+5+2 أو نقرأ مباشرة العدد في عمود ت ت ن والمقابل للفئة [70-80[وهو 47.

9. نسبة العمال الذين يحصلون على دخل 70 دينار فأكثر وأقل من 90 دينار يوميا أي بين 70 –90 دينار وهي:

$$\%46,15 = 100 \times \frac{14+16}{65}$$

10. التكرارين التجميعيين الصاعد والنازل في الجدول.

11. رسم المدرج التكراري:



حل التمرين 07:

ندرج الجدول المساعد التالي:

↘	↗	fiui	Ui	Fidi	di	fixi	Xi	Fi	الفئات
50	4	-12	-3	-120	-30	140	35	4	]40-30]
46	10	-12	-2	-120	-20	270	45	6	]50-40]
40	18	-8	-1	80	-10	440	55	8	]60-50]
32	30	0	0	0	0	780	65	12	]70-60]

]80-70]	9	75	675	10	90	1	9	39	20
]90-80]	7	85	595	20	140	2	14	46	11
]100-90]	4	95	380	30	120	3	12	50	4
المجموع	**50**	**–**	**3280**	**–**	**30**	**–**	**3**	**–**	**–**

1. حساب الوسط الحسابي:

أ. الطريقة المباشرة

$$\bar{X}=\frac{\sum fiXi}{\sum fi}=\frac{3280}{50}=65,6$$

ب. طريقة الانحرافات عن وسط فرضي:

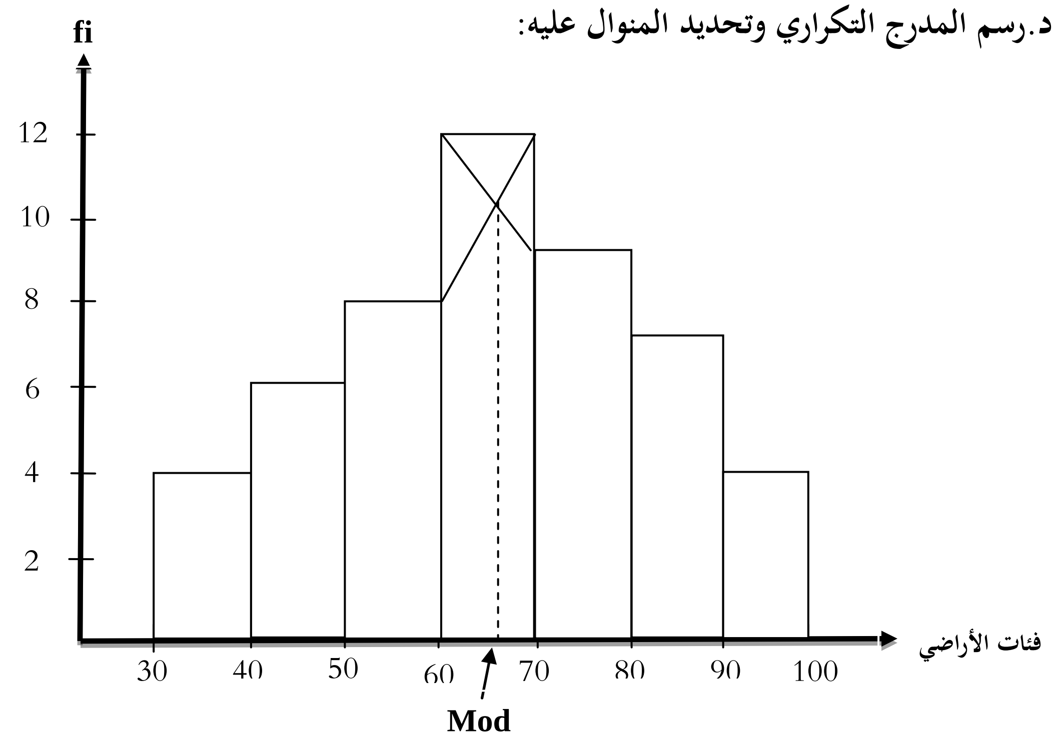
$$\bar{X}= A+\frac{\sum fiXi}{\sum fi}.C \quad =65+\frac{30}{50}=65,6$$

ج. طريقة الانحرافات المختصرة:

$$\bar{X}= A+\frac{\sum fiui}{\sum fi}.C =65+\frac{3}{50}.10=65,6$$

-

د.رسم المدرج التكراري وتحديد المنوال عليه:



2. نسبة الفلاحين الذين يملكون أقل من 60 هكتار:

- عدد الفلاحين: 4+6+8=18

- نسبة الفلاحين: $x\frac{\text{عدد الفلاحين}}{\text{المجموع}}100= x\frac{18}{50} 100=$ 36%

3. نسبة الفلاحين الذين يملكون 70 هكتار فأكثر:

- عدد الفلاحين: 9+7+4 = 20

- نسبة الفلاحين: $x\frac{20}{50} 100=$ 40%

4. حساب قيمة الوسيط:

$$\text{Med}=L_1+\frac{\frac{N}{2}-\sum f1}{fMed}.C$$

- **رتبة الوسيط:** $\frac{N}{2}=\frac{50}{2}=25$

$$\text{Med}=60+\frac{25-18}{12}.10= 65,83$$

5. حساب قيمة المنوال:

$$\text{Mod}=L_1+\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}.\,C$$

$$\text{Mod}=60+\frac{(12-8)}{(12-8)+(12-9)}.10$$

$$\text{Mod}=60+\frac{(4)}{4+3}.10=65,71$$

حل التمرين 08:

ندرج الجدول المساعد التالي:

الفئات	fi	Xi	$logXi$	$flogXi$	$\frac{fi}{Xi}$	ت ت ص	ت ت ن
]9–5]	3	7	0,85	2,55	0,43	3	25
]13–9]	5	11	1,04	5,2	0,45	8	22
]17–13]	8	15	1,18	9,44	0,53	16	17
]21–17]	7	19	1,28	8,96	0,37	23	9
]25–21]	2	23	1,36	2,72	0,09	25	2
المجموع	**25**	–	–	**28,87**	**1,87**	–	–

1.حساب الوسط الهندسي:

$$Log\ G=\frac{\sum filogXi}{\sum fi}=\frac{28,87}{25}=1,15$$

$$G=10^{1,15}=14,13$$

–حساب الوسط التوافقي:

$$H=\frac{\sum fi}{\sum\frac{fi}{Xi}}=\frac{25}{1,87}=13,37$$

2. عدد الأطفال الذين تقل أوزانهم عن 21 كلغ هو:

3+5+8+7 أو مباشرة من عمود ت ت ص مقابل الفئة [17–21[نجد: 23 طفل

3. نسبة الأطفال الذين يزنون 13 كلغ فأكثر هو:

$$\% \ 68 = 100\frac{2+7+8}{25}x$$

أو نقرأ العدد في عمود ت ت ن مقابل للفئة [13–17[نجد 17 ونقسمه على 25 ثم نضرب في 100

نجد النسبة.

حل التمرين 09:

ندرج الجدول المساعد التالي:

الفئات	Fi	C	$\mathbf{f\acute{i}} = \frac{fi}{c}$
]15–10]	5	5	1
]30–15]	15	15	1
]40–30]	20	10	2
]45–40]	20	5	4
]50–45]	5	5	1
المجموع	**65**	**–**	**9**

– حساب المنوال:

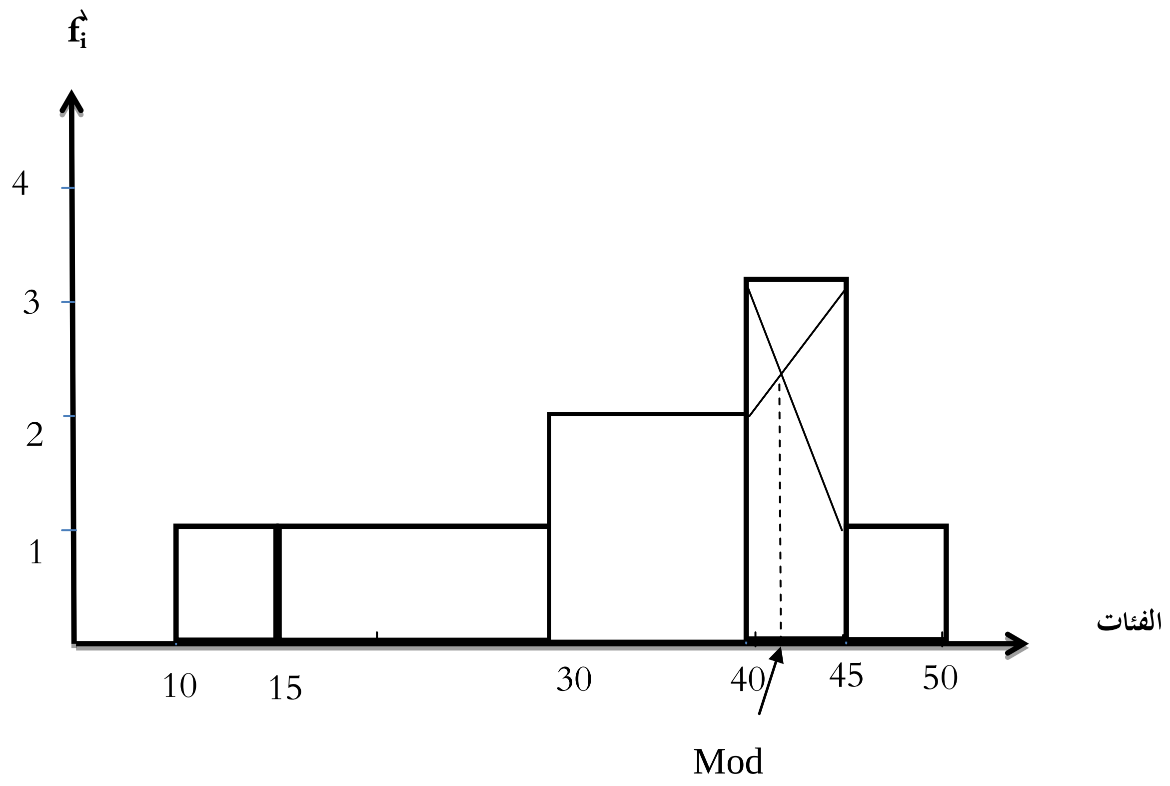
نلاحظ من خلال الجدول أنه جدول غير منتظم أي طول الفئات غير متساوي وعليه عند حساب المنوال أو تمثيله بيانيا يجب تعديل التكرارات حيث أن التكرار المعدّل يكون وفق العلاقة التالية:

$$\mathbf{f\acute{i}} = \frac{fi}{c}$$

ونلاحظ من خلال الجدول أن أكبر تكرار بعد التعديل هو 4 ويقابل [40–45[وهي الفئة المنوالية.

$$\text{Mod}=L_1+\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}.\text{c}$$

$$\text{Mod}=40+\frac{(4-2)}{(4-28)+(4-1)}.5=42$$



حل التمرين 10:

ندرج الحسابات اللازمة في الجدول المساعد التالي:

fiUi	Ui	fidi	di	ت ت ن	ت ت ص	fiXi	Xi	Fi	الفئات
-12	-2	-120	-20	40	6	$20f_1$	20	f_1	**]25-15]**
9-	-1	-90	-10	34	15	270	30	9	**]35-25]**
0	0	0	0	25	28	520	40	13	**]45-35]**
7	1	70	10	12	35	350	50	7	**]55-45]**
10	2	100	20	5	40	$60f_5$	60	f_5	**]65-55]**
(-4)	-	**(-40)**	-	-	-		-	**40**	**المجموع**

1. حساب قيمة الوسيط وتمثيله بيانيا:

لإيجاد ذلك لابدّ من إيجاد قيمتي f1 وf5أوّلا لدينا في المعطيات الأجر المتوسط هو 39 وهو يعكس

الوسط الحسابي.

$$\bar{X}= 39=\frac{\sum fXi}{\sum fi} = \frac{20f1+270+520+350+60f5}{40}$$

بضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$1560=20f_1+60f_5+1140$$

$$420=20f_1+60f_5$$

بالقسمة على (20) نجد:

$$f_1+3f_5=21\ldots\ldots\ldots 1$$

ولدينا:

$$\sum fi=40$$

$$f1+9+13+7+f5=40$$

$$f_1+f_5=40-29$$

$$f_1+f_5=11\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

نحل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} f_1+3f_5=21\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ f_1+f_5=11\ldots\ldots\ldots\ldots 2 \end{cases}$$

نطرح طرفا إلى طرف نجد:

$$3f_5=10 \Rightarrow f_5=\frac{10}{2}=5$$

بتعويض قيمة f_5 في إحدى المعادلتين نجد:

$$f_1=11-f_5=11-5=6$$

f_1=6

-الوسيط:

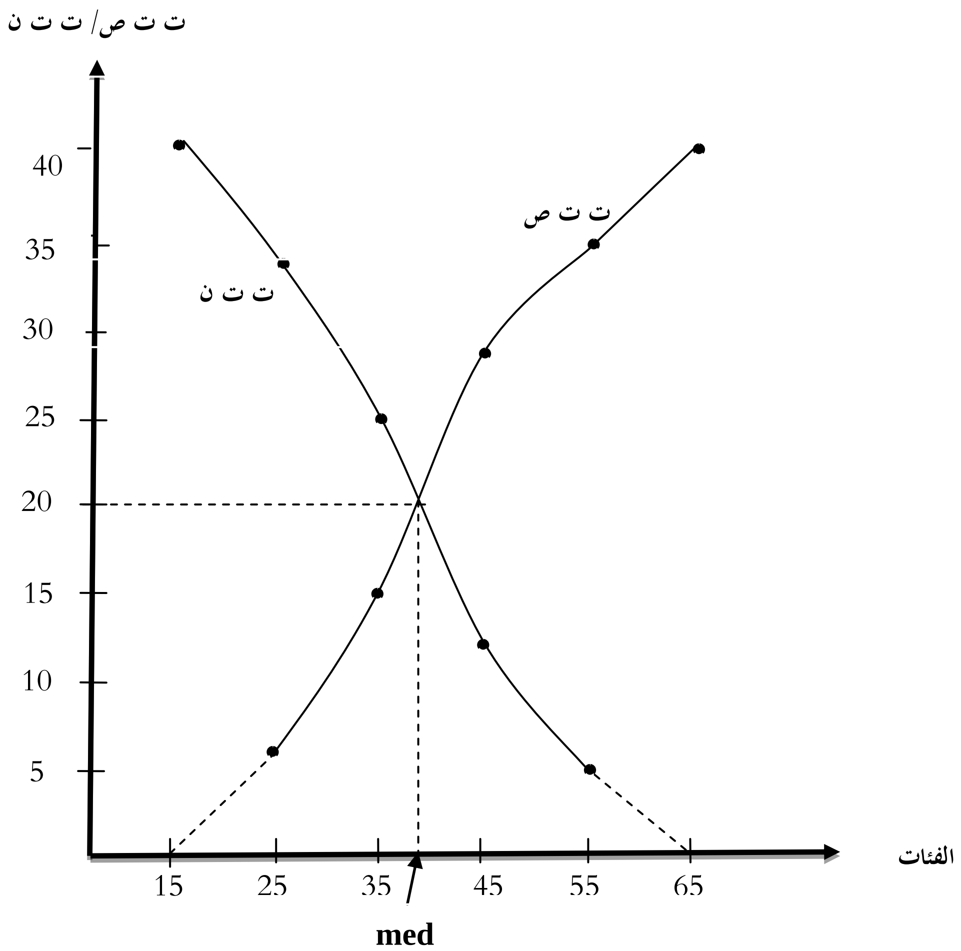
$$c.Med = L_1 + \frac{\frac{\sum fi}{2} - \sum f1}{fMed}$$

لدينا رتبة الوسيط نبحث عنها في عمود ت ت ص نجد التي تكبرها مباشرة وهي 28 تقابل الفئة [35-45[وهي الفئة الوسيطية وعليه تكون قيمة الوسيط كما يلي:

$$Med = 35 + \frac{20-15}{3} x10 = 38,85$$

-التمثيل البياني:

يمثل الوسيط بيانيا عن طريق نقطة تقاطع منحنى ت ت ص ومنحنى ت ت ن لما نسقط تلك النقطة على محور الفواصل نجد قيمة الوسيط أما بالإسقاط على محور التراتيب نجد رتبة الوسيط.



2. المنوال حسابيا وبيانيا:

أ. حسابيا:

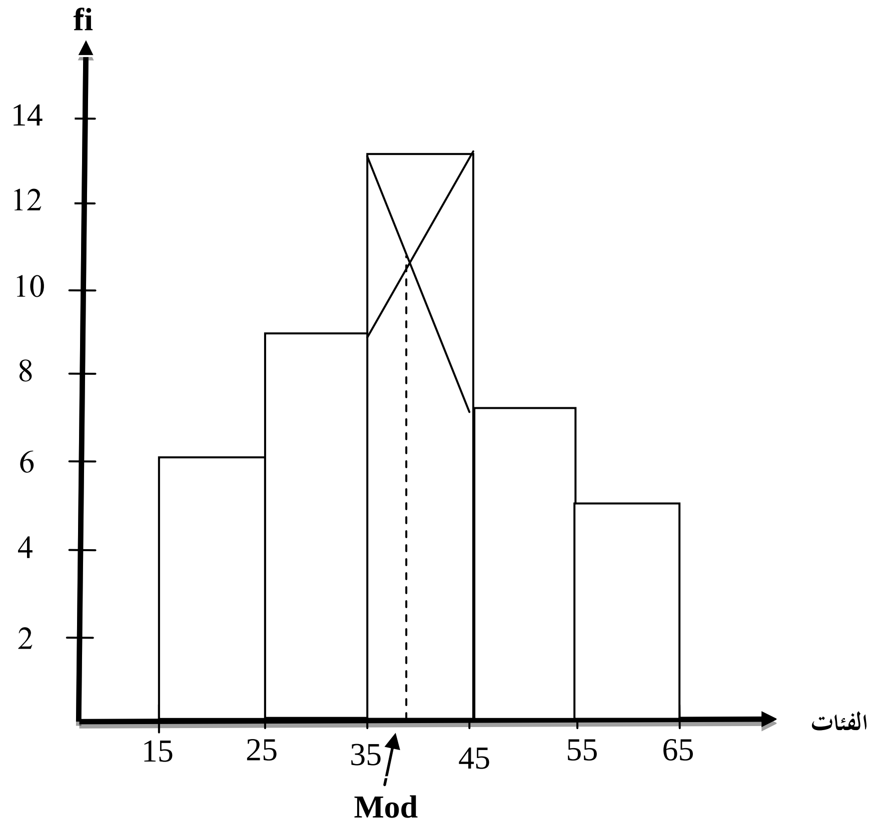
$$\text{Mod}=L_1+\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\text{xC}$$

الفئة المنوالية هي الفئة التي تقابل أكبر تكرار وهي [35-45[

$$\text{Mod}=60+\frac{(13-9)}{(13-9)+(13-7)}\text{x}10=39$$

ب. بيانيا:

لتحديد المنوال بيانيا نرسم المدرج التكراري أو نكتفي برسم أطول عمود والذي يقابل أكبر تكرار والذي يسبقه والذي يليه.



3. الوسط الحسابي بمختلف الطرق:

أ. الطريقة المباشرة

$$\frac{1560}{40} = 39 = \bar{X} = \frac{\sum fXi}{\sum fi}$$

ب. طريقة الانحرافات عن وسط فرضي:

A=40 نفرض وسطا فرضيامن مراكز الفئات ومن الأحسن أن يقابل أكبر تكرار لتسهيل الحساب لا غير

.

$$\bar{X} = \frac{\sum fdi}{\sum fi} = 40 + \frac{(-40)}{40} = 39$$

ج. طريقة الانحرافات المختصرة:

$$\bar{X} = \left(\frac{\sum fui}{\sum fi}\right).C = = 40 + \frac{(-40)}{40}.10 = 39$$

حل التمرين 11:

- إذا كان طول الفئات هو خمس ت ت ن للفئة الأولى فإن:

$$C = \frac{1}{5}.50 = 10$$

والوسيط هو ضعف ت ت ن للفئة الخامسة يعني:

2=60.Med= 30

1.حساب قيمة المنوال وتمثيلها بيانيا:

لأجل ذلك لابدّ من إيجاد التكرارات أوّلا ثم حدود الفئات

f_1=50-48=2 $\qquad$ f_5=30-20=10

f_2=48-44=2 $\qquad$ f_6=20-12=8

f_3=44-38=6 $\quad$ f_7=12-6=6

f_4=38-30=8 $\quad$ f_8=6-2=4

ت ت ن للفئة الأخيرةهو نفسه التكرار المطلق الأخير ويكون2 =f_9، ندرج الجدول المساعد:

الفئات	fi	Xi	ت ت ص	ت ت ن	$di = X_i - A$	$ui = \frac{di}{C}$	$fiui$
]25–15]	2	20	2	50	-40	-4	-8
]35–25]	4	30	6	48	-30	-3	-12
]45–35]	6	40	12	44	-20	-2	-12
]55–45]	8	50	20	38	-10	-1	-8
]65–55]	10	60=A	30	30	0	0	0
]75–65]	8	70	38	20	10	1	8
]85–75]	6	80	44	12	20	2	12
]95–85]	4	90	48	6	30	3	12
]105–95]	2	100	50	2	40	4	8
المجموع	**50**	–	–	–	–	–	**0**

– إيجاد حدود الفئات:

$$\text{Med}=L_1+\frac{\frac{\sum fi}{2}-\sum f1}{fMed}.\,c$$

$$60=L_1+\frac{25-20}{10}.C$$

$$60\text{-}5=L_1 => L_1=55$$

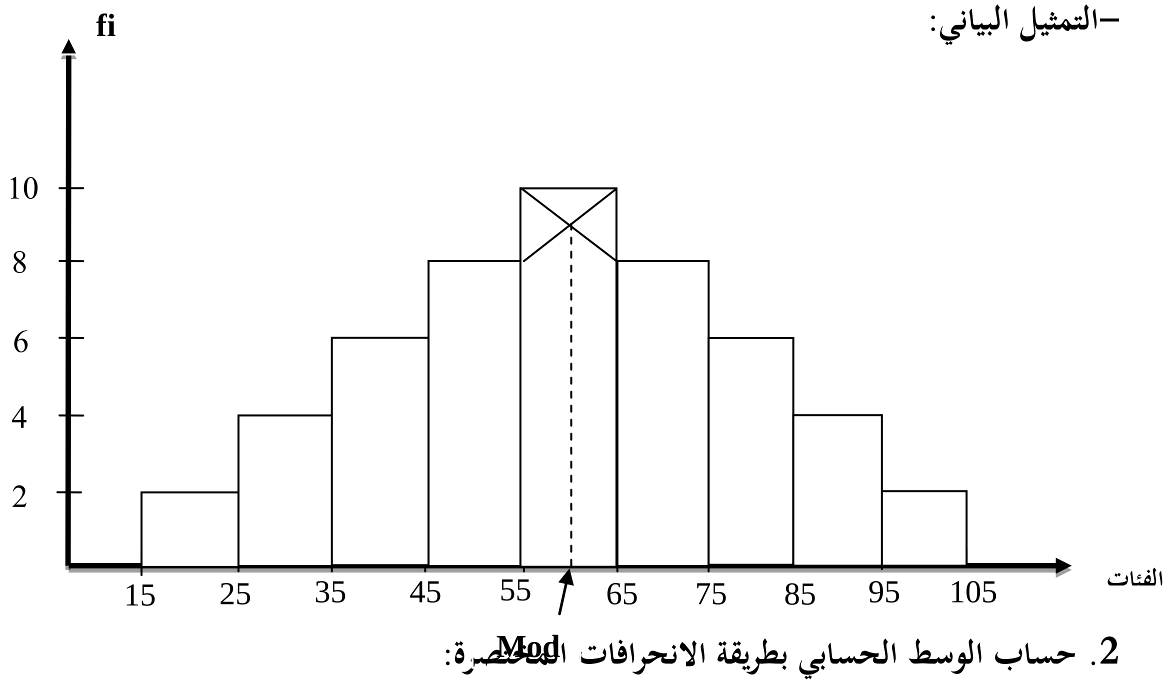
وهو الحدّ الأدنى للفئة الوسيطية المقابلة لرتبة الوسيط لدينا C=10 وبالتالي يكون لدينا

[65-55] ننقص 10 كلما اتجهنا إلى أول الجدول ونضيف 10 في الفئات اللاحقة للفئة الوسيطية.

-قيمة المنوال: نلاحظ أن الفئة المنوالية هي [55-65] تقابل أكبر تكرار وهو 10.

$$Mod = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}.C = 55 + \frac{(10-8)}{(10-8)+(10-8)}.10 = 60$$

-التمثيل البياني:



2. حساب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة:

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\sum fiui}{\sum fi}\right).C = 60 + \left(\frac{0}{50}\right).10 = 60$$

3. نستنتج أن $\bar{X}$ =Med=Mod وحسب كارل بيرسون فإن التوزيع متماثل.

4. نسبة العمال الذين تقل نقاطهم عن 55 نقطة هي:

- عدد العمال = 2+4+6+8 أو مباشرة من عمود ت ت ص وهو 20 وبالتالي :

- النسبة = $\frac{\text{عدد العمال}}{\text{مجموع التكرارات}}$ x100 = $\frac{20}{50}$ x 100 = 40%

5. نسبة العمال الذين تكون نقاطهم 75 نقطة فأكثر هي:

- عدد العمال = 6+4+2 أو مباشرة من عمود ت ت ن وهو 12

- وعليه تكون النسبة $\frac{20}{50}$ = 24 %

حل التمرين **12**:

لدينا115=A وهو سط فرضي يفرض من مراكز الفئات وغالبا ما يكون أمام أكبر تكرار وبما أن الانحراف المختصر

$$ui = \frac{di}{C}$$

و$di = Xi - A$

وعليه لما di=0 <= ui=0 فإن Xiهو مركز الفئة الثالثة ويساوي 115 ولتوضيح ذلك ندرج الجدول المساعد:

الفئات	fi	$fi = \frac{fiui}{ui}$	ui	$di = Xi - A$	Xi	$fiui$
100-90	14	14	-2	-20	95	-28
110-110	16	16	-1	-10	105	-16
120-110	32	0	0	0	115	0
130-120	12	12	1	10	125	12
140-130	8	8	2	20	135	16
150-140	4	4	3	30	145	12
المجموع	**86**	–	–	–	–	(**-4**)

-لما نجمع التكرارات نجد 54 والتوزيع متعلق بأجور 86 عامل ومنه86-54 نجد التكرار المقابل للفئة الثالثة وهو32= f_3

-ولإيجاد حدود الفئات لدينا:

$$L_1 = 95 - 5 = 90 = X_1 = 95 => X_1 - \frac{C}{2}$$

$$=> L_2 = 90 + 10 = 100$$

وعليه تكون الفئة الأولى [90–100] ونضيف C=10 في الفئات الموالية.

1. حساب الوسط الحسابي بالطريقة المختصرة:

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\sum fiui}{\sum fi}\right).C$$

$$\bar{X} = 115 + \left(\frac{-4}{86}\right).10 = 114{,}53$$

2. حساب المنوال:

$$Mod = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}.C$$

$$110 + \frac{(32-16)}{(32-16)+(32-12)} x10 = 114{,}44 = Mod$$

حل التمرين 13:

1.إيجاد أوّلا f_2 و f_5 إدراج الجدول المساعد:

الفئات	$Xifi$	Xi	fi	ت ت ص
]55–45]	500	50	10	10
]65–55]	$60f_2$	60	f_2	$10+f_2$
]75–65]	1680	70	24	$34+f_2$
]85–75]	1200	80	15	$49+f_2$
]95–85]	$60f_5$	90	f_5	$49+f_2+f_5$

]105-95]	1800	100	18	$67+f_2+f_5$
-	**-**	**-**	**100**	**المجموع**

-لدينا ت ت ص للفئة الأولى هو نفسه التكرار المطلق الأول وهو 10 و ت ت ص للفئة الثانية نطرح منه ت ت ص للفئة الأولى نجدf_2 وهو مجهول ثم ت ت ص للفئة الثالثة نطرح منه ت ت ص للفئة الثانية:

$$(34+f_2)-(10+f_2)=34+f_2-10=f_2=24$$

وهكذا نقوم بالعمليات الباقية:

-لدينا في المعطيات $X_1=50$ و$C=10$وعليه$X_2=60$،$X_3=70$ وهكذا........

- لإيجاد حدود الفئات نطبق ما يلي:

$$X_1=L_1+\frac{C}{2}=>L_1=X_1-\frac{C}{2}$$

$$L_1=50-5=45$$

$$L_2=L_1+C=45+10=55$$

وبذلك تكون الفئة الأولى [45-55[

لدينا في المعطيات كذلك$\bar{X}=77{,}9$ وعليه:

$$\bar{X}=\frac{\sum fiXi}{\sum fi}$$

$$77{,}9=\frac{500+60f_2+1680+1200+90f_5+1800}{100}$$

$$7790=5180+60f_2+90f_5$$

$$2610=60f_2+90f_5$$

بالقسمة على (30):

$87=2f_2+3f_5$..................1

لدينا كذلك:

وهي ت ت ص للفئة الأخيرة يساوي مجموع التكرارات يصبح لدينا:

$2=f_2+f_5$..................*33*

$$\begin{cases} 87=2f_2+3f_5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ 2=f_2+f_5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 33 \end{cases}$$

نضرب المعادلة رقم 2 في 2 نجد:

$$\begin{cases} 87=2f_2+3f_5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ 2=2f_2+2f_5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 66 \end{cases}$$

بالطرح طرفا إلى طرف نجد:

$21==f_5$

نعوض قيمة f_5 في المعادلة رقم *2* نجد:

$f_2=33-f_5=12$

2. حساب المنوال:

$$\text{Mod}=L_1+\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}.C$$

$$70{,}71\ 110+\frac{(24-12)}{(24-12)+(24-15)}.10==\text{Mod}$$

حل التمرين 14:

1.حساب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات عن وسط فرضي ندرج أوّلا الجدول المساعد:

A=70

ت ت ص	fidi	di=Xi-A	Xi	الفئات	fi	ت ت ص
3	-60	-20	50	]55-45]	3	3
9	-60	-10	60	]65-55]	6	9
23	0	0	70	]75-65]	f_3=14	9+f_3
35	120	10	80	]85-75]	12	21+f_3
40	100	20	90	]95-85]	5	26+f_3
-	**100**	-	-	-	**40**	**المجموع**

نقوم بنفس خطوات التمرين السابق لإيجاد عمود *fi* ثم:

$$\sum fi = 40$$

$$3+6+f_3+12+5=40 \Rightarrow f_3=14$$

-ولإيجاد حدود الفئات تستخدم منوال الأوزان وهو 73

$$Mod=L_1+\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}.C$$

$$73=L_1+\frac{(14-6)}{(14-6)+(14-12)}.10$$

$$73=L_1+8 \Rightarrow L_1=73-8=65$$

وعليه تكون الفئة المنوالية والتي تقابل أكبر تكرار هي:]75-65] نطرح طول الفئات 10 فيما قبلها ونضيف 10 في الفئات اللاحقة لها.

وبذلك يكون الوسط الحسابي كما يلي:

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fiui}{\sum fi} . C = 70 + \frac{100}{40} . 10 = 72,5$$

2.نسبة الأشخاص الذين يقل وزنهم عن الحد الأعلى للفئة الثالثة أي 75 هو:

$$\%57,5 = 100\text{x}\frac{23}{40}$$

حل التمرين **15**:

لابد من إيجاد حدود الفئات والتكرارات أوّلا:

لدينا X_3=35 ولدينا:

$$d_3 = X_3 - A = 0$$

$$35 - A = 0 \Rightarrow A = 35$$

إذن الوسط الفرضي A يقع في الفئة الثالثة ولإيجاد مراكز الفئات يجب أن نعرف طول الفئات C

$$Ui = \frac{di}{C} = \frac{Xi - A}{C} \Rightarrow C = \frac{X1 - A}{U_1} = \frac{-20}{-2} = 10$$

$$X_3 = 35$$

$$X_2 = 35 - 10 = 25$$

$$X_1 = 25 - 10 = 15$$

وعليه فإن حدّي الفئة الأولى هما [10-20[كما يلي:

$$L_1 = X_1 - \frac{c}{2} \Rightarrow L_1 = 15 - 5 = 10$$

$$L_2 = X_1 + \frac{c}{2} = 15 + 5 = 20$$

أو

$$L_2 = L_1 + c = 10 + 10 = 20$$

وبما أن الجدول منتظم نضيف في كل مرة c=10 نجد باقي الحدود.

-إيجاد التكرارات:

لدينا من خلال المعطيات:

$$\sum fi=20$$

$$f_1+(f_3-4)+f_3+f_1+(f_3-6)=20$$

$$2f_1+3f_3-10=20$$

$$2f_1+3f_3=30............1$$

ولدينا أيضا:

$$\sum fiUi=-3$$

$$-2f_1-(f_3-4)+0+f1+2(f_3-6)=-3$$

$$-2f_1-f3+4+f_1+2f_3-12=-3$$

$$-f_1+f_3=5............2$$

نضرب المعادلة رقم 2 في (3-) نجد:

$$3f_1-3f_3=-15..............3$$

$$\begin{cases} 2f_1+3f_3=30............1 \\ 3f_1-3f_3=-15..............3 \end{cases}$$

بالجمع طرفا إلى طرف نجد:

$$5f_1=15 \Rightarrow f_1=3$$

نعوض قيمة f_1 في المعادلة رقم 2 نجد

$$f_3=5+f_1 \Rightarrow f_3=8$$

وبتعويض قيم التكرارات يكون لدينا الجدول التالي:

الفئات	f_i	ت ت ص
]20-10]	3	3
]30-20]	4	7
]40-30]	8	15
]50-40]	3	18
]60-50]	2	20
المجموع	**20**	-

1. حساب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة:

لدينا: $C=10,\ A=35,\ \sum fi=20,\ \sum fi\,ui=-3$

$$\bar{X}=A+\left(\frac{\sum fiui}{\sum fi}\right).C=35+\left(\frac{-3}{20}\right).10=33{,}5$$

2. حساب الوسيط:

$$c.Med=L_1+\frac{\frac{\sum fi}{2}-\sum f1}{fMed}$$

$$Med=30+\frac{10-7}{8}.10=33{,}75$$

3. حساب الانحراف الربيعي النسبي:

$$C.V.Q=\frac{Q}{Med}\times 100=\frac{Q_3-Q_1}{2Med}\times 100$$

- حساب الربيع الأول Q_1:

$$Q_1=L_1+\frac{\frac{\sum fi}{4}-\sum f1}{fQ_1}.C = 20+\frac{5-3}{4}.\ 10 = 25$$

-حساب الربيع الثالث Q_3:

$$Q_3=L_1+\frac{\frac{3\sum fi}{4}-\sum f1}{fQ_3}.C= 30 + \frac{15-7}{8}.10 = 40$$

ومنه فإن الانحراف الربيعي النسبي يكون :

$$C.V.Q=\frac{40-25}{2(33,75)}.100=22,22\%$$

حل التمرين 16:

لمقارنة التشتت بين الشركتين يجب حساب الانحراف المعياري النسبي (معامل الاختلاف):

$$C.V=\frac{\delta}{\bar{X}}.\ 100$$

$$CV_1=\frac{\delta_1}{\bar{X}_1}.100=\frac{10}{39}.\ 100=25,64\%$$

$$CV_2=\frac{\delta_2}{\bar{X}_2}.100=\frac{8}{30}.\ 100 = 26,67\%$$

نلاحظ من خلال النتائج أن أجور الشركة الثانية أكثر تشتتا (أقل تجانسا) من أجور الشركة الأولى.

حل التمرين 17:

ندرج الحسابات اللازمة في الجدول المساعد التالي:

$fiui^2$	Xi	di	$ui = \frac{di}{C}$	ui^2	$fi = \frac{fui^2}{ui^2}$	fi	$fi\mu i$	ت ت ص	الفئات
40	150	-200	-2	4	10	10	-20	10	]200-100]
20	250	-100	-1	1	20	20	-20	30	]300-200]
0	350	0	0	0	0	40	0	70	]400-300]
20	450	100	1	1	20	20	20	90	]500-400]
40	550	200	2	4	10	10	20	100	]600-500]
المجموع	-	-	-	-	-	100	0	-	-

نقوم بإدراج عمود di ثم عمود uiثم عمودui^2 لنقسم بعد ذلك نجد التكرارات وبما أن التوزيع متعلق بـ 100 عامل فإن المجموع نجده 60 وعليه 40=60-100 وهو تكرار الفئة الثالثة 40= $f3$

$$\bar{X}=350+\left(\frac{\sum fiui}{\sum fi}\right)100 = 350 + \left(\frac{0}{100}\right).100 = 350$$

1. حساب الوسيط:

$$\text{Med}=L_1+\frac{\frac{\sum fi}{2}-\sum f1}{fMed}.\text{C} = 300 +\frac{50-30}{40}.100 = 350$$

- حساب المنوال:

$$\text{Mod}=L_1+\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}.\text{C} = 300+\frac{(40-20)X100}{(40-20)+(40-20)} = 350$$

نستنتج أن $\bar{X}$ =Med=Mod <=توزيع متماثل

2. استنتاج معامل الالتواء:

بما أن التوزيع متماثل فإن معامل الالتواء معدوم، أي أن التوزيع طبيعي ولا يوجد التواء لا يمين ولا يسار .

حل التمرين 18:

المنحنى الأول ملتوي نحو اليمين (التواء موجب) أمّا المنحنى الثاني ملتوي نحو اليسار (التواء سالب) وبمقارنة الالتواءين نجد أن المنحنى الأول أكثر التواء من المنحنى الثاني لأن قيمته أبعد عن الصفر، فكلما ابتعد معامل الالتواء عن الصفر زاد التواء التوزيع.

حل التمرين 19:

نحسب معامل الاختلاف للمصانع الأربعة:

$$CV_A=\frac{\delta_A}{\bar{X}_A}x100=\frac{30}{480}x100=6,25\%$$

$$CV_B=\frac{\delta_B}{\bar{X}_B}x100=\frac{50}{600}x100=8,33\%$$

$$CV_C=\frac{\delta_C}{\bar{X}_C}x100=\frac{25}{720}x100=3,47\%$$

$$CV_D=\frac{\delta_D}{\bar{X}_D}x100=\frac{20}{360}x100=5,56\%$$

- تتوزع الأجور بشكل أكثر عدالة في المصنع C لأنه الأقل تشتت.

- يتم ترتيبها كمايلي:

C ثم D ثم A ثم B أي من أصغر قيمة إلى أكبرها.

حل التمرين 20:

نحسب معامل الاختلاف $C.V = \frac{\delta}{\bar{X}} \times 100$

$$CV_1 = \frac{4}{32} x100 = 12,5\%$$

$$CV_2 = \frac{2}{19} x100 = 10,53\%$$

وعليه فالعينة الثانية أقل تشتتا من العينة الأولى.

تمارين مقترحة

تمرين01:

المشاهدات التالية تمثل رواتب 40 موظفا في مؤسسة معينة.

117	200	137	145	113	117	115	110
225	230	113	145	115	225	250	113
185	180	175	113	200	113	250	117
137	148	248	237	240	240	195	190
219	213	209	173	167	195	194	188

كوّن جدول توزيع تكراري ثم مثل هذه البيانات بالطرق التالية:

أ.المنحنى التكراري.

ب. المدرج التكراري.

ج. المضلع التكراري.

د. التكرار التجميعي الصاعد والنازل.

تمرين 02:

ليكن لديكالتكرار التجميعي النازللتوزيع التالي:

2	**6**	**17**	**45**	**130**	**189**	**279**	**373**	**435**	**450**	**ت ت ن**

إذا علمت أن طول الفئات هو تسع (9/1) ت ت ن للفئة السابعة وقيمة الوسيط تساوي 18

1. أحسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

2. أحسب قيمة المنوال ومثلها بيانيا.

3. أحسب الوسط الهندسي.

تمرين 03:

إليك أعمار 300 طالب بالمدرسة العليا للتجارة مبينة في الجدول التالي:

فئات العمر	18-16	20-18	22-20	24-22	26-24	28-26	30-28	المجموع
عدد الطلاب	35	80	20	36	80	28	21	300

1. أوجد المنوال حسابيا وبيانيا.

2. أوجد الوسط الهندسي والوسط التوافقي.

التمرين04:

حصلنا على النتائج التالية بعد تبويب البيانات المجمعة من عينة عشوائية تتكون من 30 عامل بغرض دراسة إنتاجية العامل في شركة ما:

$f_iU_i^2$	9	12	05	0	6	20

إذا علمت أن:

$$\bar{x}=21+(?).6$$

1. أوجد قيمة الوسط الحسابي.

2. أحسب الانحراف الربيعي.

تمرين05:

يبين التوزيع الآتي بعد مساكن 80 موظف بالكلم عن مقرّ عملهم.

f_5	14	26	18	f_1	**fi**

إذا علمت أن مركز الفئة الأول $X_1=20$ و طول الفئات $C=10$ ومتوسط المسافةهو 42 كلم.

1. أحسبf_5,f_1.
2. أحسب الوسيط والوسط التوافقي.
3. أوجد نسبة الموظفين الذين تتراوح المسافة بين مساكنهم ومقرعملهم بين 27 و 58 كلم.

تمرين 06:

1.أحسب الانحراف الربيعي للبيانات التالية:

45، 30، 25، 50، 95، 70، 65

2. أحسب الانحراف المتوسط حول$\bar{X}$ وحولMed للقيم التالية: 7، 9، 14، 17.

التمرين 07:

يعطى التكرار التجميعي الصاعد لأوزان 60 طالب، فإذا علمت أن:

$$\bar{X} = 67,5,\ X_1=52,5,\ C=5$$

$42+f_2+f_5$	$36+f_2+f_5$	$28+f_2+f_5$	$28+f2$	$16+f_2$	$6+f_2$	**ت ت ص**

1. أوجد:$f_2,\ f_5$.

2. أحسب المنوال وحدده بيانيا.

3. أحسب الانحراف المتوسط حول الوسيط وماذا نستنتج؟

5. أحسب الانحراف المعياري عن طريق قيمX نفسها.

6. استنتج معامل الالتواء واحسب معامل التفرطح.

التمرين 08:

يبين الجدول التالي نقاط الخبرة لـ 30 عامل في مؤسسة ما

مركز الفئة	15	25	35	45	55
fi	2	7	10	8	3

1. أحسب الوسيط.

2. أحسب الانحراف المتوسط حول الوسيط.

3. ما هي نسبة العمال الذين تقل نقاط خبرتهم عن 50 نقطة.

التمرين 09:

يعطى التوزيع التكراري لفوج من الكشافة يتكون من 20 طفلا في الجدول التالي

$f_i d_i^2$	32	20	0	16	16

باعتبار أن مركز الفئة الثالثة يساوي 10، وطول الفئات يساوي 2

1.أحسب متوسط أعمار هؤلاء الأطفال بطريقة الانحرافات المختصرة.

2. أحسب المنوال ومثله بيانيا.

3. أحسب معامل الالتواء وعلق عليه.

التمرين 10

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان 48 شخصا

الفئات	]50-40]	]60-50]	]70-60]	]80-70]	]90-80]
$f_I U_I$	-16	-10	0	10	16

1. أوجد الوسط الحسابي بطريقة الانحرافاتعن وسط فرضي.
2. أحسب المنوال.
3. أحسب الانحراف المتوسط حول الوسيط و ماذا تستنتج؟
4. استنتج معامل الالتواء وعلق عليه.

تمرين 11:

من خلال دراستنا للعلامات النهائية للطلبة في إحدى المقاييس

وجدنا أن الوسط الحسابي لعلامات المجموعة الأولى هو14 بانحراف معياري قدره 4,5نقطة، والوسط الحسابي لعلامات المجموعة الثانية هو 11 بانحراف معياري قدره نقطتين.

أي من المجموعتين علاماتها أكثر تجانسا (أقل تشتتا) ؟

التمرين 12:

أحسب الانحراف الربيعي والانحراف المتوسط من بيانات الجدول التالي:

الفئات	100-90	110-100	120-110	130-120	140-130	150-140	ε
Fi	80	14	36	80	28	21	300

التمرين 13:

أحسب الانحراف الربيعي النسبي والانحراف المتوسط النسبي من بيانات التمرين رقم 12.

تمرين14:

يبين الجدول التالي توزيع الأجور اليومية لعينة من العمال تتكون من 50 عاملا.

الفئات	]75-65]	]85-75]	]95-85]	105-95]	]115-105]
عدد العمال	5	10	20	10	f_5

1.أوجد الوسط الحسابي.

2. أحسب الوسيط واستنتج المنوال.

3. استنتج معامل الالتواء.

قائمة المراجع

1. أماني عزوزة، محاضرات في الإحصاء، مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى ل م د جذع مشترك، علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير، جامعة عبد الحميد مهري-قسنطينة 2، 2019-2020.

2. بلال القاضي، سهيلة عبد الله، محمود البياتي، الإحصاء للإداريين والاقتصاديين، دار الحامد للنشر والتوزيع، الأردن، عمان، 2003.

3. بنية صابرينة، محاضرات في الإحصاء الوصفي (الإحصاء01) مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى علوم اقتصادية وعلوم تجارية وعلوم التسيير LMD، جامعة ابن خلدون، تيارت السنة الجامعية، 2017-2018.

4. بوموس فوزية، محاضرات في مقياس الإحصاء الوصفي والاستدلالي سند بيداغوجي مقدم لطلبة سنة أولى علوم اجتماعية، المركز الجامعي نور البشير بالبيض 2017-2018.

5. زهية حوري، ملخص، الإحصاء الوصفي، دروس وتمارين محلولة، مطبعة إقرأ، قسنطينة، الجزائر، الطبعة الأولى، 2013.

6. السعدي رجال، الإحصاء الوصفي، نظام ل. م.د كل التخصصات تمارين وتطبيقات محلولة، مؤسسة الرجاء للطباعة والنشر 2013، قسنطينة الجزائر.

7. سليم ذياب السعدي، مبادئ علم الاحصاء، دار الكتب الوطنية، بنغازي، ليبيا، الطبعة الأولى 2004.

8. شريف شطيبي، محاضرات في مقياس الإحصاء الوصفي لطلبة السنة الأولى، السنة الجامعية، 2001-2002.

9. صياغ أحمد رمزي، محاضرات في الإحصاء الوصفي، إحصاء 1 مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى، جذع مشترك جامعة قاصدي مرباح، ورقلة، 2015.

10. عبد الرزاق عزوز، الكمال في الإحصاء، دروس مفصلة، تمارين ومسائل مع الحلول، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، 2010.

11. محمد حسين محمد رشيد، الإحصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، ط1، 2008.

12. موساوي عبد النور، دروس في الإحصاء الوصفي، منشورات جامعة منتوري قسنطينة، 2004.

13. مونية بجاوي، محاضرات في الإحصاء الوصفي، مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك، جامعة احمد بوقرة، بومرداس السنة الجامعية 2016-2017.

14. Fethi EL BEKRI, Statistique Descriptive, Cours, Méthodes et Applications, Deuxième édition, revue et augmentée, Centre de Publication Universitaire, 2010.

15. Hocine HAMDANI, Statistique Descriptive, Exercices et corrigés, OPU, 6 ème édition 2010

16. La Statistique Descriptive, A portée de tous, LAZARY.

البرنامج الوزاري

- **المادة**: الإحصاء 1
- **وحدة التعليم**: المنهجية
- **الرصيد**: 4
- **المعامل**: 2
- **طريقة التقييم**:

- مستمر 50%

-امتحان 50%

- **محتوى المادة**:

1. مفاهيم عامة

-مفهوم الإحصاء

- المجتمع والعينة والفرد

- مصادر وطبيعة البيانات الإحصائية

2. عرض البيانات الإحصائية

-بناء الجداول وأنواعها (إيجاد الفئة، التكرارات، مركز الفئة، التكرار المتجمع)

3. التمثيل البياني حسب نوع المتغير

4. مقاييس النزعة المركزية الموضعية (الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال)

5. مقاييس التشتت

-التوزيع المغلق (الانحراف المعياري)، التوزيع المفتوح (نصف المدى الربيعي)

- المؤشرين

6. الأشكال (الشكل المتماثل، الالتواء، التفرطحوالتذبب)

فهرس المحتويات