

المقياس: د. يا منيات ٥٥.

السنة الجامعية: ٢٠٢٥ - ٢٠٢٦

الأستاذة: فايزي ريمة.

المدرسة: العليا الأستاذة: آسيا حبار

قسطنطينة - مدعة حيجل

مدرس: أستاذ تعليم المتوسطة علوم
الطبيعة.

المحور الثاني: الاحتمالات

٥1: المفاهيم الأساسية في حساب الاحتمالات:

- المجموعة Set: تسمى مجموعة كل قائمة من الأشياء أو الأعداد أو الخليط منهما، كما يمكن تعريف المجموعة باستخدام خاصية مشتركة لجميع عناصرها.
- التجربة العشوائية: Random experiment هي تجربة لا يمكن معرفة نتائجها مسبقا، لكن يمكن تحديد مجموعة كل النتائج الممكنة وتسمى فضاء العينة أو الإمكانيات.
- فضاء العينة: Sample space تعرف فضاء العينة على أنه مجموع كل النتائج الممكنة لتجربة عشوائية وبدون إهاب Ω .

مثال 1: رمي قطعة نرد غير متحيزة مرة واحدة:

فضاء العينة هو: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

مثال 2: رمي قطعة نقدية معدنية غير متحيزة:

فضاء العينة هو: $\Omega = \{PP, FF, PF, FP\}$

Event: هو مجموعة جزئية من فضاء

الحدث

العينة Ω ويسمى:

✓ الحدث المستحيل: impossible event وهو مجموعة فارغة ϕ بدون أي عنصر وبدون أي نتيجة

✓ الحدث المؤكد (sure) certain event هي المجموعة التي تحتوي على كل النتائج الممكنة لتجربة:

✓ الحدث الأولي أو البسيط: Elementary Event هو كل مجموعة جزئية تحتوي على عنصر واحد

مثال: إذا كان A حدث الحصول على الأرقام الفردية عند رمي قطعة نرد غير المتجزئة واحدة: $A = \{1, 3, 5\}$.

* عمليات على الأحداث: لتكن A و B حادثان عشوائيان من فضاء العينة Ω :

- الإحتواء ($B \subset A$) يعني وقوع الحدث B يستلزم بضرورة وقوع الحدث A .

- اتحاد حدثان ($A \cup B$) مجموعة النتائج الممكنة الموجودة في A أو B أو كليهما.

- تقاطع حدثان: ($A \cap B$) مجموعة النتائج الممكنة الموجودة في A و B في آن واحد.

- الحدث المكمل (المتكم) $\bar{A}$: Complementary events.

الحدث A هو مجموعة النتائج الموجودة في فضاء العينة Ω وغير

موجودة في A .

- الحدثان المتنافيان (Mutually Exclusive Event) نقول

أن الحدثين A و B متنافيان حين يستحيل تحققهما في آن واحد

ونقول أيضا متعارضين أو متضادين وعليها فإن

$$A \cap B = \phi$$

* خصائص جبرية على المجموعات:

[1] قانون الارتداد (المتممة المزدوجة)

$$\overline{\overline{A}} = A$$

[2] قانون التبادل (Commutative)

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

[3] قوانين التجميع (Associative)

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

[4] قوانين التوزيع (Distributive)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

[5] قوانين ديمورغان (De Morgan's Laws)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

٥٢ : تعريف الاحتمال:

يعرف الاحتمال على أنه دراسة التجارب العشوائية حيث يقيس فرصة وقوع الحادثة A ويبدل له بـ $P(A)$ ويكون محصوراً بين ٠ و ١ .
- يتم حساب الاحتمال في حالة النتائج لها نفس فرصة الظهور بقسمة عدد الحالات المواتية للحدث على عدد الحالات الممكنة .

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

مثال : خذوا قطعة خرد مرة واحدة ولتكن :

A : ظهور الرقم الزوجي .

B : ظهور الرقم الفردي .

العدد الكلي للحالات الممكنة هو :

$$\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

هناك ٥٣ حالات ملائمة للحصول على عدد زوجي $A = \{ 2, 4, 6 \}$

وبفرض ان كل الحالات الممكنة لها نفس فرصة الظهور فإن

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6}$$

وكذلك يوجد ٥٣ حالات ملائمة للحصول على عدد فردي $B = \{ 1, 3, 5 \}$ إذن

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6}$$

٥٣: خواص وقواعد الاحتمالات:

- [1] احتمال الحدث المستحيل $P(\emptyset) = 0$
- [2] احتمال الحدث المتمم $\bar{A}$ هو $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- [3] اذا كان A و B حدثين و $A \subseteq B$ فالت: $P(A) \leq P(B)$.
- [4] اذا كان A و B حدثين فكون (بديهية الانفصال Disjunctive Axiom) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- [5] اذا كان A و B حدثين متضاربين فالت: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

مثال: رمي قطعة نرد ذو 6 اوجه متزنة، لتعبر الأحداث التالية.

A : الحصول على عدد زوجي.

B : الحصول على مضاعف للعدد 3.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

* الحالات الممكنة:

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

• الحالات الملائمة لـ A :

$$B = \{3, 6\}.$$

• الحالات الملائمة لـ B :

لذا فإن الحالات الملائمة لتقاطع A و B أي الحصول على عدد زوجي ومضاعف للعدد 3 هو:

$$A \cap B = \{6\}.$$

$$\text{ومن هنا نجد: } P(A \cap B) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{2}{6}, \quad P(A) = \frac{3}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{3}{6}.$$

4: الاحتمالات الشرطية والاستقلال:

4-1- الاحتمالات الشرطية:

تعريف: لتكن A و B حدثين متلازمين. ($A \cap B \neq \emptyset$) بالاحتمالات غير معدومة، ان احتمال تحقق الحدث A علما ان الحدث B قد تحقق يسمى الاحتمال الشرطي لـ A بالنسبة الى B ويرمز له: $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ملاحظة: يمكن كتابة الصيغة أعلاه:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A) \quad \dots \textcircled{2}$$

منه و $\textcircled{1}$ نستنتج أن:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

(ملاحظة الاحتمالات المركبة).

مثال: تعتبر تجربة إلقاء قطعة النقود مرتين:
• احسب احتمال ظهور الكتابة P في الرمية الثانية، اذا ظهرت الصورة F في الرمية الاولى.

• تعتبر فضاء العينة: $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$.

• نعرف الحدثين: A : ظهور F في الرمية الاولى، B : ظهور P في الرمية الثانية

$$\text{اذن: } A = \{FP, FF\} \text{ ومنه } P(A) = \frac{2}{4}$$

$$B = \{PP, FP\} \text{ ومنه } P(B) = \frac{2}{4}$$

$$A \cap B = \{FP\} \text{ اذن } P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

احتمال ظهور الكتابة P في الرمية الثانية علما ان F ظهرت في الرمية الاولى هو:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B).$$

2 - 4: الاستقلال في الاحتمالات

تعريف: فنقول ان حدثين A و B هما مستقلان احتماليا. اذا كان احتمال الحدث A المشروط بـ B يساوي احتمال الحدث A اي:

$$P(A|B) = P(A).$$

يمكن التعبير عن هذه العلاقة أيضا كما يلي:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

مثال: عند رمي حجر النرد متزن، لتعبر الحدثين:

A : الحصول على عدد زوجي.

B : الحصول على عدد مضاعف للعدد 3.

هل A و B مستقلان؟

وجدنا سابقا: $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(B) = \frac{2}{6}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

اذن بما أن:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

و

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

اذن $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$ ما يعني انهما مستقلان