

المحور الأول: العمليات على جبر المصفوفات

أ. بودودة مريم

المحور الأول: جبر المصفوفات

جبر المصفوفات، وهو فرع من فروع الرياضيات يركز على دراسة المصفوفات وعملياتها. تعتبر المصفوفات أداة قوية في العديد من المجالات، بما في ذلك الرياضيات، والهندسة، والفيزياء، وعلوم الكمبيوتر. سنناقش في هذا المستند الأساسيات المتعلقة بالمصفوفات، مثل العمليات الأساسية، والخصائص، والتطبيقات.

1. تعريف المصفوفة

المصفوفة تأخذ شكل مستطيل من الأعداد أو الرموز، يتم تنظيمها في صفوف وأعمدة. يمكن تمثيل المصفوفة بشكل عام بالشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

المصفوفة A من الشكل (m×n) حيث:

- m تمثل عدد صفوف المصفوفة
- n تمثل عدد أعمدة المصفوفة
- a_{ij} قد تكون أعداد صحيحة، حقيقية، متغيرات وقد تكون دوال رياضية.

2. درجة المصفوفة

تحدد درجة المصفوفة (m) على أساس عدد الصفوف والأعمدة (n)، وعليه تكون المصفوفة من الدرجة (m×n). فمثلا لدينا المصفوفة 2 × 4.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3.5 \\ 0.2 & 5 \end{bmatrix}$$

3. أنواع المصفوفات

تتعدد أنواع المصفوفات نذكر أهمها فيما يأتي:

1.3. المصفوفة الصفرية Zero matrix: هي مصفوفة كل عناصرها أصفار، ويكون الشكل العام لها كما في المصفوفة A:

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

وعلى سبيل المثال لدينا المصفوفتين A' و A".

$$Z' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Z'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث أن المصفوفة A' من الدرجة (4x3) والمصفوفة A" من الدرجة (2x3).

2.3. مصفوفة الصف الواحد Raw matrix: وهي مصفوفة مكونة من صف واحد أفقي كما في المصفوفة A التالية:

$$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}]$$

إذن مصفوفة الصف الواحد تكون من الدرجة (1xn).

نأخذ مثال عن ذلك:

$$A = [-1 \quad 0 \quad 0.5]$$

حيث أن هذه المصفوفة من الدرجة (1x3).

3.3. مصفوفة العمود الواحد Column matrix: هذه المصفوفة تكون مكونة من عمود واحد،

وتأخذ الشكل كما في المصفوفة A الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0.7 \end{bmatrix}$ ، هذه المصفوفة من الدرجة (3×1) .

4.3. المصفوفة المربعة **Square matrix**: هي المصفوفة التي يتساوى فيه عدد الصفوف مع عدد الأعمدة $(m=n)$ ، وتكون على الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

القطر الرئيسي

وعليه فالمصفوفة المربعة ذات الدرجة $(n \times n)$

ملاحظة:

تسمى العناصر a_{ij} في المصفوفة المربعة بالقطر الرئيسي.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = [3]$$

درجة المصفوفة

3×3 2×2 1×1

5.3. المصفوفة القطرية **diagonal matrix**: هي المصفوفة المربعة التي جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر، فتكون على الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{وكمثال عن ذلك:}$$

6.3. مصفوفة الوحدة Identity matrix: هي مصفوفة قطرية بحيث أن عناصر قطرها كلها وحدات يتجه من أعلى اليسار إلى أسفل اليمين، وتكون باقي عناصر المصفوفة أصفار، وشكلها العام كما في المصفوفة I:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

ملاحظة:

كل مصفوفة وحدة هي مصفوفة قطرية، ولكن ليس كل مصفوفة قطرية هي مصفوفة وحدة.

7.3. المصفوفة المثلثية Periodic: هي مصفوفة مربعة تكون جميع عناصرها a_{ij} التي فوق القطر صفرية وتسمى **مصفوفة مثلثية سفلى (دنيا)**، وشكلها العام كالتالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

وكمثال عن ذلك:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

أما إذا كانت جميع عناصرها a_{ij} التي فوق القطر صفرية وتسمى **مصفوفة مثلثية عليا**، وشكلها العام كالتالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

وكمثال عن ذلك:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

7.3. المصفوفة المتماثلة Symmetric matrix: هي مصفوفة مربعة تتساوى فيها عناصرها فوق القطر مع تلك التي تحت القطر، وتعتبر آخر هي مصفوفة مربعة التي تتساوى حدودها، أي $A = A^t$ حيث أن A^t هو منقول المصفوفة A . وعليه فشرط التماثل هو:

$$\forall i, j, a_{ij} = a_{ji}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 10 \\ 8 & 10 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 10 \\ 8 & 10 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$A = A^t$ وعليه فالمصفوفة A هي مصفوفة متماثلة.

إفادة:

المصفوفة A^t هي منقول المصفوفة $A \Leftrightarrow$ أعمدة A تصبح أسطر في A^t و أسطر A تصبح أعمدة في A^t .

4. العمليات على المصفوفات

كما هو في الأعداد يمكن إجراء العمليات الجبرية على المصفوفات، فيمكن جمعها أو طرحها، كما يمكن ضرب مصفوفة في عدد ثابت أو ضرب مصفوفتين في بعضهما، ولكن لا يكون ذلك إلا بتوفر شروط لإجراء مثل تلك العمليات الجبرية. وفيما يأتي نتعرض إلى أهم العمليات الأساسية التي يمكن إجراؤها على المصفوفات.

1.4. تساوي مصفوفتين Equality of two matrices:

نقول أن المصفوفة $A = [a_{ij}]$ تساوي المصفوفة $B = [b_{ij}]$ إذا تساوت كل العناصر المتناظرة في المصفوفتين مثنى مثنى، ونكتب: $A = B \Leftrightarrow \forall i, j; a_{ij} = b_{ij}$. لذلك حتى تتساوي مصفوفتين لا بد أن يكونا من نفس الدرجة.

2.4. جمع وطرح مصفوفتين Add & subtract matrices:

يمكن جمع وطرح مصفوفتين إذا كانتا من نفس الدرجة، ويتم ذلك بواسطة جمع وطرح العناصر المتناظرة، كما يلي: تتكون A و b مصفوفتان من الدرجة (m×n)، حيث:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1.5 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 4+5 & 2+3 \\ 3+2 & -1+4 & 0.5+1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 4-5 & 2-3 \\ 3-2 & -1-4 & 0.5-1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

*خواص جمع وطرح المصفوفات

لتكن A, B, C مصفوفات لها نفس الدرجة $(m \times n)$. و Z مصفوفة صفيرية من الدرجة $(m \times n)$.

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + B = B + A$$

$$A + Z = A$$

$$A + (-A) = Z$$

3.4. ضرب المصفوفات

يمكن إجراء نوعين من عمليات الضرب على المصفوفات.

أ. **ضرب مصفوفة في مقدار ثابت:** تتم هذه العملية من خلال ضرب المقدار الثابت في جميع عناصر المصفوفة،

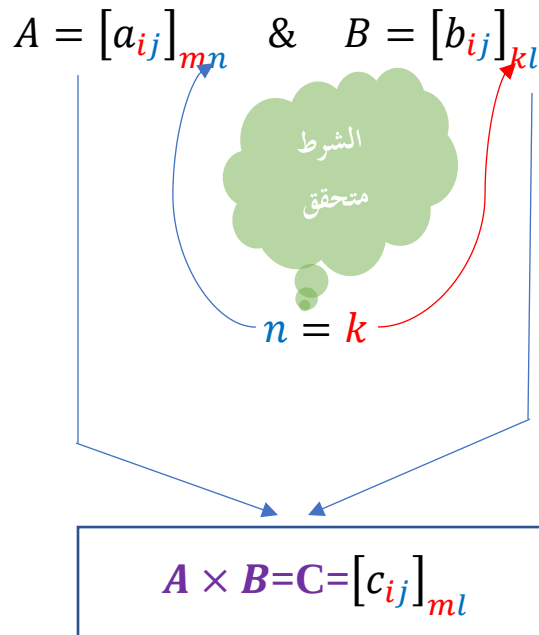
نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

$$3A = 3 \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

ب. **ضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى:** لضرب مصفوفتين ببعضهما لا بد من توفر شرط أساسي وهو تساوي عدد

أعمدة المصفوفة الأولى مع عدد أسطر المصفوفة الثانية. وعليه فإن عملية ضرب مصفوفتين ليس تبديلي

حيث أنه $A \times B \neq B \times A$



مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 4 \times (-1) + 2 \times 2 & 2 \times 0 + 4 \times 2 + 2 \times 1 \\ 3 \times 1 + (-1) \times (-1) + 1 \times 2 & 3 \times 0 + (-1) \times 2 + 1 \times 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

*خواص ضرب المصفوفات

لتكن A, B, C مصفوفات بنفس الدرجة ولتكن كل من k و r ثوابت، ولتكن Z مصفوفة صفرية، و I مصفوفة الوحدة بنفس الدرجة.

$$\vdash A(B+C) = AB+AC$$

$$\vdash A(BC) = (AB)C$$

$$\vdash AB \neq BC$$

$$\vdash kA = [ka_{ij}]$$

$$\vdash k(A+B) = kA+Kb$$

$$\vdash (k+r)A = kA+rA$$

$$\vdash (kr)A = k(rA)$$

$$\vdash I.A = A.I = A$$

$$\vdash Z.A = A.Z = Z$$

إفادة

إذا كان حاصل ضرب المصفوفة A في المصفوفة B يساوي Z (مصفوفة صفرية)، في هذه الحالة ليس من الضروري أن تكون أي من المصفوفتين A أو B مصفوفة صفرية.

5. محدد مصفوفة

المحدد هو عدد يرتبط بمصفوفة مربعة $n \times n$ ، يستخدم في العديد من التطبيقات، مثل إيجاد معكوس المصفوفة والقيم الذاتية، وكذلك حل أنظمة المعادلات الخطية.

1.5. حساب محدد مصفوفة 2×2

إذا كانت المصفوفة المربعة:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

فإن المحدد هو:

$$\det(A) = |A| = ad - bc$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = (8)(4) - (3)(6) = -14$$

2.5. حساب محدد مصفوفة 3×3

إذا كانت المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ + & d & e & f \\ - & a & b & c \\ + & g & h & i \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ + & a & b & c \\ - & d & e & f \\ + & g & h & i \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} +a & -b & +c \\ -d & e & f \\ +g & h & i \end{bmatrix}$$

نقوم أولاً بمناوبة الإشارة أمام عناصر المصفوفة كما هو مبين أعلاه، ثم نقوم بتثبيت سطر أو عمود وسنختار السطر الأول مثلاً لتثبيتته، ثم نناوب بين الأعمدة، فيتشكل لدينا ثلاث مصفوفات 2×2 ، ثم نجمع محدداتها الجزئية بعد ضربها في العنصر المتشكل من تقاطع بين السطر المثبت مع العمود، ولا ننسى تسبيق الإشارة المرافقة للعنصر المتشكل. وعليه نتحصل على العبارة التالية:

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| &= +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= +a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \end{aligned}$$

إذا كانت المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} +3 & -1 & +2 \\ -1 & 2 & 4 \\ +2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} +3 & -1 & +2 \\ -1 & 2 & 4 \\ +2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} +3 & -1 & +2 \\ -1 & 2 & 4 \\ +2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A) = |A| &= +3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= +3((2)(3) - (4)(5)) - 1((1)(3) - (4)(2)) \\ &\quad + 2((1)(5) - (2)(2)) = -35\end{aligned}$$

6. معكوس مصفوفة

A مصفوفة مربعة.

إذا وجدت مصفوفة B تحقق $AB=BA=I$ نقول عن B أنها معكوس (مقلوب) المصفوفة A ونرمز لها بـ $B = A^{-1}$.

1.6. شروط أن تكون مصفوفة قابلة للقلب:

حتى تكون المصفوفة A قابلة للقلب (للعكس)، يجب أن تتحقق شرطان هما:

✚ أن تكون المصفوفة A مصفوفة مربعة

✚ أن تكون المصفوفة نظامية: أي أن يكون محدها يختلف عن الصفر، ونكتب:

$$|A| \neq 0$$

2.6. خواص المصفوفة العكسية:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

3.6. حساب معكوس (مقلوب) مصفوفة

نستخدم محدد ومرافق المصفوفة لحساب المقلوب كما في العلاقة التالية:

$$A^{-1} = \frac{[\text{adj}(A)]^t}{|A|} \quad \text{حيث } \text{adj}(A) \text{ هي المصفوفة المرافقة لـ } A$$

حساب مرافق مصفوفة

مرافق المصفوفة (أو المصفوفة المرافقة) لمصفوفة مربعة هي مصفوفة مربعة تُستخدم في حساب معكوس المصفوفة. يتم الحصول عليها من خلال الخطوات التالية:

- حساب المحدد الصغير (Minor) لكل عنصر.
- تطبيق إشارات القيم المرافقة باستخدام قاعدة الإشارة ونستخرج مصفوفة القيم المرافقة $\text{co}(A)$ (Cofactor).
- أخذ المصفوفة المنقولة (Transpose) للمصفوفة القيم المرافقة فنحصل على المصفوفة المرافقة.

كما سيأتي بيانه.

إذا كانت المصفوفة A :

$$A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ + & d & e & f \\ + & g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\text{co}(A) = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$adj(A) = [co(A)]^t = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$$

بعد حساب المحددات الجزئية نضرب كل محدد في الإشارة المرافقة له كما هو مبين في المصفوفة أعلاه ثم نحول كل سطر إلى عمود وكل عمود إلى سطر (أي نبحث عن المنقول) فنحصل على مرافق المصفوفة A .

مثال:

أوجد معكوس المصفوفة A حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} [co(A)]^t = \frac{1}{|A|} adj(A) \text{ لدينا:}$$

قمنا بحساب محدد هذه المصفوفة سابقا وكان يساوي $|A| = -35$

$$Co(A) = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Co(A) =$$

$$\begin{bmatrix} +(2 \times 3 - 4 \times 5) & -(1 \times 3 - 4 \times 2) & +(1 \times 5 - 2 \times 2) \\ -(1 \times 3 - 2 \times 5) & +(3 \times 3 - 2 \times 2) & -(3 \times 5 - 1 \times 2) \\ +(1 \times 4 - 2 \times 2) & -(3 \times 4 - 2 \times 1) & +(3 \times 2 - 1 \times 1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} +(-14) & -(-5) & +(1) \\ -(-7) & +(5) & -(13) \\ +(0) & -(10) & +(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 5 & 1 \\ 7 & 5 & -13 \\ 0 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = co(A)^t = \begin{bmatrix} -14 & 7 & 0 \\ 5 & 5 & -10 \\ 1 & -13 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{-35} \times \begin{bmatrix} -14 & 7 & 0 \\ 5 & 5 & -10 \\ 1 & -13 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -14/-35 & 7/-35 & 0 \\ 5/-35 & 5/-35 & -10/-35 \\ 1/-35 & -13/-35 & 5/-35 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{35} & \frac{13}{35} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

الخاتمة

تطرقنا في هذا المحور إلى عموميات حول المصفوفات، وسنحاول في الفصل الثاني التعرض إلى علاقة المصفوفات بالتطبيقات الخطية، وكذلك سنحسب القيم الذاتية لها.