

Série 1 : Optimisation non linéaire sans contraintes

Exercice 1 :

Minimiser la fonction $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2x + 17$ dans l'intervalle $[0 ; 1,5]$

(Calculer la racine qui se trouve entre 0 et 1.5 de la fonction $f'(x) = x^2 - 4x + 2$) en utilisant :

- 1) La méthode de Newton en prenant x_0 égal 1 avec $ep = 0.0001$.
- 2) La méthode la sécante en prenant $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$
- 3) La méthode de régula-falsi en prenant $x^a = 0$ et $x^b = 1$

Exercice 2 :

Rechercher les points critiques et déterminer leur nature (maximum local ou global, minimum local ou global, selle (col)) pour les fonctions f définies ci-dessous :

- 1) $f(x, y) = (x - 5)^2 + (y - 2)^2$
- 2) $f(x, y) = 2x^2 + 6y^2 - 5x + 4y$
- 3) $f(x, y) = 4x^2 - 12xy + y^2$

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur R^2 par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

- 1) La fonction f est-elle convexe sur R^2 ?
- 2) Déterminer les points critiques de f , et préciser leur nature (minimum local, maximum local, point-selle, ...).

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur R^2 par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$$

- 1) Déterminer les extremums locaux de f sur R^2 .
- 2) Montrer que f admet un minimum global sur R^2 .

Exercice 5 :

Soit la matrice carrée A dont les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 5$.

1. Quelles sont les dimensions de la matrice A ?
2. Que peut on dire sur la positivité de la matrice A ?
3. Comment déterminer l'équation caractéristique de A ?
4. Calculer le déterminant de A .
5. La matrice A est elle inversible ? Pourquoi ?
6. Calculer la trace de la matrice A .

Exercice 6:

Soit la fonction réelle à deux variables :

$$f(x, y) = x - x^2y + xy^2$$

1. Calculer le Jacobien,
2. Calculer le Hessien,
3. Déterminer l'équation caractéristique du Hessien,
4. Donner les valeurs propres de cette matrice,
5. Cette matrice est elle définie positive, pourquoi ?
6. Calculer le déterminant en utilisant les valeurs propres.
7. Trouver analytiquement les optimums de cette fonction. Quelle sont leurs natures ?