Conditions d'optimalité sous contraintes

Soient $f: D \rightarrow R$ définie sur $D \subseteq R^n$ et $S \subset D$ (inclusion stricte). On considère le problème (P) suivant:

$$\text{minimiser } f(x) \;\; x \in S.$$

S est le plus souvent décrit comme l'ensemble des points vérifiant un nombre fini d'inégalités et d'égalités appelées contraintes:

$$S = \left\{ x \in R^n : g_i(x) \leq 0 \;\; i = 1, \ldots, m, \;\; h_i(x) = 0 \;\; i = 1, \ldots, p \right\}.$$

Suivant le cas $f(x)$, $g_i(x)$, $h_i(x)$ seront de classe C^1 ou C^2.

Un point x quelconque de S est appelé solution réalisable.

Optimisation avec Contraintes

Introduction

- En économie, il est fréquent que l’on cherche à maximiser une fonction sous des contraintes (maximiser un profit ou une utilité compte tenu de contraintes budgétaires, minimiser une dépense compte tenu d’un besoin à satisfaire).

  - Mathématiquement, le problème se pose sous la forme d’une optimisation d’une fonction f à plusieurs variables, sous la contrainte d’une autre fonction g.

Introduction

Le problème d'optimisation avec contraintes consiste à chercher une solution admissible $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}}$ minimisant une fonction objective $f(x)$, soumise à des contraintes de type égalité ou inégalité ou mixte.

Le problème à résoudre s'écrit sous la forme :

$$\underset{x}{\textbf{Minimiser}}\ (\mathrm{f(x)})$$

$$\text{Soumise à : } \begin{cases} g_i(x) = 0 & i = 1,2, \dots \dots, p \\ h_j(x) \leq 0 & j = 1,2, \dots \dots, q \end{cases}$$

Formulation mathématique d'un problème d'optimisation

Un problème d'optimisation continue se présente habituellement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} f(x) \longrightarrow \min, \\ x \in S. \end{cases} \qquad (2.1)$$

- Le vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ est appelé vecteur des variables de décision du problème;
- la fonction $f : R^n \rightarrow R$ est la fonction objectif ;
- S est généralement défini par une collection de contraintes exprimées sous forme d'égalités et d'inégalités, du genre $S = \{x \in R^n, g(x) \leq 0\}$, où $g = (g_1, \dots, g_m)^T$ est une fonction de R^n dans R^m.

Formulation mathématique d'un problème d'optimisation

Un vecteur x^0 est dit solution optimale du problème (2.1) si pour tous les vecteurs $x \in S$, on a $f(x) \geq f(x^0)$.

Optimisation avec contraintes de type égalité

Le problème d’optimisation avec contraintes de type égalité s’écrit sous la forme :

$$\text{Minimiser } (f(x))$$
$$\text{Soumise à : } g_i(x) = 0 \qquad i = 1,2, \dots \dots, p$$

On suppose que les fonctions g_i sont continues et continûment dérivables.

Pour résoudre ce problème, on utilise la méthode d’Euler-Lagrange (multiplicateurs de Lagrange).

La méthode d’Euler-Lagrange (multiplicateurs de Lagrange)

Cette approche consiste à transformer un problème avec contraintes en un problème sans contraintes.

La méthode d’Euler-Lagrange (multiplicateurs de Lagrange)

La fonction Lagrangienne notée L(x, y, λ), est définie "formellement" ainsi :

$$L(x, y, \lambda) = \text{ Fonction à optimiser } + \lambda(\text{ contrainte annulée}),$$

$$ie: \quad L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(g(x, y) - c)$$

Optimisation avec contraintes de type égalité

La méthode d'Euler-Lagrange (multiplicateurs de Lagrange)

1) Premièrement, on forme la fonction de Lagrange(Lagrangien) :

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x)$$
$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$$

où

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m, g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}.$$

Optimisation avec contraintes de type égalité

La méthode d'Euler-Lagrange (multiplicateurs de Lagrange)

2) Deuxièment, on cherche les points critiques de la fonction Lagrangien.

Le gradient du Lagrangien $L(x,\lambda)$, doit être nul :

$$\nabla_{(x,\lambda)}L(x,\lambda) = \begin{cases} \nabla_x L(x,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \\ \nabla_\lambda L(x,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_n} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Optimisation avec contraintes de type égalité

Théorème 4.3.2 (Multiplicateurs de Lagrange). *Si x^0 est un point de minimum relatif local (ou global) pour le problème (4.5), alors il existe un vecteur unique $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m$, appelé vecteur des multiplicateurs de Lagrange, tel que*

$$\nabla L(x^0, \lambda^0) = 0 \Leftrightarrow \nabla_x L(x^0, \lambda^0) = 0 \;\; et \;\; \nabla_\lambda L(x^0, \lambda^0) = 0. \qquad (4.12)$$

Ca veut dire :

$$\nabla L(x^0, \lambda^0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_x L(x^0, \lambda^0) = 0 \\ \nabla_\lambda L(x^0, \lambda^0) = 0 \end{cases} \quad \text{implique} \quad \begin{cases} \nabla_x L = \nabla_x f + \lambda \nabla_x g = 0 \\ \nabla_\lambda L = g(x) = 0 \end{cases}$$

Conditions nécessaires et suffisantes

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$ *La fonction de Lagrange*

Conditions nécessaire

$\exists \boldsymbol{\lambda}^* |$

$$\textit{1)}\ \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{g}\,(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$$

V.1 Multiplicateurs de Lagrange (6)

Exemple

$$\min \; f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{avec} \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\nabla g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla L(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_x L(x, \lambda) = 0 \\ \nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla f(x^*) + \boldsymbol{\nabla g} \; (x^*)\lambda^* = 0 \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^* + \lambda^* x_1^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^* = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^* = -1 \\ x_2^* + 2\lambda^* x_2^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2^* = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^* = -\frac{1}{2} \\ (x_1^*)^2 + 2(x_2^*)^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

V.1 Multiplicateurs de Lagrange (7)

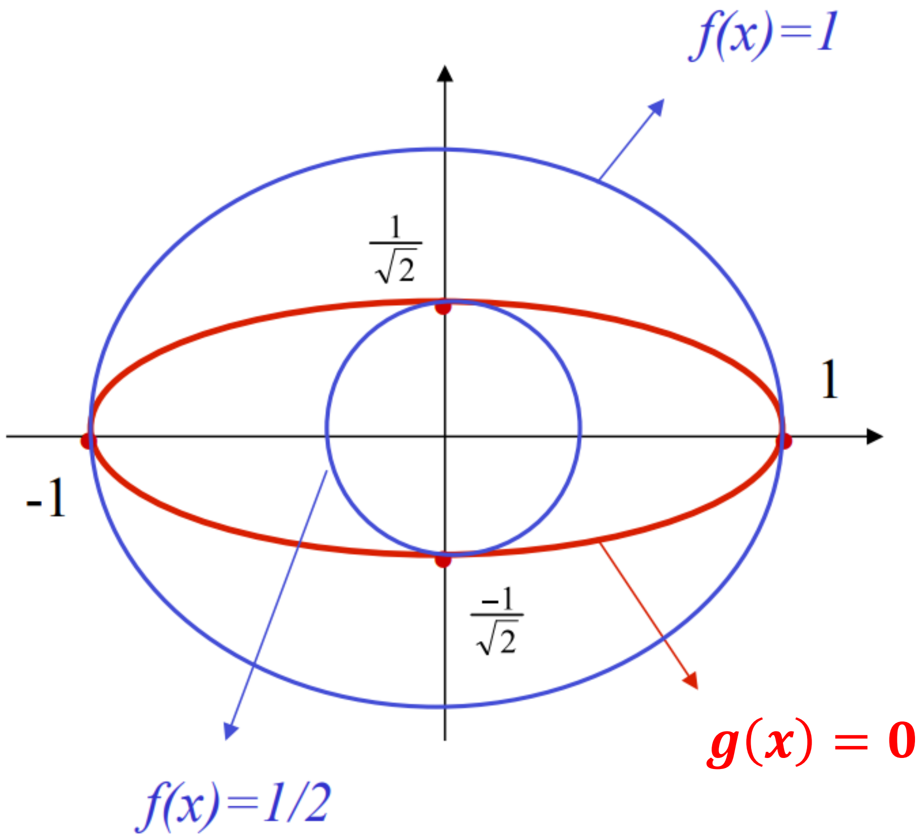
Exemple (suite)

$\Leftrightarrow$

$x_1^* = 0 \quad \text{et} \quad x_2^* = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \lambda^* = -\frac{1}{2}$

ou bien

$x_2^* = 0 \quad \text{et} \quad x_1^* = \pm 1 \quad \text{et} \quad \lambda^* = -1$



$\Rightarrow$ 2 minima en $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

et 2 maxima en $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Optimisation avec contraintes de type égalité

Exemple : minimiser la fonction $f(x) = -x_1x_2$
Soumise à : $g(x) = 2x_1 + 2x_2 - 8 = 0$

1) **Calcul du Lagrangien** : $L(x,\lambda) = -x_1x_2 + \lambda\,(2x_1 + 2x_2 - 8)$

2) **Calcul des points critiques** :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = -x_2 + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = -x_1 + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} = 2x_1 + 2x_2 - 8 = 0 \end{cases}$$

L'équation (1) implique que : $x_2 = 2\lambda$ (4)
L'équation (2) implique que : $x_1 = 2\lambda$ (5)
En remplaçant les équations (4) et (5) dans l'équation (3), on obtient :

$$4\lambda + 4\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Il y'a un seul point critique :
$(x_1, x_2, \lambda) = (2,2,1)$

Exemple 1, avec utilisation du Lagrangien

Optimiser $f(x,y) = -x^2 + xy$ sous la contrainte $g(x,y) = 20$, où $g(x,y) = 2x + y$

- 1er étape : Recherche de point(s) critique(s)
  - Pour tout (x,y), on a $\nabla g_{(x,y)} = (2,1) \neq 0$, on peut donc appliquer la propriété précédente.
  - Le Lagrangien est $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(g(x,y) - 20)$.

$$ie : \quad L(x,y,\lambda) = -x^2 + xy + \lambda(2x + y - 20).$$

  - (x,y,λ) est un point critique de L si

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \quad ie : \begin{cases} -2x + y + 2\lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ 2x + y - 20 = 0 \end{cases}$$

  - On trouve $(x,y,\lambda) = (\frac{10}{3}, \frac{40}{3}, -\frac{10}{3})$.

Optimisation avec contraintes de type égalité

Exemple 4.3.1. Résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 \to \min, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

On définit la fonction de Lagrange :

$$L(x, \lambda) = 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + \lambda_1(x_1 - x_2 + x_3 - 1) + \lambda_2(2x_1 + x_2 + 5x_3).$$

La condition nécessaire d'optimalité est donnée comme suit :

$$4x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \tag{4.13}$$

$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \tag{4.14}$$

$$10x_3 + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \tag{4.15}$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1, \tag{4.16}$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \tag{4.17}$$

Optimisation avec contraintes de type égalité

Exemple 4.3.1

$$4x_1+\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \;\ldots\ldots(1)$$
$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \;\ldots\ldots(2)$$
$$10x_3 - \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \;\ldots(3)$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1 \;\ldots\ldots.(4)$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \;\ldots(5)$$

On additionne (1) et (2)

$$4x_1+ 2x_2 + 3\lambda_2 = 0 \;\ldots\ldots(1')$$
$$4x_1+\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \;\ldots\ldots(1)$$
$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \;\ldots\ldots(2)$$
$$10x_3 - \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \;\ldots(3)$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1 \;\ldots\ldots.(4)$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \;\ldots(5)$$

$$2(2x_1+x_2) = -3\lambda_2 \;\ldots(1')$$
$$4x_1+\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \;\ldots\ldots(1)$$
$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \;\ldots\ldots(2)$$
$$10x_3 - \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \;\ldots(3)$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1 \;\ldots\ldots.(4)$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \;\ldots(5)$$

$$2x_1+x_2 = -\frac{3}{2}\lambda_2 \;\ldots(1')$$
$$4x_1+\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \;\ldots\ldots(1)$$
$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \;\ldots\ldots(2)$$
$$10x_3 - \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \;\ldots(3)$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1 \;\ldots\ldots.(4)$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \;\ldots(5)$$

On remplace (1') dans (5)

$$-\frac{3}{2}\lambda_2 + 5x_3 = 0 \quad \dots (5')$$
$$2x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}\lambda_2 \quad \dots (1')$$
$$4x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \quad \dots\dots (1)$$
$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \dots\dots (2)$$
$$10x_3 - \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \quad \dots (3)$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1 \quad \dots\dots . (4)$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \quad \dots (5)$$

$\longrightarrow$

$$x_3 = \frac{3}{10}\lambda_2 \dots (5')$$
$$2x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}\lambda_2 \quad \dots (1')$$
$$4x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \quad \dots\dots (1)$$
$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \dots\dots (2)$$
$$10x_3 - \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \quad \dots (3)$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1 \quad \dots\dots . (4)$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \quad \dots (5)$$

$\xrightarrow{\text{On substitue (5') dans (3)}}$

$$x_3 = \frac{3}{10}\lambda_2 \quad \dots (5')$$
$$2x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}\lambda_2 \quad \dots (1')$$
$$4x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \quad \dots\dots (1)$$
$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \dots\dots (2)$$
$$10\frac{3}{10}\lambda_2 - \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \quad \dots (3)$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1 \quad \dots\dots . (4)$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \quad \dots (5)$$

$\longrightarrow$

$$\boldsymbol{x_3 = \frac{3}{10}\lambda_2} \quad \dots (5')$$
$$2x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}\lambda_2 \quad \dots (1')$$
$$4x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \quad \dots\dots (1)$$
$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \dots\dots (2)$$
$$10x_3 - \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \quad \dots (3)$$
$$\boldsymbol{\lambda_1 = -8\lambda_2} \quad \dots (3')$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1 \quad \dots (4)$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \quad \dots (5)$$

$\xrightarrow{\text{De (1) et (3')}}$

$$x_3 = \frac{3}{10}\lambda_2 \quad \dots (5')$$
$$2x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}\lambda_2 \quad \dots (1')$$
$$4x_1 = 6\lambda_2 \quad \dots\dots (1'')$$
$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \dots\dots (2)$$
$$10x_3 - \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \quad \dots (3)$$
$$\lambda_1 = -8\lambda_2 \quad \dots (3')$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1 \quad \dots (4)$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \quad \dots (5)$$

$\longrightarrow$

$$\boldsymbol{x_3 = \frac{3}{10}\lambda_2} \quad \dots (5')$$
$$2x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}\lambda_2 \quad \dots (1')$$
$$\boldsymbol{x_1 = \frac{3}{2}\lambda_2} \quad \dots\dots (1'')$$
$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \dots\dots (2)$$
$$10x_3 - \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \quad \dots (3)$$
$$\boldsymbol{\lambda_1 = -8\lambda_2} \quad \dots (3')$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1 \quad \dots (4)$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \quad \dots (5)$$

$\xrightarrow{\text{De (1') et (1'')}}$

$$\boldsymbol{x_3 = \frac{3}{10}\lambda_2} \quad \dots (5')$$
$$x_2 = -\frac{3}{2}\lambda_2 - \frac{6}{2}x_1 \quad \dots (1')$$
$$\boldsymbol{x_1 = \frac{3}{2}\lambda_2} \quad \dots\dots (1'')$$
$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \dots\dots (2)$$
$$10x_3 - \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \quad \dots (3)$$
$$\boldsymbol{\lambda_1 = -8\lambda_2} \quad \dots (3')$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1 \quad \dots (4)$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \quad \dots (5)$$

$\longrightarrow$

$$\boldsymbol{x_3 = \frac{3}{10}\lambda_2} \quad \dots (5')$$
$$\boldsymbol{x_2 = -\frac{9}{2}\lambda_2} \quad \dots (1''')$$
$$\boldsymbol{x_1 = \frac{3}{2}\lambda_2} \quad \dots\dots (1'')$$
$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \dots\dots (2)$$
$$10x_3 - \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \quad \dots (3)$$
$$\boldsymbol{\lambda_1 = -8\lambda_2} \quad \dots (3')$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1 \quad \dots (4)$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \quad \dots (5)$$

$\xrightarrow[\text{Dans (4)}]{\text{On substitue (1''), (5') et (1''')}}$

$$\boldsymbol{x_3 = \frac{3}{10}\lambda_2} \quad \ldots(5')$$
$$\boldsymbol{x_2 = -\frac{9}{2}\lambda_2} \quad \ldots(1''')$$
$$\boldsymbol{x_1 = \frac{3}{2}\lambda_2} \quad \ldots\ldots(1'')$$
$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \ldots\ldots(2)$$
$$10x_3 - \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \quad \ldots(3)$$
$$\boldsymbol{\lambda_1 = -8\lambda_2} \quad \ldots(3')$$
$$6\lambda_2 + \frac{3}{10}\lambda_2 = 1 \quad \ldots(4')$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \quad \ldots(5)$$

$$\longrightarrow$$

$$\boldsymbol{x_3 = \frac{3}{10}\lambda_2} \quad \ldots(5')$$
$$\boldsymbol{x_2 = -\frac{9}{2}\lambda_2} \quad \ldots(1''')$$
$$\boldsymbol{x_1 = \frac{3}{2}\lambda_2} \quad \ldots\ldots(1'')$$
$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \ldots\ldots(2)$$
$$10x_3 - \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \quad \ldots(3)$$
$$\boldsymbol{\lambda_1 = -8\lambda_2} \quad \ldots(3')$$
$$\boldsymbol{\lambda_2 = \frac{10}{63}} \quad \ldots(4')$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \quad \ldots(5)$$

D'où $\lambda_1 = -\frac{80}{63}$, $x_1 = \frac{5}{21}$, $x_2 = -\frac{5}{7}$, $x_3 = \frac{1}{21}$

Optimisation avec contraintes de type égalité

En faisant la somme des équations (4.56), (4.57) et (4.58) et en tenant compte de (4.60), on obtient

$$\lambda_1 + 8\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -8\lambda_2.$$

On aura alors

$$x_1 = \frac{3}{2}\lambda_2, x_2 = \frac{-9}{2}\lambda_2, x_3 = \frac{3}{10}\lambda_2.$$

En utilisant (4.59), on déduit la valeur de $\lambda_2 = \frac{10}{63}$. D'où

$$\lambda_1 = -\frac{80}{63}, x_1 = \frac{5}{21}, x_2 = \frac{-5}{7}, x_3 = \frac{1}{21}, f(x) = \frac{40}{63}.$$

On trouve donc un seul vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ qui réalise le minimum de f sur l'ensemble des contraintes. En effet, la condition nécessaire de Lagrange est aussi suffisante puisque la fonction considérée ici est strictement convexe. Par conséquent,

$$x^* = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 5 & -15 & 1 \end{pmatrix}, f(x^*) = \frac{40}{63}.$$

Point régulier

Le point $\boldsymbol{x}^*\in \boldsymbol{X}$ est **régulier** *ssi* :

- $\boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{x}^*)=0$
- les vecteurs $\boldsymbol{\nabla g_i}(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{i}=\mathbf{1},\ldots,\boldsymbol{p}$, sont **linéairement indépendants**.

Indépendance linéaire

Definition

Des vecteurs $x^1, \ldots, x^k \in \boldsymbol{R}^n$ sont dits **linéairement indépendants** si le système

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = 0$$

admet une solution unique, $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, k$.

Optimisation avec contraintes : Cas général

On va décrire les conditions d'optimalité de ce problème. Trois ingrédients sont nécessaires : Le cône tangent, le cône normal, et la qualification des contraintes

Géométrie de l'ensemble réalisable

a) **Direction réalisable (admissible) :**

$\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}$, est une direction réalisable à partir de $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$ s'il existe $\boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0}$ tel que

pour tout $\boldsymbol{t} \in]\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\varepsilon}[,\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{td}$

b) **cône**

- Un ensemble $\boldsymbol{T} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ est appelé un cône si **pour tout** $\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{T}$ et **tout** $\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\lambda d} \in \boldsymbol{T}$
- L'ensemble de toutes les directions réalisables à partir de $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$ forme un cône.

Le cône tangent

Le **cône tangent** joue un rôle clé en mathématiques appliquées, en particulier en **optimisation**

Le cône tangent décrit les directions possibles dans lesquelles on peut se déplacer à partir d'un point tout en restant dans un ensemble $\boldsymbol{S}$**.** Il est crucial pour définir :

Les conditions d'optimalité : en optimisation contrainte, il permet de caractériser les points stationnaires.

En optimisation mathématique

Le cône tangent est utilisé pour :

Définir les conditions de $\boldsymbol{Karush - Kuhn - Tucker}\ (\boldsymbol{KKT})$: en programmation non linéaire, les multiplicateurs de Lagrange sont liés au cône tangent.

Contrainte active

Si pour $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$ **et pour** $\boldsymbol{j} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{q}\}$ **on a** $\boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, on dit que la contrainte $\boldsymbol{g_i}$ est saturée ou active en $\boldsymbol{x}$.

Une contrainte qui n'est pas active est dite inactive.

On note $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x})$ l'ensemble des indices $\boldsymbol{j}$ correspondants aux contraintes actives en $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}) = \{\, \boldsymbol{j} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{q}\} \colon \boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$$

Direction admissible

On dit qu'un vecteur $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}/\{\mathbf{0}\}$ est une direction admissible en $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}} \in \boldsymbol{S}$ si:

$$\text{Pour } \boldsymbol{j} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{p}\}, \quad \boldsymbol{d}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{i}}\left(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}\right) = \mathbf{0}$$

Qualification des contraintes d'égalité

Soit $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{S}$. Si $\boldsymbol{x}^*$est régulier, alors les contraintes d'égalité $\boldsymbol{g} = \mathbf{0}$ sont qualifiées au point $\boldsymbol{x}^*$ i.e.:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{S}) = \{\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} | \forall \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{d}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}\}$$

Conditions du second ordre (condition suffisante):

$$\nabla^2 L(x^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L & \nabla^2_{x\lambda} L \\ \nabla^2_{\lambda x} L & \nabla^2_{\lambda\lambda} L \end{pmatrix}$$

$$\nabla L(x, \lambda) = \begin{cases} \nabla_x L(x, \lambda) = \nabla_x f(x) + \nabla_x g(x)\lambda \\ \nabla_\lambda L(x, \lambda) = g(x) \end{cases}$$

$$\nabla^2 L(x, \lambda) = \nabla\big(\nabla L(x, \lambda)\big) \Leftrightarrow \nabla^2 L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla^2_x f + \nabla^2_x g(x)\lambda & \nabla_x g(x) \\ \nabla_x g(x) & 0 \end{pmatrix}$$

Définition du Hessien réduit :

Le Hessien réduit est donné par :

$$\boldsymbol{d^t\, \nabla^2_{xx} L(x, \lambda)\, d}$$

Où:

- $\boldsymbol{\nabla^2_{xx} L}$ est le Hessien du Lagrangien par rapport à $\boldsymbol{x}$.
- $\boldsymbol{d}$ est un vecteur dont la colonne forme une base des directions admissibles.

Que représente la matrice $\boldsymbol{d}$?

Le vecteur $\boldsymbol{d}$ vérifie :

$$\boldsymbol{\nabla g(x)^t\, d = 0}$$

Cela signifie que les $\boldsymbol{d}$ sont des directions qui respectent les contraintes (cad ils ne sortent pas de la surface $\boldsymbol{g(x) = 0}$)

Hessien réduit

Intuition

- Le Hessien classique étudie toutes les directions
- Le Hessien réduit étudie juste les directions **compatibles avec les contraintes**

Conditions suffisantes

$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ *La fonction de Lagrange*

$\exists \boldsymbol{\lambda}^{*} |$

2) $\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{t}}\, \nabla^{2}_{\boldsymbol{xx}}\, \boldsymbol{L}\,(\boldsymbol{x}^{*},\boldsymbol{\lambda}^{*})\,\boldsymbol{d} \geq \boldsymbol{0},\ \ (\forall \boldsymbol{d} \in \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}^{*}) \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{d} |\, \boldsymbol{d}^{\boldsymbol{t}}\, \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{*}) = \boldsymbol{0})$

Conditions du second ordre (condition suffisante):

Soit (x^*, λ^*) un point critique :

✓ **Minimum local si:**

$$\boldsymbol{d^t\, \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda)\, d \ \geq 0}, \quad (\forall\, \boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0} | \boldsymbol{d^t \nabla g}\, (\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{d} \in \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}^*))$$

✓ **Maximum local si:**

$$\boldsymbol{d^t\, \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda)\, d \ \leq 0}, \quad (\forall\, \boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0} | \boldsymbol{d^t \nabla g}\, (\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{d} \in \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}^*))$$

V. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

V.1 Multiplicateurs de Lagrange (11)

Exemple

$$\min \ f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{avec} \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\nabla g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{xx}}^{\boldsymbol{2}} L(x,\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$1° \quad \begin{cases} \boldsymbol{\nabla_x f}(\boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{\nabla_x g}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1^* + \lambda^* x_1^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^* = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^* = -1 \\ x_2^* + 2\lambda^* x_2^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2^* = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^* = -\frac{1}{2} \\ (x_1^*)^2 + 2(x_2^*)^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

V. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

V.1 Multiplicateurs de Lagrange (12)

Exemple (suite)

$$\Leftrightarrow x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda^* = -\tfrac{1}{2} \quad \text{ou bien} \quad x^* = \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda^* = -1$$

$$\nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si } \lambda^* = -\tfrac{1}{2} \quad \text{ou bien} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{si } \lambda^* = -1$$

$$\nabla g\,(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{si } \lambda^* = -\tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y^t \nabla g\,(x^*) = 0 \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g\,(x^*) = \begin{bmatrix} \pm 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{si } \lambda^* = -1 \quad \Rightarrow \quad y^t \nabla g\,(x^*) = 0 \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow y^t\, \nabla^2 L(x^*, \lambda^*) y = y_1^2 > 0 \quad \text{si } \lambda^* = -\tfrac{1}{2} \quad \text{ou bien} = -2y_2^2 < 0 \quad \text{si } \lambda^* = -1$$

$$\Rightarrow 2 \text{ minima en } \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{et } 2 \text{ maxima en } \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Optimisation avec contraintes de type inégalité

Le problème d'optimisation avec contraintes de type inégalité s'écrit sous la forme :

$$\text{Minimiser } (f(x))$$

$$\text{Soumise à : } h_j(x) \leq 0 \qquad j = 1,2, \dots \dots, q \tag{3.7}$$

Les contraintes d'inégalité sont de type inférieur ou égal ($\leq$). Si des contraintes de type supérieur ou égal ($\geq$) sont présentes, il suffit alors de les exprimer par leur opposé pour se ramener au cas étudié.

Pour résoudre ce problème, on utilise la méthode de **c** (KKT).
Cette méthode utilise ce qu'on appelle **paramètres de Karush-Kuhn-Tucker** qui sont les $\boldsymbol{\mu_j}$, pour construire une fonction Lagrangienne.
Le lagrangien s'écrit :

$$L(x,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{q} \mu_j h_j(x)$$

$$L(x,\mu) = f(x) + \mu^T h(x) \tag{3.8}$$

2. Optimisation avec contraintes de type inégalité

D'après *Karush-Kuhn-Tucker*, si en un point $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ admet un minimum local dans un domaine admissible $\boldsymbol{D}$ défini par des relations de contraintes inégalités $\boldsymbol{h_j}(\boldsymbol{x}) \leq \mathbf{0}$, il existe alors des paramètres $\boldsymbol{\mu_j} \geq \mathbf{0}$ telle que la fonction de Lagrange vérifiée les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \nabla_x L(x,\mu) = 0 \\ \nabla_\mu L(x,\mu) \leq 0 \\ \mu_j h_j(x) = 0 \\ \nabla_{\mathrm{x}}^2 L(x,\mu) \geq 0 \end{cases}$$

Ces conditions sont dites conditions de *Karush-Kuhn-Tucker* (***KKT***) Lorsque le sens des inégalités des contraintes change, le signe des $\boldsymbol{\mu_j}$ change alors.

2. Optimisation avec contraintes de type inégalité

Nous pouvons résumer les différentes conditions de *Karush-Kuhn-Tucker (KKT)* dans le tableau suivant :

Contraintes	Problème de minimisation	Problème de maximisation
$h_j(x) \leq 0$	$\nabla_x L(x,\mu) = 0$ $\nabla_\mu L(x,\mu) \leq 0$ $\mu_j h_j(x) = 0$ $\nabla_x^2 L(x,\mu) \geq 0$	$\nabla_x L(x,\mu) = 0$ $\nabla_\mu L(x,\mu) \leq 0$ $\mu_j h_j(x) = 0$ $\nabla_x^2 L(x,\mu) \leq 0$
$h_j(x) \geq 0$	$\nabla_x L(x,\mu) = 0$ $\nabla_\mu L(x,\mu) \leq 0$ $\mu_j h_j(x) = 0$ $\nabla_x^2 L(x,\mu) \leq 0$	$\nabla_x L(x,\mu) = 0$ $\nabla_\mu L(x,\mu) \leq 0$ $\mu_j h_j(x) = 0$ $\nabla_x^2 L(x,\mu) \geq 0$

Tableau 1 : Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

2. Optimisation avec contraintes de type inégalité

Exemple : minimiser la fonction $f(x)= 4x_1^2+5x_2^2$

Soumise à : $h(x)=x_1-1\leq 0$

Le Lagrangien s'écrit : $L(x,\mu) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + \mu(x_1 - 1)$

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker s'écrivent :

$$\frac{\partial L(x,\mu)}{\partial x_1} = 8x_1 + \mu = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L(x,\mu)}{\partial x_2} = 10x_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L(x,\mu)}{\partial \mu} = x_1 - 1 \leq 0 \qquad (3)$$

$$\mu h(x) = \mu(x_1 - 1) = 0 \qquad (4)$$

$$\mu \geq 0 \qquad (5)$$

2. Optimisation avec contraintes de type inégalité

A partir de l'équation (4) on a : $\mu = 0$ ou $x_1 - 1 = 0$

Si $\mu = 0$ alors :

L'équation (1) donne : $x_1 = 0$ et l'équation (2) donne $x_2 = 0$, on remarque que le point (0,0) vérifiée toutes les conditions de **KKT,** alors (0,0) c'est minimum local.

Si $x_1 = 1$ alors :

L'équation (1) donne : $\mu_1 = -8$ et l'équation (2) donne $x_2 = 0$, cette solution est rejetée car la condition (5) n'est pas vérifiée.

Alors le point (0,0) est la seule solution du problème, donc (0,0) c'est un minimum global.

3. Optimisation avec contraintes mixtes

Le problème d'optimisation avec contraintes mixtes s'écrit sous la forme :

$$\text{Minimiser } (f(x))$$

$$\text{Soumise à : } \begin{cases} g_i(x) = 0 & i = 1,2, \dots \dots, p \\ h_j(x) \leq 0 & j = 1,2, \dots \dots, q \end{cases}$$

Dans le cas où il y'a simultanément des contraintes de type égalité et de type inégalité, alors on introduit pour chaque contrainte un paramètre qui lui correspond.

Généralement, on appelle :

- Multiplicateurs de Lagrange, les paramètres λ_i relatifs aux contraintes égalité.
- Paramètres de Karush-Kuhn-Tucker, les paramètres μ_j relatifs aux contraintes inégalité.

3. Optimisation avec contraintes mixtes

Pour résoudre ce problème, on déclare premièrement la fonction de Lagrange suivante

$$L(x,\mu,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j h_j(x)$$

$$L(x,\mu,\lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x) \qquad (3.11)$$

En faisant le changement de variable suivant $z = (x,\lambda)$

L'équation (3.11) peut être réécrite sous la forme :

$$L(z,\mu) = H(z) + \mu^T h(x) \qquad (3.12)$$

Avec : $H(z) = f(x) + \lambda^T g(x)$

Finalement, le problème revient à rechercher l'optimum de la fonction $H(z)$ soumise à des contraintes de type inégalité$h_i(x) \leq 0$.

3. Optimisation avec contraintes mixtes

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla_z L(z,\mu) = \begin{cases} \nabla_x L(z,\mu) = 0 \\ \nabla_\lambda L(z,\mu) = 0 \end{cases} \\ \nabla_\mu L(z,\mu) \leq 0 \\ \mu_j h_j(x) = 0 \\ \mu_j \geq 0 \end{cases}$$

3. Optimisation avec contraintes mixtes

Exemple : minimiser la fonction $f(x)= x_2+x_3$

soumise à : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \end{cases}$

Le Lagrangien s'écrit : $L(x, \mu, \lambda) = x_2+x_3+ \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 1)+ \mu(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$

Les conditions de KKT s'écrivent :

$$\frac{\partial L(z,\mu)}{\partial x_1} = \lambda + 2\mu x_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L(z,\mu)}{\partial x_2} = 1 + \lambda + 2\mu x_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L(z,\mu)}{\partial x_3} = 1 + \lambda + 2\mu x_3 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L(z,\mu)}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L(z,\mu)}{\partial \mu} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \leq 0 \qquad (5)$$

$$\mu h(x) = \mu(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) = 0 \qquad (6)$$

$$\mu \geq 0 \qquad (7)$$

3. Optimisation avec contraintes mixtes

L'équation (6) donne : $\mu = 0$ ou $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$

Si $\mu = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} (1) \Rightarrow \quad \lambda = 0 \\ (2) \Rightarrow \lambda = -1 \\ (3) \Rightarrow \quad \lambda = -1 \end{cases}$ il y'a contradiction, donc solution rejetée.

$$\text{Si } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} (1) \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{\lambda}{2\mu} \\ (2) \Rightarrow x_2 = -\frac{(\lambda+1)}{2\mu} \\ (3) \Rightarrow \quad x_3 = -\frac{(\lambda+1)}{2\mu} \end{cases} \qquad (8)$$

En remplaçant l'équation (8) dans l'équation (4), on obtient :

$$-\frac{\lambda}{2\mu} - \frac{(\lambda+1)}{2\mu} - \frac{(\lambda+1)}{2\mu} - 1 = -\frac{1}{\mu} - -\frac{3\lambda}{2\mu} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}\mu\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) \qquad (9)$$

3. Optimisation avec contraintes mixtes

En remplaçant l'équation (9) dans l'équation (8), on va obtenir :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3\mu} + \dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6\mu} \\ x_3 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6\mu} \end{cases} \qquad (10)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = \left(\frac{1}{3\mu} + \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6\mu}\right)^2 - 1 = 0 \qquad (11)$$

3. Optimisation avec contraintes mixtes

En faisant le changement de variable : $y = \frac{1}{3\mu}$

On va réécrire l'équation (11) sous la forme :

$$\left(y+\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}y\right)^2 - 1 = y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}y^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow y = \pm\frac{2}{3} \Rightarrow \mu = \pm\frac{1}{2}$$

La solution $\mu = -\frac{1}{2}$ est rejetée (car la condition (7) n'est pas vérifiée)

Si $\mu = \frac{1}{2}$, on obtient : $x_1 = 1 \quad et \quad x_2 = x_3 = 0$ et $\lambda = -1$ cette solution est admissible, car elle vérifiée toute les conditions de Karush-Kuhn-Tucker.

Et f(1,0,0)=0. Le minimum global.

Définition de L’ensemble S

L’ensemble admissible des points $\boldsymbol{x}$ pour les contraintes d’égalité et d’inégalité, noté $\boldsymbol{S}$, est l’ensemble des points qui respectent les contraintes :

$$\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} / \ \boldsymbol{g_i(x) = 0, i = 1, \dots, P}, \qquad \boldsymbol{h_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m}\}$$

3. Optimisation avec contraintes mixtes

Contrainte actives-inactives

Une contrainte d'inégalité $\boldsymbol{h_i(x) \leq 0}$ est active en x si $\boldsymbol{h_i(x) = 0}$
Elle est inactive si $\boldsymbol{h_i(x) < 0}$

Direction admissible

On dit qu'un vecteur $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}\{\boldsymbol{0}\}$ est une direction admissible en $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{S}$ si:

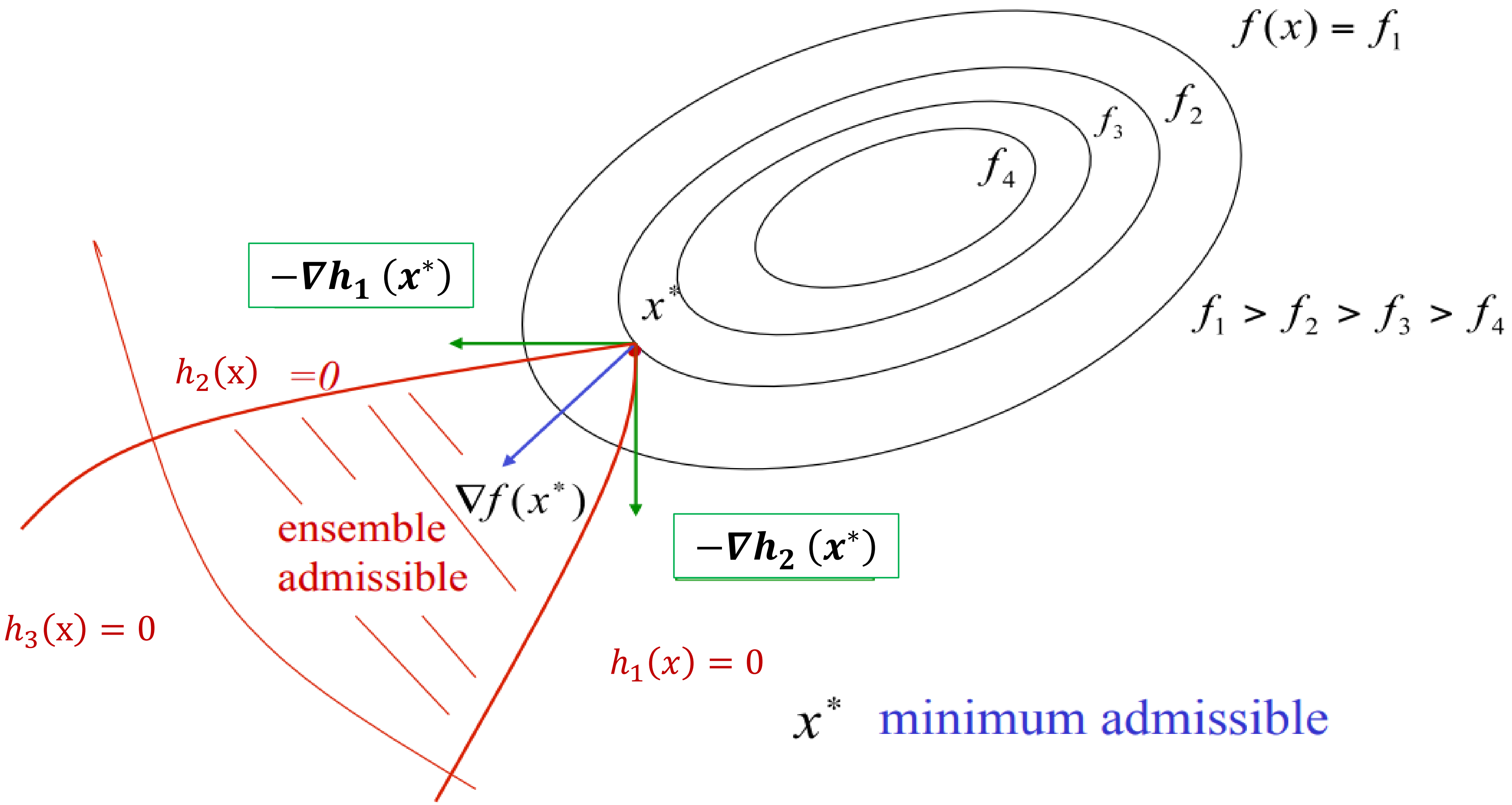
- **Pour** $\boldsymbol{j} \in \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{p}\}, \boldsymbol{d}^{\boldsymbol{t}} \nabla \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0},$
- **Pour** $\boldsymbol{i} \in \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{q}\}, \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{alors}\ \boldsymbol{d}^{\boldsymbol{t}} \nabla \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x}^*) \leq \boldsymbol{0}$

Le cône tangent ou L'ensemble des directions possibles

Soit $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{S}$. Si $\boldsymbol{x}$ est régulier, alors on définit $T(S, \boldsymbol{x}^*)$ (l'ensembles des directions admissibles au point $\boldsymbol{x}^*$) comme suit:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} | \boldsymbol{d}^{\boldsymbol{t}} \nabla \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x}^*) \leq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{d}^{\boldsymbol{t}} \nabla \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{1}, \dots, \boldsymbol{p}\}$$

V.2 Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (3)



V.2 Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (7)

Exemple $\quad \min\ f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2 - 2$

avec $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = x_2 - x_1 - 1 = 0$ et $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 - 4 \leq 0$

$$L(x,\lambda,\mu) = (x_1 - 1)^2 + x_2 - 2 + \lambda(x_2 - x_1 - 1) + \mu(x_1 + x_2 - 4)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} L(x,\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(x,\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

KKT

1° $\quad \mu^* \geq 0$

2° $\quad 2(x_1^* - 1) - \lambda^* + \mu^* = 0$

$1 + \lambda^* + \mu^* = 0$

$x_2^* - x_1^* - 1 = 0$

$x_1^* + x_2^* - 4 \leq 0$

V.2 Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (8)

Exemple (suite)

A. Contrainte active: $(x_1^* + x_2^* - 4 = 0)$

1° $\mu^* > 0$

2° $2(x_1^* - 1) - \lambda^* + \mu^* = 0$

$1 + \lambda^* + \mu^* = 0$

$x_2^* - x_1^* - 1 = 0$

$x_1^* + x_2^* - 4 = 0$

$\Rightarrow x_1^* = \frac{3}{2} \quad x_2^* = \frac{5}{2} \qquad \lambda^* = 1 \quad \mu^* = -2$ => impossible

V.2 Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (9)

Exemple (suite)

B. Contrainte inactive: $(\mu = 0)$

1° $\mu^* = 0$

2° $2(x_1^* - 1) - \lambda^* = 0$

$1 + \lambda^* = 0$

$x_2^* - x_1^* - 1 = 0$

$\Rightarrow x_1^* = \frac{1}{2} \quad x_2^* = \frac{3}{2} \qquad \lambda^* = -1 \qquad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*) = x_1^* + x_2^* - 4 = -2 < 0$

4° $\boldsymbol{\nabla g}(\boldsymbol{x}^*) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{y}^t \boldsymbol{\nabla g}(\boldsymbol{x}^*) = 0 \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow y^t \, \nabla^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y = 2y_1^2 > 0 \quad \forall y \neq 0 \quad \Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ Minimum local au sens strict

Contraintes d'égalité et d’inégalité

Si **K = Ω**, il s’agit d’un problème d’optimisation sans contrainte. L’ensemble admissible est donc un ouvert.

Sinon, l’ensemble K représente des contraintes.

Soit $\boldsymbol{g_i}\ , \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{p}\ et\ \boldsymbol{q_j}\ , \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{m}$ des fonctions **de Ω dans R**.

Les contraintes d’égalité sont définies par $\boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{p}$ et

les contraintes d’inégalité par $\boldsymbol{q_j}\ (\boldsymbol{x}) \leq \mathbf{0}, \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{m}$.