

TD N°3 de Programmation Discrète

Exercice 1 : soient les problèmes d'optimisation suivants :

1. $\text{Min}(x+y)$
s. à : $x^2+y^2 \leq 1$

2. $\text{Max}(xy)$
s. à : $x+y \leq 24$
 $x+2y \leq 40$
 $x \geq 0$ et $y \geq 0$

3. $\text{Min}(x^2+y^2-14x-6y)$
s. à : $3-x-2y \geq 0$
 $2-x-y \geq 0$

1. Donnez les conditions de *KKT* de chacun de ces problèmes et les résoudre.
2. Donnez la nature des points stationnaires obtenus.

Exercice2 : soit le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Min}(-x_1 \ x_2 - x_2 \ x_3 - x_1 \ x_3)$$

$$\text{s. c. : } x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

1. Déterminer et résoudre les conditions de 1^{er} ordre.
2. Vérifier les conditions du 2^{ème} ordre, en déduire que le point trouvé en 1. Est un min. local strict.

Exercice 3 : soit le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Min}((x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2)$$

$$\text{s. c. : } x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \quad (1)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4 \quad (2)$$

On note S l'ensemble des solutions réalisables et on note $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Le point x^* est-il régulier (qualifié) ? Expliciter le système d'inégalités définissant le cône tangent à S ($T(S, x^*)$) en $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier les conditions de *KKT* au point $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Vérifier, en utilisant les résultats de la question 2, Que pour tout $y \in T(S, x^*)$ on a : $\nabla f(x^*) \cdot y \geq 0$.
4. Représenter le problème graphiquement et vérifier les résultats.

Exercice 4 :

On considère la fonction $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$, soumise aux contraintes :

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 8 \\ x_1x_2 = 4 \end{cases}$$

1. Le point x^* est-il régulier (qualifié) ? Expliciter le système d'inégalités définissant le cône tangent à S ($T(S, x^*)$) en $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier les conditions de *KKT* au point $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. Vérifier, en utilisant les résultats de la question 2, Que pour tout $y \in T(S, x^*)$ on a : $\nabla f(x^*) \cdot y \geq 0$.