

التطبيقات الخطية - Applications lineaires

تعريف ١: لنكن E و F فضاءات على الحقل K . نقول ان التطبيق

$f: E \rightarrow F$ خطي اذا وفقط اذا:

$$\forall u, v \in E: f(u+v) = f(u) + f(v) \quad (1)$$

$$\forall \alpha \in K, \forall u \in E: f(\alpha \cdot u) = \alpha f(u) \quad (2)$$

نرمز لمجموعة التطبيقات الخطية من E الى F بـ $\mathcal{L}(E, F)$

مثال: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ بتعريفه

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x - y + z, y - z)$$

$$\forall u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

$$f(u+v) = f((x, y, z) + (x', y', z'))$$

$$= f(x+x', y+y', z+z')$$

$$= ((x+x') - (y+y') + (z+z'), (y+y') - (z+z'))$$

$$= (x - y + z + x' - y' + z', y - z + y' - z') \quad (1)$$

$$f(u) + f(v) = f(x, y, z) + f(x', y', z')$$

$$= (x - y + z, y - z) + (x' - y' + z', y' - z')$$

$$= (x - y + z + x' - y' + z', y - z + y' - z') \quad (2)$$

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \text{و } f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

$$f(\alpha \cdot u) = f(\alpha(x, y, z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$= (\alpha x - \alpha y + \alpha z, \alpha y - \alpha z)$$

$$= (\alpha(x - y + z), \alpha(y - z))$$

$$= \alpha(x - y + z, y - z) = \alpha f(x, y, z)$$

نلاحظ ان $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ خطي

$$f(0_E) = 0_F \quad (1)$$

$$\forall u \in E: f(-u) = -f(u) \quad (2)$$

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in E \Rightarrow f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

تعريف 02: (خاصة و صورة تطبيق خطي)

لكن $f: E \rightarrow F$ تطبيق خطي

1- نقي نواة f المجموعة المرفقة بـ

$$\text{Ker } f = \{ u \in E ; f(u) = 0_F \} = f^{-1}(\{0_F\}) \subset E$$

2- نقي صورة f المجموعة المرفقة بـ

$$\text{Im } f = \{ f(u) \mid u \in E \} \subset F = f(E)$$

نقطة 01: $f \in \mathcal{L}(E, F)$

① $\text{Ker } f$ فضاء جزئي من E

② $\text{Im } f$ فضاء جزئي من F

تطبيق 02: $f \in \mathcal{L}(E, F)$ التباديل

$$\text{Ker } f = \{0_E\} \Leftrightarrow f \text{ حيدري}$$

$$\text{Im } f = F \Leftrightarrow f \text{ كامل}$$

نقطة 03: $f: E \rightarrow F$ تطبيق خطي E, F فضاء على $\mathbb{R}$

نقطة 04: f تماثل E و F متساويان، إذا وفقط إذا كان f تطبيق خطي وتبادلي

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (x+2y, x-y)$$

$$\text{Ker } f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \}$$

$$f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow (x+2y, x-y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Ker } f = \{ (0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2} \}$$

$$\text{Im } f = \{ f(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (x+2y, x-y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ x(1, 1) + y(2, -1) \mid x, y \in \mathbb{R} \} = \langle v_1, v_2 \rangle$$

نقح $\frac{B}{\text{Inf}} = \{0, 0\}$, و $\frac{B}{\text{Inf}} = \frac{B}{\text{Inf}}$ ، و ناك انما حرة
 (الجزء) في اشارة Inf، و (حرة و مملوكة) و صا :
 $d(\text{Inf}) = e = d(\mathbb{R}^2)$ فاشح $\mathbb{R}^2$ (المطل)
 كالتفئة المدة $\mathbb{R}^2$.

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = (x, y, 2\pi)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \text{Im } f &= \{ f(n, y) : (n, y) \in \mathbb{R}^2 \} \\ &= \{ (x+y, -x+y, 2n) : n, y \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ x \underbrace{(1, -1, 2)}_{v_1} + y \underbrace{(1, 1, 0)}_{v_2} : n, y \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

رفع $\{u, v\}$ به $B_{\inf f}$ و این همان $\inf f$ است، بنابراین $\inf f = \inf_{x \in A} f(x)$

$\text{Im} f \subset \mathbb{R}^3$ also, d.h. $\text{Im } f = L + \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{=3}$ also $\text{Im } f \rightarrow$

ix) $\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$

$$f(x,y)=0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$$

$$(E) \begin{cases} x+y=0 & \text{--- (1)} \\ -x+y=0 & \text{--- (2)} \\ 2x=0 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

③ $\Rightarrow n=0$ توی $y=0$

$$1. \text{ Null of } \sigma_1 \text{ Ker } f = \{(0,0) \in \mathbb{R}^2\}$$

قضیه ۱۰. $\mathcal{L}$ و $\mathcal{K}$ و $\mathcal{F}$ فیلترهای $\mathcal{K}$ زان ابعاد منتهیه.

$E \rightarrow \text{ساكن}$ $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq E$ و $f \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\text{Im } f = \langle f(B) \rangle = \langle f(u_1), f(u_1) \rangle \quad (1)$$

2) $f(B) = f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ (2)

besser, die $E = \text{die Verf.} + \text{die Inf.}$ ②

$\text{Vergleichen die Inf}$ u. die Ext ab!
 $\text{Vgl.} = \text{u.} \text{ u.} \text{ u.}$ u.
 $\text{Vgl.} = \text{u.}$ u.

$$v_g(z) = \text{die Inf}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x+y, y+z)$$

$$\bullet \ker f = \{(x, y, z) \mid (x+y, y+z) = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}\}$$

$$f(x, y, z) = \vec{0}_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow (x+y, y+z) = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=-y \end{cases}$$

$$\text{donc } \ker f = \{(-y, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{y(-1, 1, -1) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle v = (-1, 1, -1) \rangle$$

وإذا كان $B_{\ker f} = \{v\}$ فإن $\dim \ker f = 1 \neq 0$

$$\dim \ker f = 1 \neq 0$$

أو $(\ker f)$

في $\mathbb{R}^3$ فإن $\ker f \neq \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \dim \text{Im} f$$

: حيث

$$\Rightarrow \text{rg}(f) = \dim \text{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$$

الذي هو $\dim \mathbb{R}^2$ (أو $\dim \mathbb{R}^2$) فإن f هي

تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ إلى $\mathbb{R}^2$