

سلسلة الأعمال الموجهة رقم 1

– الفضاءات الشعاعية

التمرين 1 :

لتكن $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ مزود بالقانونين $(\oplus)$ و $(\odot)$ المعرفين بـ:

$$\forall (x, y), (x', y') \in E: (x, y) \oplus (x', y') = (x + x', yy')$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E: \alpha \odot (x, y) = (\alpha x, y^\alpha)$$

- أثبت أن $(E, \oplus, \odot)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$.

التمرين 2:

لتكن $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ مزود بالقانونين $(\oplus)$ و $(\odot)$ المعرفين بـ:

$$\forall (x, y), (x', y') \in E: (x, y) \oplus (x', y') = (x + x', yy')$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E: \alpha \odot (x, y) = (\alpha x, \frac{y}{\alpha}), \alpha \neq 0 \text{ و } 0 \odot (x, y) = (0, 1)$$

- قارن بين $(\alpha + \beta) \odot (x, y)$ و $\alpha \odot (x, y) + \beta \odot (x, y)$ واستنتج أن $(E, \oplus, \odot)$ ليس فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$.التمرين 3: تحقق إن كان F فضاء شعاعي جزئي E

$$-1 \quad E = \mathbb{R}^3 \text{ و } F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0\}$$

$$-2 \quad E = \mathbb{R}^4 \text{ و } F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 3t + 1 = 0\}$$

$$-3 \quad E = \mathbb{R}^3 \text{ و } F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - yz = 0\}$$

التمرين 4:

-1 هل الشعاع $v = (1, 2, 3)$ مزج خطي لـ $v_1 = (1, -1, 1)$ و $v_2 = (1, 1, 1)$.- نفس السؤال بالنسبة لـ $w = (-1, 3, -1)$.-2 أدرس إن كانت العائلة A حرة أم مقيدة

$$A = \{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (2, 3, 1), v_3 = (3, 1, 2)\}, E = \mathbb{R}^3.$$

$$A = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -1, 2), v_3 = (-1, 3, -3)\}, E = \mathbb{R}^3.$$

التمرين 5: عين أساس و البعد للفضاءات الشعاعية الجزئية التالية:

$$-1 \quad F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = -y = 4z = 2t\}$$

$$-2 \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$$

$$-3 \quad H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y - z = 0\}$$

$$-4 \quad G + H \text{ و } G \cap H \text{ هل الجمع مباشر؟}$$

التمرين 6: هل B أساس لـ E :

$$-1 \quad B = \{v_1 = (2, 1, a), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, 1, 1)\} \text{ ناقش حسب قيم } a \in \mathbb{R} \text{ حيث } E \in \mathbb{R}^3.$$

$$-2 \quad B = \{v_1 = (a, 1, 1, 1), v_2 = (1, a, 1, 1), v_3 = (1, 1, a, 1), v_4 = (1, 1, 1, a)\} \text{ ناقش حسب قيم } a \in \mathbb{R}$$

حيث $E \in \mathbb{R}^4$ (للطالب)

التمرين 7:

ليكن الفضاءين الشعاعين الجزئيين $F = \langle v_1 = (1, 2, -1), v_2 = (2, -1, 3) \rangle$ و

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y = 0 \text{ et } y + z = 0\}$$

أثبت أن $F \oplus G = \mathbb{R}^3$