

سلسلة الأعمال الموجهة رقم 2

– التطبيقات الخطية و المصفوفات

التمرين 1 : هل التطبيقات التالية خطية ؟

$$1) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; f(x, y) = (2x - y, -x + y)$$

$$2) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; f(x, y, z) = (x + y + 1, x - 2z)$$

$$3) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$4) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; f(x, y, z) = (x, y, x - z) \text{ (للتالب)}$$

$$5) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; f(x, y) = (\sqrt{x}, \sqrt{y}) \text{ (للتالب)}$$

التمرين 2: ليكن $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ تطبيق خطي معرف بـ:

$$f(e_3) = 6e_1 + 6e_2 - e_3, f(e_2) = 8e_1 + 7e_2, f(e_1) = -7e_1 - 6e_2$$

$$1- \text{أوجد عبارة } f(x, y, z) \text{ حيث } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$2- \text{احسب } \text{Ker } f \text{ و } \text{Im } f \text{ و استنتج أن } f \text{ تشاكل داخلي.}$$

$$3- \text{احسب } f^{-1}(e_1), f \circ f(e_2), f \circ f(e_3) \text{ و استنتج } f^{-1}.$$

التمرين 3 : (للتالب)

نعتبر الفضاء الشعاعي من $\mathbb{R}^4$ المعرف بـ $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - 2y + z = y - 2t = 0\}$

$$1) \text{ عين أساس لـ } F.$$

$$2) \text{ عين تطبيق خطي } f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ بحيث } \text{Im } f = F \text{ و } \text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = z\}.$$

$$\text{التمرين 4: نعتبر المصفوفات التالية : } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$1- \text{احسب إن أمكن : } A \times C, A \times B^t, A \times B, A + C, A - 2B.$$

$$2- \text{احسب } C^t \text{ و } \text{Tr}(C).$$

$$\text{التمرين 5: نعتبر المصفوفتين } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ و } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1) \text{ احسب : } -A + 2I_3 \text{ و } A^2.$$

$$2) \text{ استنتج أن } A \text{ قابل للقلب و أحسب } A^{-1}.$$

$$\text{التمرين 6 : نعتبر المصفوفة } A_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ -1 & 2 & m-2 \end{pmatrix} \text{ حيث } m \in \mathbb{R}.$$

$$1) \text{ احسب محدد المصفوفة } A_m$$

$$2) \text{ عين حسب قيم } m \in \mathbb{R} \text{ رتبة } m$$

$$3) \text{ من أجل } m = 2 \text{ بين أن } A_2^{-1} \text{ قابل للقلب و احسب } A_2^{-1}.$$

التمرين 7:

$$(1) \text{ نعتبر المصفوفتين } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } B = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ -3 & 6 & 5 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix} \text{ - احسب } A \times B \text{ و استنتج } \det B.$$

$$(2) \text{ باستعمال العمليات على المحددات أثبت أن } \det A = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = a+b+c+1$$

$$(3) \text{ أحسب محدد } A \text{ حيث } A = \begin{pmatrix} b & c \\ a & b \\ a & a \end{pmatrix} \text{ ثم أوجد قيم } a, b, c \text{ حتى تكون } A \text{ قابلة للقلب (للطالب)}$$

التمرين 8:

- (1) أثبت أن $B = \{v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, -1, 1)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$
- (2) عين مصفوفة العبور من B إلى C و عين مصفوفة العبور من B_C إلى B حيث B_C هو الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.
- (3) عين مصفوفة التطبيق الخطي f (المعرف في التمرين 2) في الأساس B_C .
- (4) عين مصفوفة التطبيق الخطي f (المعرف في التمرين 2) في الأساسين B و B_C .

الواجب المنزلي

نزود المجموعة $\mathbb{R}_2[X] = \{P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ (كثيرات الحدود من الدرجة أقل أو تساوي 2) بالعمليات:

من أجل كل $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ و $Q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2; b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(P + Q)(X) = P(X) + Q(X) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2.$$

$$(\alpha \cdot P)(X) = \alpha \cdot P(X) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)X + (\alpha a_2)X^2.$$

- 1- اثبت أن $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$.
- عين أساسه القانوني و بعده
- 2- اثبت أن $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X]; P(0) = 0\}$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}_2[X]$.
- عين أساسه وبعده.
- 3- نعتبر التطبيق $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ المعرفة بـ $f(P) = P + (1 - X)P'$ حيث P' هو مشتق P .
(أ) اثبت أن f تطبيق خطي
(ب) احسب $\text{Ker } f$ و $\text{Im } f$ و هل f تشاكل داخلي.