Université de Jijel | Faculté: SEI | Département d'informatique
$1^{ère}$ *Année Licence* | *Année universitaire* 2025-2026

Module: Analyse 2

TD n°4 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 Déterminer et représenter le domaine de définition des fonctions suivantes:

1. $f_1(x,y) = \frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}$, $f_2(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$. (laissée aux étudiants).
2. $f_3(x,y) = \sqrt{4x - x^2 + 4y - y^2}$, $f_4(x,y) = \ln(xy)$.
3. $f_5(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-16}}$ (laissée aux étudiants)

Exercice 2

1. Calculer les limites suivantes
   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin(\frac{1}{x^2+y^2})$
   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{xy^2}$ (laissée aux étudiants)
2. La fonction suivante admet-elle une limite (finie) en $(0,0)$
$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$
3. Calculer la différentielle de la fonction suivante: $f(x,y) = \frac{x^2+xy}{y^2}$

Exercice 3 Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, soit
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?.

Exercice 4 (laissé aux étudiants) Calculer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes

$f_1(x,y) = e^{2x^2+xy+7x+y^2}$:

$f_2(x,y) = \sin(xy)$

$f_3(x,y) = \ln(x+y)$

Exercice 5 Déterminer et établir la nature des points critiques des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par:

1. $f_1(x,y) = x^2 + xy + y^2 + y$.
2. $f_2(x,y) = xy - 2x - 2y - x^2 - y^2$.
3. $f_3(x,y) = (x-y)(1-xy)$ (laissée aux étudiants).
4. $f_4(x,y) = y^3 + 3x^2y + -6x^2 - 6y^2 + 2$ (laissée aux étudiants).
5. $f_5(x,y) = y^2 + xy\ln x$.
6. $f_6(x,y) = y\cos x$.

$\mathcal{N} - \mathcal{F}etouci$