

المحور الثاني: التطبيقات الخطية والقيم الذاتية

أ. بودودة مريم

1. التطبيقات الخطية:

1.1. تعريف: تطبيق خطي:

يقول عن تطبيق أنه خطي إذا حقق:

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$f(k\vec{u}) = k f(\vec{u})$$

1.2. المجموعة المرافقة للتطبيق الخطي:

مثال: f توجد المجموعة المرافقة للتطبيق الخطي:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y + 3z)$$

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x + y + z \\ f_2(x, y, z) &= x - 2y + 3z \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1.3. التطبيق الخطي للمجموعة:

مثال: A f $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ f $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ f $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \cdot A^t = (x, y, z) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = (2x - y + 3z, y + 2z)$$

منقول $\uparrow$

$$f(x, y, z) = (2x - y + 3z, y + 2z)$$

2. القيم الذاتية والمتجهات الذاتية:

مثال: A f $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ f $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ f $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 16 & -2 \end{pmatrix}$$

1. القيم الذاتية:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 16 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 0 \\ 16 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (6-\lambda)(-2-\lambda) = (16-0) = 0$$

$$\Rightarrow (6-\lambda)(-2-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

المتجهات الذاتية الخاصة بـ A

$$(A - \lambda I) X = \vec{0}$$

① $\lambda = 6$: $(A - \lambda I) X = 0$ ليكن $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$: المتجهات الذاتية لـ A المقابلة لـ λ

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 16 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16x_1 - 8x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

المتجهات الذاتية

$$16x_1 - 8x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

② $\lambda = -2$: المتجهات الذاتية لـ A المقابلة لـ λ

$$(A - \lambda I) \bar{X} = \vec{0}$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 16 & -2 \end{pmatrix} - (-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 8x_1' = 0 \\ 16x_2' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1' = 0, x_2' \in \mathbb{R}^*$$

$$X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{المتجهات الذاتية لـ } A \\ \text{مقدوم} \end{array} \right)$$

3- أثر المتجهات الذاتية

$$\text{trac}(A) = \sum \lambda = 6 - 2 \Rightarrow \boxed{\text{trac}(A) = 4}$$