

Chapitre II

1. CONSERVATION DE L'ENERGIE

L'équation de l'énergie avec $q=0$ (quantité de chaleur), $S=0$ (source d'énergie externe)

$$-\dot{W} = \dot{m} \left[\left(e_{\text{int}2} + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{c_2^2}{2} + g_2 z_2 \right) - \left(e_{\text{int}1} + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{c_1^2}{2} + g_1 z_1 \right) \right]$$

L'enthalpie du fluide $h = e_{\text{int}} + pV$ avec le volume $V = \frac{1}{\rho}$

$$h_2 = e_{\text{int}2} + \frac{p_2}{\rho_2} \quad h_1 = e_{\text{int}1} + \frac{p_1}{\rho_1} \quad \text{Avec } e_{\text{int}i} : \text{Energie interne}$$

Enthalpie totale ou de stagnation (d'arrêt)

$$h_{02} = h_2 + \frac{c_2^2}{2} + g z_2 \quad h_{01} = h_1 + \frac{c_1^2}{2} + g z_1$$

En plus, au niveau du rotor on peut considérer que la variation de l'énergie potentielle est négligeable par rapport aux autres formes d'énergie (cinétique, de pression et interne). Ainsi,

$h_{02} = h_2 + \frac{c_2^2}{2}$ $h_{01} = h_1 + \frac{c_1^2}{2}$ L'équation de l'énergie prend la forme répandue :

$$-\dot{W} = \dot{m}(h_{02} - h_{01})$$

2. Les lois de Conservation entre entrée (indice 1) et sortie (indice 2) :

- De la masse (équation de continuité) : $\dot{m} = \rho_1 c_1 A_{1n} = \rho_2 c_2 A_{2n}$
- Du quantile de mouvement $\vec{Q}_M = m_1 \vec{c}_1 = m_2 \vec{c}_2$
- Du moment angulaire $M = \dot{m}(c_{2u} r_2 - c_{1u} r_1)$
- Conservation d'énergie (1ere loi de la thermodynamique)
 $\dot{W} = M\omega = \dot{m}(c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1)$ avec $u_i = r_i \omega$

3. Les triangles de vitesse à l'entrée 1 et à la sortie 2

La figure suivante montre Les triangles de vitesse à l'entrée 1 et à la sortie 2 dans une machine radiale

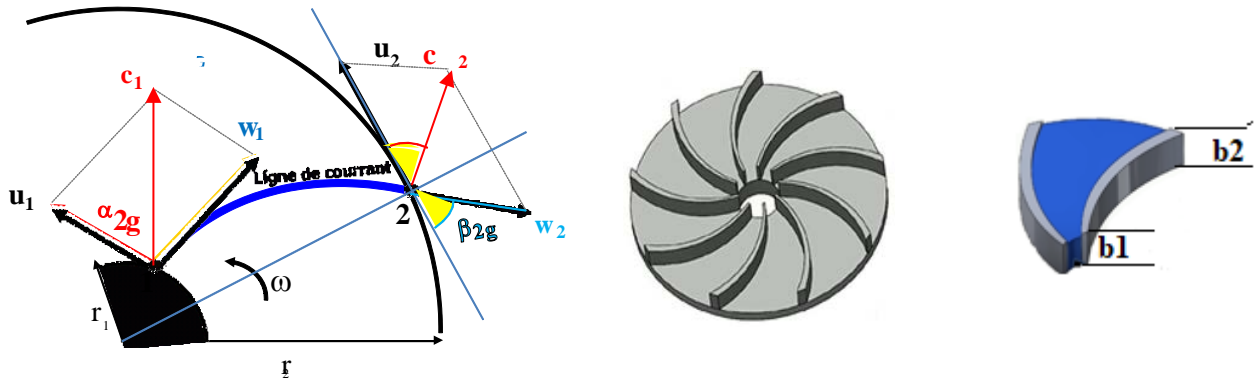


Figure 4 a) représentations des vitesses et les angles sur la ligne de courant
 b) Roue à aube
 c) Epaisseur de l'aube à l'entrée (b1) et sortie (b2)

3.1 Energie spécifiques de la machine Radiale (pompe, ventilateur et compresseur)

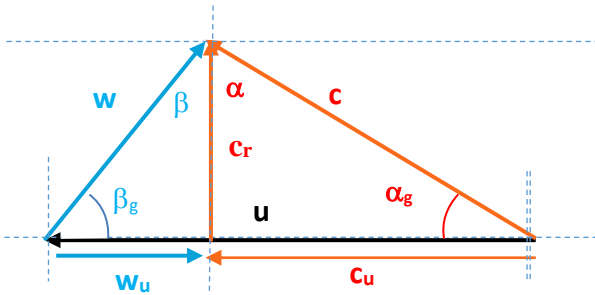


Figure 1 triangle de vitesse

$$\vec{c} = \vec{u} + \vec{w}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{\alpha})$$

$$w^2 = c^2 + u^2 - 2u \underbrace{c \cos \bar{\alpha}}_{c_u} \text{ Avec } \bar{\alpha} = \alpha_g \text{ angle entre (c et u) indice u directions tangentiel}$$

Indice r directions radiale

Cette relation est exprimée entre l'entrée 1 et la sortie 2 par les équations suivantes :

$$\begin{cases} w_2^2 = c_2^2 + u_2^2 - 2u_2 \underbrace{c_2 \cos \alpha_{2g}}_{c_{2u}} \\ w_1^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2u_1 \underbrace{c_1 \cos \alpha_{1g}}_{c_{1u}} \end{cases}$$

$$w_2^2 - w_1^2 = c_2^2 + u_2^2 - 2u_2 \underbrace{c_2 \cos \alpha_{2g}}_{c_{2u}} - c_1^2 - u_1^2 + 2u_1 \underbrace{c_1 \cos \alpha_{1g}}_{c_{1u}}$$

$$c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1 = \frac{(c_2^2 - c_1^2) + (u_2^2 - u_1^2) + (w_1^2 - w_2^2)}{2}$$

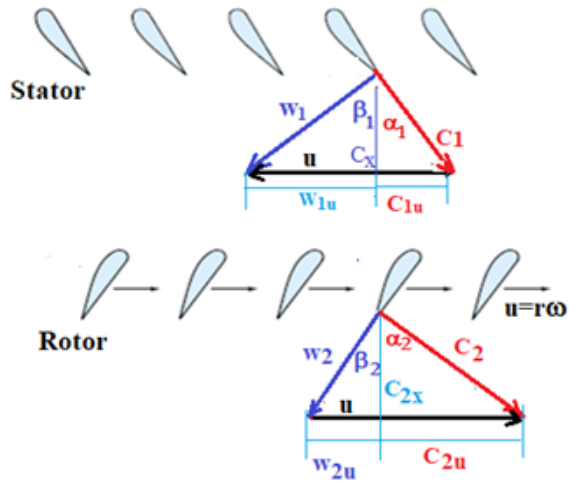
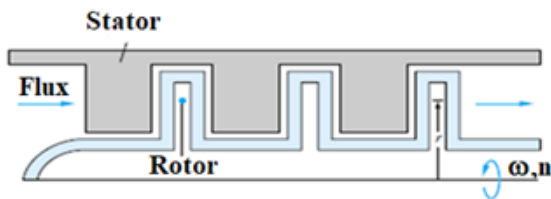
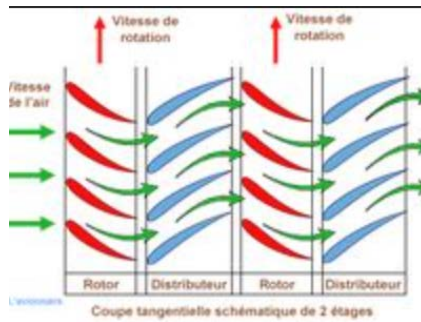
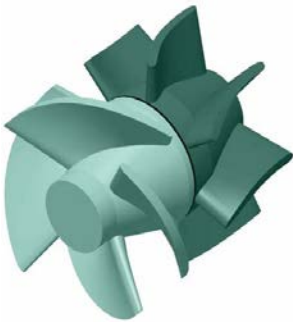
Le travail spécifique (l'énergie transmise par unité de masse)

$$w_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = (c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1) \quad \text{Équation d'Euler}$$

En hydraulique on utilise l'énergie spécifique w_e par unité de poids, mg

$$w_e = gH = c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1$$

3.2 Energie spécifiques de la machine axiale (pompe et compresseur)



$$\vec{w}_1 = \vec{c}_1 - \vec{u} \quad c_{1x} = c_{2x} = c_x \quad + \begin{cases} c_x \tan \alpha_1 = c_{1u} \\ c_x \tan \beta_1 = w_{1u} \end{cases} \quad c_{1u} + w_{1u} = u$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha_1 + \tan \beta_1 &= \frac{u}{c_x} \\ \tan \alpha_2 + \tan \beta_2 &= \frac{u}{c_x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan \alpha_1 + \tan \beta_1 = \tan \alpha_2 + \tan \beta_2$$

$$\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2 = \tan \beta_2 - \tan \beta_1$$

3.3 Équation d'Euler $w_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = (c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1)$

$$u_1 = u_2 = u \quad w_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = u(c_{2u} - c_{1u}) \quad c_x \tan \alpha_2 = c_{2u} \quad c_x \tan \alpha_1 = c_{1u}$$

$$\tan \alpha_1 + \tan \beta_1 = \frac{u}{c_x} \Rightarrow \tan \beta_1 = \frac{u}{c_x} - \tan \alpha_1$$

$$w_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = uc_x (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1)$$

$$= uc_x (\tan \beta_1 - \tan \beta_2) \quad \text{et} \quad \tan \beta_1 = \frac{u}{c_x} - \tan \alpha_1$$

$$= uc_x \left(\frac{u}{c_x} - \tan \alpha_1 - \tan \beta_2 \right) = u \left(u - c_x (\tan \alpha_1 + \tan \beta_2) \right)$$

$$w_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = uc_x (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) \text{ incompressible}$$

$$c_p (T_{02} - T_{01}) = uc_x (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) \text{ compressible}$$

3.4 Nomenclature

m_1 et m_2 = la masse du fluide à l'entrée et sortie respectivement

A_{n1} et A_{n2} = la section normale à l'entrée et sortie respectivement

\dot{m} et \dot{W} = le débit massique et la puissance respectivement

c_1 et c_2 = vitesse absolue de l'écoulement du fluide à l'entrée et sortie respectivement

w_1 et w_2 = vitesse relative de l'écoulement à l'entrée et sortie respectivement

u_1 et u_2 = vitesse periferique du rotor à l'entrée et sortie respectivement

c_u, c_r, c_x = Composante tangentielle, radiale et axiale de la vitesse absolue du fluide

w_u, w_r, w_x = Composante tangentielle, radiale et axiale de la vitesse relative du fluide

c_{r1} et c_{r2} = Composante radiales de la vitesse absolue du fluide à l'entrée et sortie respectivement

c_{x1} et c_{x2} = Composante axiale de la vitesse absolue du fluide à l'entrée et sortie respectivement

β mesurée par rapport à la direction radiale dans le sens contraire à la rotation.

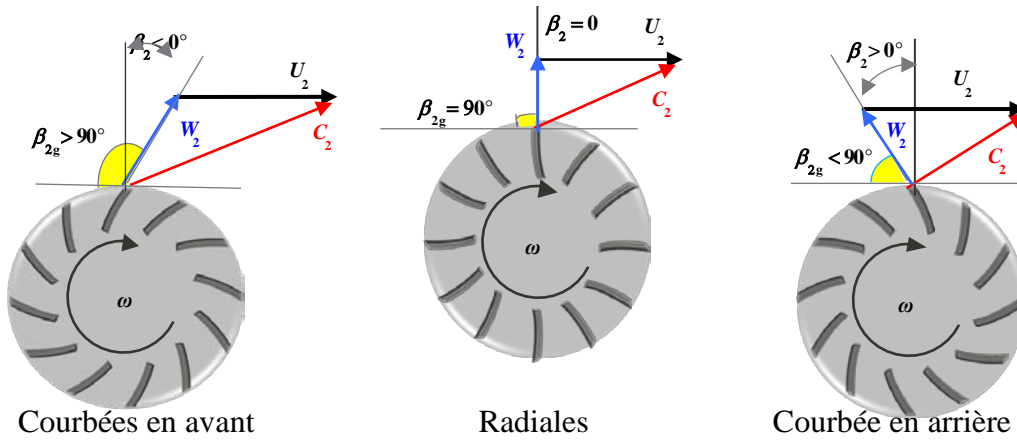
β_g : est mesurée par rapport la direction tangentielle. β_g correspond au complément de β ,

ou bien $\beta_{ig} + \beta_i = 90^\circ$

4. L'inclinaison des pales

Le comportement d'une machine radiale est nettement affecté par l'angle physique (ou de construction) β_{2g} à la sortie des aubes.

- ✓ Courbés en arrière ($\beta_{2g} < 90^\circ$ ou $\beta_2 > 0^\circ$) ; meilleurs rendements (pompe)
- ✓ Radiales ($\beta_{2g} = 90^\circ$ ou $\beta_2 = 0^\circ$) ; bonne résistance mécanique (ventilateur)
- ✓ Courbés en avant ($\beta_{2g} > 90^\circ$ ou $\beta_2 < 0^\circ$) ; grands débits avec diffuseur (compresseur)



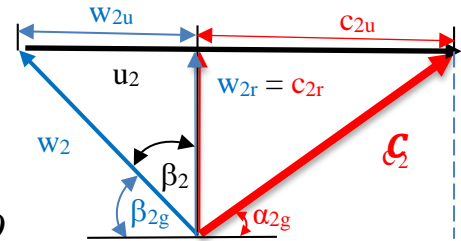
4.1 Courbe caractéristique théorique d'une machine radiale

D'après l'équation d'Euler appliqué à un fluide incompressible nous avons :

$$gH_{\text{idéal}} = u_2 \times c_{2u} - u_1 \times c_{1u} \text{ , sans pré-rotation } (c_{1u} = 0)$$

$$gH_{\text{idéal}} = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = c_{2u} u_2 \Rightarrow \dot{W} = \dot{m} c_{2u} u_2 = \rho Q c_{2u} u_2$$

Le triangle de vitesse à la sortie 2 devient :



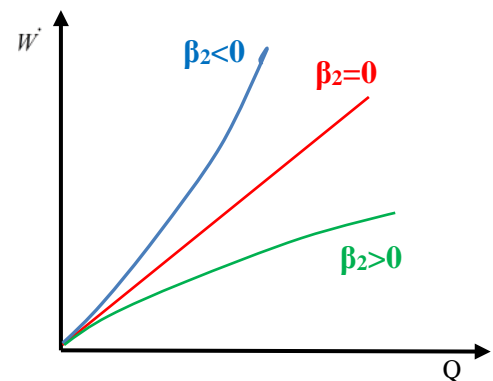
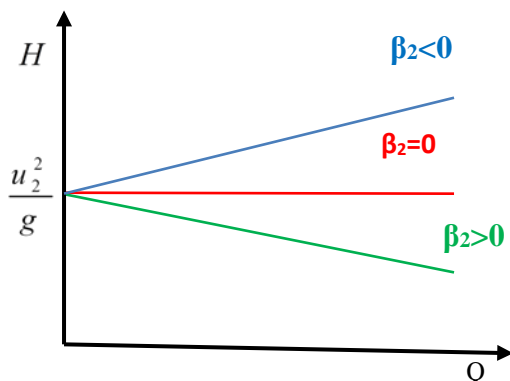
$$c_{2u} = (u_2 - w_{2u}) = (u_2 - c_{2r} \tan \beta_2) \text{ et } c_{2r} = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2}$$

$$H_i = \frac{u_2}{g} \left(u_2 - \frac{\tan \beta_2}{2\pi r_2 b_2} Q \right) \quad H_{\text{idéal}} = \frac{u_2^2}{g} - \frac{\omega \tan \beta_2}{2\pi b_2 g} Q = A - BQ$$

$$A = \frac{u_2^2}{g} = cte \quad \text{et} \quad B = \frac{u_2 \tan \beta_2}{2\pi r_2 b_2 g} = cte$$

$$H_i = A - BQ$$

$$\dot{W} = \dot{m} c_{2u} u_2 = \rho Q c_{2u} u_2 = \rho Q (u_2 - w_{2u}) u_2 = \rho Q (u_2 - c_{2r} \tan \beta_2) u_2 = \rho Q \left(u_2 - \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} \tan \beta_2 \right) u_2$$



$$\dot{W} = \rho Q (u_2 - \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} \tan \beta_2) u_2 = \rho Q r_2^2 \omega^2 - \frac{\rho \omega r_2 Q^2}{2\pi_2 r_2 b_2} \tan \beta_2$$

Ces droites représentent la caractéristique Hauteur théorique d'une pompe centrifuge idéale, dans les trois cas de construction précités.

Pour des roues à aubes courbées vers l'avant $\beta_2 > 0$ (la hauteur et la puissance théoriques augmentant avec le débit) ; mais dans la pratique, le rendement est faible.

Les roues à aubes courbées vers l'arrière $\beta_2 < 0$ sont les plus utilisées, car elles permettent un fonctionnement optimal. Les courbes représentées jusqu'ici sont des courbes qui ne tiennent pas en compte les différentes pertes qui ont lieu dans une pompe.

Ces pertes peuvent être classées en trois catégories :

5. Les rendements

5.1 Rendement hydraulique

$$\eta_{hyd} = 1 - \frac{h_{frot-hyd}}{h_{pompe}} ; h_{frot} \text{ Les pertes Hydrauliques appelées communément pertes de charges,}$$

5.2 Rendement volumétrique

$$\eta_{vol} = \frac{Q}{(Q + q_L)} ; q_L : \text{les pertes par fuites appelées aussi pertes volumétriques,}$$

5.3 Rendement mécanique

$$\eta_{mec} = 1 - \frac{h_{mec}}{M \omega} ; h_{mec} : \text{Les pertes mécaniques (frottement mécanique)}$$

5.4 Le rendement global

$$\eta_{glob} = \eta_{hyd} \cdot \eta_{vol} \cdot \eta_{mec} \text{ Ou bien } \eta = \frac{\rho g H Q}{M \omega} \text{ pour une pompe}$$

6. Courbe caractéristique réel d'une pompe centrifuge

Pour $\beta_2 < 0$ et en tient compte de ces différentes pertes qui sont présenter dans les figures

Suivantes,

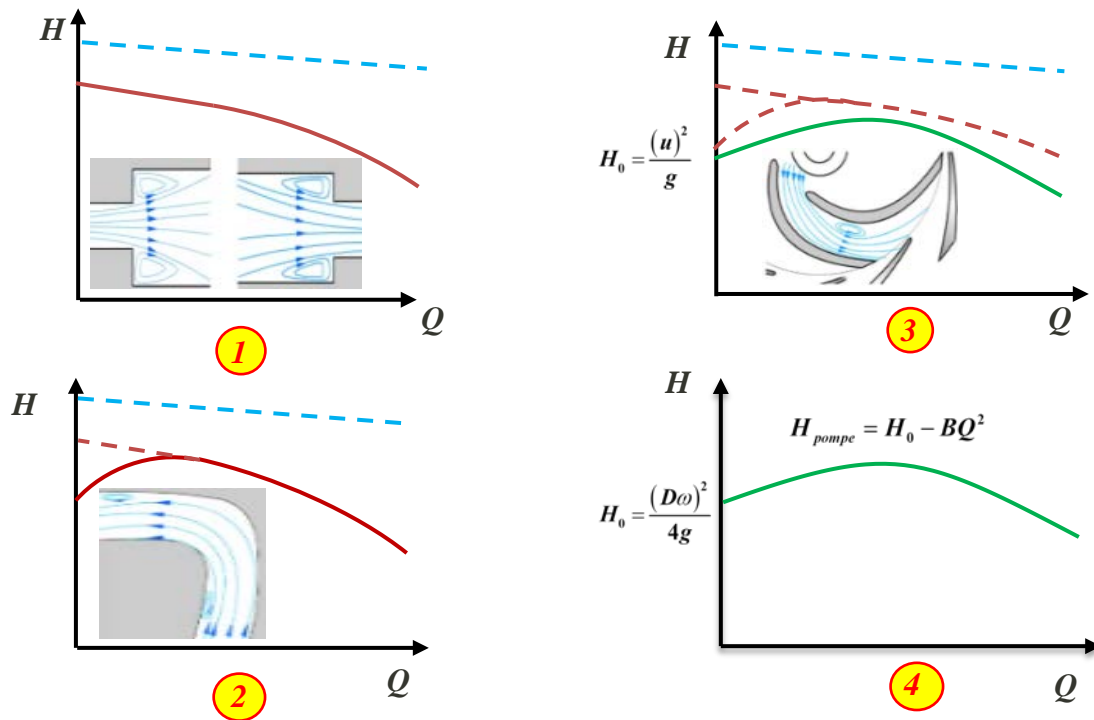


Figure 1,2, 3 et 4 : Passage des caractéristiques théoriques aux caractéristiques réelles

La tenue en compte de ces différentes pertes, permettra de tracer les courbes caractéristiques réelles des pompes : $H_{pompe} = H_0 - BQ^2$

7. Les lois de similitude

7.1 Conditions de similitude

Pour que deux pompes soit similaires il faut que :

- ✓ Les triangles des vitesses des deux pompes soient semblables, α_g et β_g sont conservés.
- ✓ Le rapport des diamètres et des largeurs de sortie est une constante
- ✓ Les rendements aux points similaires sont conservés. $\left(\frac{(\eta)_n}{(\eta)_x} \right) = 1$

7.1.1 Loi des hauteurs :
$$\frac{(H)_n}{(H)_x} = \left(\frac{(n)_n}{(n)_x} \right)^2 \left(\frac{(D)_n}{(D)_x} \right)^2$$

7.1.2 Loi des débits :
$$\frac{(Q)_n}{(Q)_x} = \left(\frac{(b)_n}{(b)_x} \right) \left(\frac{(n)_n}{(n)_x} \right) \left(\frac{(D)_n}{(D)_x} \right)^2$$

7.1.3 Loi des puissances :
$$\frac{(\dot{W}_u)_n}{(\dot{W}_u)_x} = \left(\frac{(b)_n}{(b)_x} \right) \left(\frac{(n)_n}{(n)_x} \right)^3 \left(\frac{(D)_n}{(D)_x} \right)^4$$

