

الفصل الثاني: الدوال ذات متغيرين

تعريف 1: نسمي دالة ذات متغيرين كل دالة f معرفة من $D \subseteq \mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}$ أي ترفق بكل ثنائية (x, y) قيمة حقيقية $f(x, y)$ على الأكثر.

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x, y)$$

تعريف 2: نسمي D مجموعة تعريف الدالة f كل مجموعة النقاط (x, y) من $\mathbb{R}^2$ التي تملك صورة حقيقية بواسطة f أي $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \in \mathbb{R}\}$.
مثال: لتكن f دالة ذات متغيرين حيث $f(x, y) = \frac{x}{y}$ فإن f معرفة على $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

تعريف 3: لتكن f دالة حقيقية ذات متغيرين معرفة على D و $\ell \in \mathbb{R}$. نقول أن f تقبل نهاية ℓ عند (x_0, y_0) إذا كان $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \ell$.

ملاحظة: (x_0, y_0) تؤول إلى (x_0, y_0) يعني x يؤول إلى x_0 و y يؤول إلى y_0 .

مثال: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}^2$ $f(x, y) = x^2 + 2y$ فإن $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y) = 2$

العمليات على النهايات

لتكن f و g دالتان ذات متغيرين ، فإن

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) + g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) + \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \times g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \times \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \alpha f(x, y) = \alpha \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y)}, g(x, y) \neq 0$$

الإستمرار

لتكن f دالة معرفة على $D \subset \mathbb{R}^2$ و (a, b) نقطة من D .

نقول أن الدالة f مستمرة عند (a, b) إذا كان $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

نقول الدالة f مستمرة على D إذا كانت مستمرة عند جميع نقاطها.

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^2$ $f(x, y) = xy$ مستمرة عند $(0, 0)$.

ملاحظة: نقول أن الدالة f غير مستمرة عند (a, b) إذا كانت $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ غير موجودة

$$\text{أو } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \neq f(a, b)$$

مجموع ، جداء و قسمة دوال مستمرة هي دوال مستمرة على مجموعة تعريفها.

المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى

تعريف: لتكن f دالة معرفة على $D \subset \mathbb{R}^2$ و (a, b) نقطة من D .

نسعى مشتقة جزئية من الرتبة الأولى ل f بالنسبة ل x عند (a, b) النهاية $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$ إذا

كانت موجودة ونرمز لها بـ $f'_x(a, b)$ أو $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.

نسعى مشتقة جزئية من الرتبة الأولى ل f بالنسبة ل y عند (a, b) النهاية $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$ إذا

كانت موجودة ونرمز لها بـ $f'_y(a, b)$ أو $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

ملاحظة: لحساب $f'_x(a, b)$ ، نعتبر y ثابت و نشتق بالنسبة ل x .

لحساب $f'_y(a, b)$ ، نعتبر x ثابت و نشتق بالنسبة ل y .

مثال: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}^2$ بـ $f(x, y) = 2x^2y^3$

$$f'_y(x, y) = 6x^2y^2, f'_x(x, y) = 4xy^3$$

المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية

تعريف: لتكن f دالة معرفة على $D \subset \mathbb{R}^2$ ، تقبل الاشتقاق من الرتبة الأولى أي $f'_x(x, y)$ و $f'_y(x, y)$ موجودة فإن f تقبل الاشتقاق من الرتبة الثانية أي $f''_{xy}(x, y)$ ، $f''_{yx}(x, y)$ ، $f''_{xx}(x, y)$ ، $f''_{yy}(x, y)$ موجودة.

مثال: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}^2$ بـ $f(x, y) = x^3 + 2xy^2$

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 2y, f'_y(x, y) = 4xy, f''_{xx}(x, y) = 6x, f''_{xy}(x, y) = 4y, f''_{yx}(x, y) = 4y, f''_{yy}(x, y) = 2$$

النقاط الحرجة

تعريف: لتكن f دالة معرفة على $D \subset \mathbb{R}^2$ و (a, b) نقطة من D .

نقول أن (a, b) نقطة حرجة لـ f إذا كانت $f'_x(a, b) = 0$ و $f'_y(a, b) = 0$.

خاصية Monge

لتكن (a, b) نقطة حرجة لـ f و لتكن $r = f''_{xx}(a, b)$ ، $s = f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$ ، $t = f''_{yy}(a, b)$ فإن

إذا كان $r > 0$ (أو $t > 0$) و $s^2 - rt < 0$ فإن (a, b) نقطة حدية صغرى.

إذا كان $r < 0$ (أو $t < 0$) و $s^2 - rt < 0$ فإن (a, b) نقطة حدية عظمى.

إذا كان $s^2 - rt > 0$ فإن (a, b) نقطة سرج.

مثال: عين النقاط الحرجة و حدد طبيعتها للدالة $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 3y , f'_y(x, y) = 3y^2 - 3x .$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \text{ لنحل الجملة } \begin{cases} x^2 - y = 0 \dots\dots\dots (1) \\ y^2 - x = 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases} \text{ التي تكافئ الجملة}$$

من المعادلة (1): $y = x^2$ ، بالتعويض في المعادلة (2) نجد $x^4 - x = 0$ أي $x = 0$ أو $x = 1$

إذا كان $x = 0$ فإن $y = 0$ و إذا كان $x = 1$ فإن $y = 1$ و منه توجد نقطتان حرجتان لـ f هما $A(0,0)$ ، $B(1,1)$

$$f''_x(x, y) = 6x , f''_y(x, y) = 6y , f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -3$$

طبيعة النقطة $A(0,0)$: $s = -3$ ، $r = t = 0$ و منه $s^2 - rt = 9$ و منه $A(0,0)$ نقطة سرج.

طبيعة النقطة $A(1,1)$: $s = -3$ ، $r = t = 6$ و منه $s^2 - rt = -27$ و منه $A(0,0)$ نقطة حدية صغرى.

من إعداد الأستاذة: زروق

