

جامعة جيجل

كلية العلوم الإنسانية والاجتماعية

قسم علم الاجتماع

إحصاء استدلالي - ثانية ليسانس علم الاجتماع - السداسي الثاني

اختبار كولموجروف-سميرنوف لاختبار  
التوزيع الطبيعي للبيانات

Kolmogorov-Smirnov Test for Normality

الدكتورة: سامية بوكحيل

إعداد

العام الجامعي 2024 - 2025

## المقدمة

يُعد اختبار كولموجروف-سميرنوف (Kolmogorov-Smirnov Test) من أهم الاختبارات الإحصائية غير المعملية المستخدمة في تحديد ما إذا كانت عينة بيانات معينة تتبع توزيعاً احتمالياً محددًا، ولا سيما التوزيع الطبيعي. يلعب هذا الاختبار دوراً محورياً في البحث العلمي الاجتماعي، حيث يساعد الباحثين على التحقق من افتراض التوزيع الطبيعي قبل تطبيق العديد من الاختبارات الإحصائية المعملية التي تتطلب هذا الافتراض كشرط أساسي لصحة نتائجها.

سُمي هذا الاختبار على اسم العالمين الروسيين أندريه كولموجروف (Andrey Kolmogorov) ونيكولاي سميرنوف (Nikolai Smirnov)، اللذين طوّرا أسس هذا الاختبار في ثلاثينيات القرن العشرين. يتميز الاختبار بقدرته على مقارنة دالة التوزيع التجريبي للعينة مع دالة التوزيع التراكمي النظري للتوزيع المرجعي بطريقة حساسة ودقيقة، مما يجعله أداة لا غنى عنها في ترسانة الباحث الإحصائي.

في سياق مبحث علم الاجتماع، يواجه الباحثون في كثير من الأحيان الحاجة إلى التحقق من طبيعة توزيع البيانات التي يجمعونها من الميدان، سواء أكانت بيانات تتعلق بالظواهر الاجتماعية أو الاقتصادية أو النفسية أو الثقافية. ويُعد اختبار كولموجروف-سميرنوف أحد أهم الأدوات الإحصائية التي تمكن الباحث من اتخاذ قرار علمي رصين حول ما إذا كانت بياناته تتبع التوزيع الطبيعي أم لا، وبناءً عليه يختار الأداة الإحصائية المناسبة لتحليلها.

## أهداف الدرس

يهدف هذا الدرس إلى تحقيق الأغراض التالية:

- التعرف على مفهوم اختبار كولموجروف-سميرنوف وأهميته في التحليل الإحصائي.
- فهم الأنواع المختلفة لاختبار كولموجروف-سميرنوف (لعينة واحدة ولعينتين).
- معرفة شروط وافتراضات تطبيق الاختبار.
- إتقان خطوات تطبيق اختبار كولموجروف-سميرنوف لعينة واحدة.
- القدرة على تفسير نتائج الاختبار واتخاذ القرار الإحصائي المناسب.
- معرفة كيفية تطبيق الاختبار باستخدام برامج إحصائية مثل SPSS.
- التمييز بين اختبار كولموجروف-سميرنوف والاختبارات البديلة مثل اختبار شايبرو-ويلك.

## أولاً: تعريف اختبار كولموجروف-سميرنوف

اختبار كولموجروف-سميرنوف (Kolmogorov-Smirnov Test) هو اختبار إحصائي غير معلمي يُستخدم لمقارنة دالة التوزيع التجريبي لعينة من البيانات مع دالة التوزيع التراكمي النظري للتوزيع مرجعي محدد. يقوم الاختبار بحساب أقصى فرق مطلق بين الدالتين، ثم يقارن هذه

القيمة مع قيمة حرجة مستمدة من جداول إحصائية محددة أو من خلال حساب القيمة الاحتمالية (p-value) لتحديد ما إذا كان الفرق ذا دلالة إحصائية أم لا.

يعتمد الاختبار على مفهوم دالة التوزيع التراكمي (Cumulative Distribution Function - CDF)، وهي دالة رياضية تصف احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة أقل من أو تساوي نقطة معينة. فإذا كانت دالة التوزيع التجريبي للعينة قريبة من دالة التوزيع التراكمي النظري للتوزيع الطبيعي، فإننا نستنتج أن البيانات تتبع التوزيع الطبيعي. أما إذا كان الفرق بينهما كبيراً، فإننا نرفض هذه الفرضية.

يُعد هذا الاختبار من الاختبارات القوية والحساسة لأنه يأخذ في الاعتبار الفروق في جميع نقاط التوزيع وليس فقط في نقطة معينة، مما يجعله أكثر دقة من العديد من الاختبارات البديلة في الكشف عن الانحرافات عن التوزيع الطبيعي.

## ثانياً: أنواع اختبار كولموجروف-سميرنوف

### 1. اختبار كولموجروف-سميرنوف لعينة واحدة (One-Sample K-S Test)

يُستخدم هذا النوع لاختبار ما إذا كان متغير معين في عينة واحدة يتبع توزيعاً احتمالياً محددًا مسبقاً. وفي أغلب الأحيان يكون هذا التوزيع المحدد هو التوزيع الطبيعي، ولذلك يُعرف أحياناً باختبار الحالة الطبيعية لكولموجروف-سميرنوف. كما يمكن استخدامه لاختبار توافق البيانات مع توزيعات أخرى مثل التوزيع المنتظم والتوزيع الأسّي والتوزيع اللوجستي وغيرها من التوزيعات الاحتمالية المستمرة.

في هذا النوع، نقوم بمقارنة دالة التوزيع التجريبي للعينة (Empirical Distribution Function - EDF) مع دالة التوزيع التراكمي النظري للتوزيع المفترض. فإذا كان أقصى فرق بينهما صغيراً وغير ذي دلالة إحصائية، قبلنا الفرضية القائلة بأن البيانات تتبع التوزيع المفترض.

### 2. اختبار كولموجروف-سميرنوف لعينتين (Two-Sample K-S Test)

يُستخدم هذا النوع لمقارنة توزيعي عينتين مستقلتين للتحقق مما إذا كانتا تنتمي إلى نفس التوزيع الإحصائي أم لا. يقوم الاختبار بمقارنة دالتي التوزيع التجريبيين للعينتين وحساب أقصى فرق مطلق بينهما. ويُعد هذا النوع مفيداً في المقارنات بين مجموعتين مختلفتين، مثل مقارنة توزيع الدخل بين منطقتين جغرافيتين مختلفتين، أو مقارنة توزيع أعمار مجموعتين اجتماعيتين مختلفتين.

ملاحظة هامة: في هذا الدرس، سنعتمد بشكل رئيسي على اختبار كولموجروف-سميرنوف لعينة واحدة لاختبار التوزيع الطبيعي للبيانات، وهو النوع الأكثر استخداماً في البحث الاجتماعي.

## ثالثاً: شروط واقتراضات تطبيق الاختبار

لكي تكون نتائج اختبار كولموجروف-سميرنوف صحيحة وموثوقة، يجب توافر مجموعة من الشروط والاقتراضات الأساسية التي يجب على الباحث مراعاتها قبل تطبيق الاختبار. ويمكن تلخيص هذه الشروط فيما يلي:

- استقلالية الملاحظات: يجب أن تكون جميع الملاحظات في العينة مستقلة عن بعضها البعض، أي أن قيمة أي ملاحظة لا تتأثر بقيم الملاحظات الأخرى. وهذا يعني أن العينة يجب أن تكون ممثلة وأن تكون طريقة جمع البيانات قد ضمنت عدم وجود ارتباط بين المشاهدات.
- طبيعة البيانات: يكون الاختبار أكثر دقة عند تطبيقه على البيانات المتصلة (المستمرة) أي البيانات التي يمكن أن تأخذ أي قيمة ضمن نطاق محدد. ويمكن تطبيقه على البيانات المتقطعة ولكن بدقة أقل.
- حجم العينة: يُفضل أن يكون حجم العينة كافياً (عادة أكثر من 50 مشاهدة) للحصول على نتائج موثوقة. ومع ذلك يمكن استخدام الاختبار مع عينات أصغر مع الأخذ في الاعتبار أن قوة الاختبار تقل مع صغر حجم العينة.
- معلمات التوزيع المرجعي: في النموذج الكلاسيكي للاختبار، يُفترض أن معلمات التوزيع المرجعي (المتوسط والانحراف المعياري في حالة التوزيع الطبيعي) معروفة مسبقاً. وعندما يتم تقدير هذه المعلمات من البيانات نفسها (وهو الحال الأعم في التطبيق العملي)، ينبغي استخدام نسخة معدلة من الاختبار أو الاعتماد على اختبارات بديلة مثل اختبار شايفرو-ويلك.
- القياس على الأقل ترتيبياً: يجب أن تكون البيانات قابلة للترتيب من الأصغر إلى الأكبر، أي أن يكون مقياس القياس ترتيبياً أو قتيماً مترقماً أو متصلاً.

## رابعاً: فرضيات الاختبار

يعتمد اختبار كولموجروف-سميرنوف على صياغة فرضيتين أساسيتين هما الفرضية العدمية ( $H_0$ ) والفرضية البديلة ( $H_1$ )، ويتم بناء القرار الإحصائي على أساس قبول أو رفض إحداها بناءً على نتائج الاختبار.

الفرضية العدمية ( $H_0$ ): تتبع البيانات التوزيع الطبيعي (أي أن توزيع العينة يتوافق مع التوزيع الطبيعي).  
الفرضية البديلة ( $H_1$ ): لا تتبع البيانات التوزيع الطبيعي (أي أن هناك فرقاً جوهرياً بين توزيع العينة والتوزيع الطبيعي).

وبناءً على نتائج الاختبار، إذا كانت القيمة الاحتمالية (Sig أو p-value) أكبر من مستوى الدلالة المختار (0.05 أو 0.01)، فإننا نقبل الفرضية العدمية ونستنتج أن البيانات تتبع التوزيع الطبيعي. أما إذا كانت القيمة الاحتمالية أصغر من مستوى الدلالة، فإننا نرفض الفرضية العدمية ونستنتج أن البيانات لا تتبع التوزيع الطبيعي.

## خامساً: آلية عمل الاختبار

يقوم اختبار كولموجروف-سميرنوف على مقارنة الدالتين أساسيتين: دالة التوزيع التجريبي (EDF) ودالة التوزيع التراكمي النظري (CDF). وتُعرف دالة التوزيع التجريبي على أنها النسبة التراكمية للملاحظات الأقل من أو تساوي قيمة معينة في العينة، في حين أن دالة التوزيع التراكمي النظري تصف الاحتمال النظري بأن يأخذ المتغير العشوائي قيمة أقل من أو تساوي نقطة معينة وفق التوزيع المفترض (التوزيع الطبيعي في حالتنا).

يتم حساب إحصائية الاختبار (D) على النحو التالي:

$$D = \max |F_n(x) - F_0(x)|$$

حيث:  $F_n(x)$  هي دالة التوزيع التجريبي للعينة (التكرار النسبي التراكمي)، و  $F_0(x)$  هي دالة التوزيع التراكمي النظري للتوزيع المفترض. وتمثل القيمة  $D$  أقصى فرق مطلق بين الدالتين عبر جميع نقاط البيانات.

فإذا كانت قيمة  $D$  صغيرة، فهذا يعني أن دالة التوزيع التجريبي قريبة من دالة التوزيع النظري، مما يدل على أن البيانات تتبع التوزيع المفترض. أما إذا كانت قيمة  $D$  كبيرة، فهذا يشير إلى وجود اختلاف جوهري بين التوزيع الفعلي للبيانات والتوزيع المفترض.

## سادساً: خطوات تطبيق اختبار كولموجروف-سميرنوف لعينة واحدة

● ترتيب البيانات: نقوم بترتيب المشاهدات من الأصغر إلى الأكبر تصاعدياً.

● حساب التكرارات النسبية التراكمية التجريبية: لكل مشاهدة، نحسب التكرار النسبي التراكمي  $F_n(x_i) = i / n$ ، حيث  $i$  هو ترتيب المشاهدة و  $n$  هو حجم العينة.

● تحويل البيانات إلى القيم المعيارية ( $Z$ ): نقوم بتحويل كل مشاهدة إلى القيمة المعيارية  $Z$  باستخدام المعادلة:  $Z = (X - \bar{X}) / S$ ، حيث  $X$  هي قيمة المشاهدة، و  $\bar{X}$  هو متوسط العينة، و  $S$  هو الانحراف المعياري للعينة.

● حساب التوزيع الطبيعي التراكمي النظري: باستخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي، نحدد القيمة التراكمية النظرية  $F_0(Z_i)$  لكل قيمة  $Z$  محسوبة.

● حساب الفروق المطلقة: نحسب الفرق المطلق بين التكرار النسبي التراكمي التجريبي والتكرار النسبي التراكمي النظري لكل مشاهدة:  $|F_n(x_i) - F_0(Z_i)|$ .

● تحديد إحصائية الاختبار  $D$ : نختار أكبر فرق مطلق من بين جميع الفروق المحسوبة في الخطوة السابقة، وتمثل هذه القيمة إحصائية الاختبار  $D$ .

● اتخاذ القرار الإحصائي: نقارن قيمة D المحسوبة مع القيمة الحرجة  $D_{\alpha,n}$  من جداول كولموجروف-سميرنوف عند مستوى دلالة  $\alpha$  وحجم عينة n. أو نعتمد على القيمة الاحتمالية (p-value) حيث نقارنها بمستوى الدلالة  $\alpha$ .

## سابعاً: مثال تطبيقي

### مثال: اختبار التوزيع الطبيعي لدرجات الطلاب

لنفترض أن باحثاً في علم الاجتماع قام بجمع بيانات من عينة مكونة من 10 طلاب حول مستوى الرضا الوظيفي على مقياس من 100 نقطة، وحصل على النتائج التالية:

45, 52, 58, 62, 65, 68, 72, 75, 80, 88

يريد الباحث التحقق من أن هذه البيانات تتبع التوزيع الطبيعي باستخدام اختبار كولموجروف-سميرنوف عند مستوى دلالة 0.05.

### خطوات الحل:

الخطوة 1: ترتيب البيانات تصاعدياً (تم ترتيبها مسبقاً).

الخطوة 2: حساب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري:

$$\bar{X} = \Sigma X / n = 665 / 10 = 66.5$$

$$S = \sqrt{[\Sigma (X - \bar{X})^2 / (n-1)]} \approx 13.35$$

الخطوة 3: إنشاء جدول الحسابات:

$ D_i $	$F_0(Z_i)$	$F_n(x_i)$	$Z_i$	$X_i$
0.047	0.053	0.100	1.62-	45
0.062	0.138	0.200	1.09-	52
0.039	0.261	0.300	0.64-	58

$ D_i $	$F_0(Z_i)$	$F_n(x_i)$	$Z_i$	$X_i$
0.033	0.367	0.400	0.34-	62
0.044	0.456	0.500	0.11-	65
0.056	0.544	0.600	0.11	68
0.041	0.659	0.700	0.41	72
0.061	0.739	0.800	0.64	75
0.056	0.844	0.900	1.01	80
0.054	0.946	1.000	1.61	88

الخطوة 4: تحديد قيمة D (أكبر فرق مطلق):

$$D = \max|D_i| = 0.062$$

الخطوة 5: مقارنة القيمة الحرجة:

عند مستوى دلالة 0.05 وحجم عينة  $n = 10$ ، القيمة الحرجة من جداول كولموجروف-سميرنوف هي  $D_{0.05, 10} = 0.409$ .

بما أن D المحسوبة (0.062) أقل من القيمة الحرجة (0.409)، فإننا نقبل الفرضية العدمية ونستنتج أن البيانات تتبع التوزيع الطبيعي عند مستوى دلالة 0.05.

الخلاصة: لا توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين التوزيع التجريبي للبيانات والتوزيع الطبيعي النظري، مما يعني أن بيانات الرضا الوظيفي تتبع التوزيع الطبيعي.

## ثامناً: تطبيق الاختبار باستخدام برنامج SPSS

يوفر برنامج التحليل الإحصائي SPSS إمكانية تطبيق اختبار كولموجروف-سميرنوف بسهولة ويسر من خلال عدة طرق، وسنستعرض الطريقتين الأكثر استخداماً:

الطريقة الأولى: من خلال قائمة Explore (الاستكشاف)

1. فتح برنامج SPSS وإدخال البيانات.
2. الذهاب إلى القائمة: **Analyze → Descriptive Statistics → Explore**.
3. نقل المتغير المراد اختباره إلى مربع **Dependent List**.
4. النقر على زر **Plots**.
5. تحديد خيار **Normality plots with tests**.
6. النقر على **Continue** ثم **OK**.

## الطريقة الثانية: من خلال الاختبارات غير المعلمية (Nonparametric Tests)

1. الذهاب إلى القائمة: **Analyze → Nonparametric Tests → Legacy Dialogs → 1-Sample K-S**.
2. نقل المتغير المراد اختباره إلى مربع **Test Variable List**.
3. تحديد نوع التوزيع المطلوب اختباره (في حالتنا **Normal**).
4. النقر على **OK**.

## قراءة نتائج الاختبار في SPSS

تظهر نتائج الاختبار في جدول يحتوي على المعلومات التالية:

المعلمة	الوصف
N	حجم العينة (عدد المشاهدات الصالحة)
Mean	المتوسط الحسابي
Std. Deviation	الانحراف المعياري
Kolmogorov-Smirnov Z	قيمة Z المحسوبة للاختبار
Asymp. Sig. (2-tailed)	القيمة الاحتمالية (Sig أو p-value) وهي المعيار الأساسي لاتخاذ القرار

## قاعدة القرار في SPSS

إذا كانت  $\text{Sig} > 0.05$ : نقبل الفرضية العدمية → البيانات تتبع التوزيع الطبيعي → يمكن استخدام الاختبارات المعلمية (parametric tests).

إذا كانت  $\text{Sig} < 0.05$ : نرفض الفرضية العدمية → البيانات لا تتبع التوزيع الطبيعي → يجب استخدام الاختبارات غير المعلمية (nonparametric tests).

## تاسعاً: مقارنة اختبار كولموجروف-سميرنوف مع اختبار شايبرو-ويلك

يُعد اختبار شايبرو-ويلك (Shapiro-Wilk Test) البديل الأكثر استخداماً لاختبار كولموجروف-سميرنوف في اختبار التوزيع الطبيعي للبيانات. وقد أصبح هذا الاختبار الخيار المفضل لدى كثير من الباحثين والبرامج الإحصائية، وذلك لعدة مبررات يمكن إيجازها في الجدول التالي:

وجه المقارنة	اختبار كولموجروف-سميرنوف	اختبار شايبرو-ويلك
حجم العينة المناسب	العينات الكبيرة ( $n > 50$ )	العينات الصغيرة والمتوسطة ( $n < 50$ )
قوة الاختبار	أقل قوة مع العينات الصغيرة	أعلى قوة خاصة مع العينات الصغيرة
الحساسية للأطراف	أقل حساسية لانحرافات الأطراف	أكثر حساسية لانحرافات الأطراف
المعلات	يفترض معرفة المعلات مسبقاً	يقوم بتقدير المعلات من البيانات
التطبيق في SPSS	متوفر في Nonparametric و Explore	متوفر في Explore فقط
الاستخدام الأكاديمي	أقل استخداماً في الأبحاث الحديثة	الأكثر استخداماً وتوصية في الأبحاث الحديثة

توصية: في الأبحاث الاجتماعية الحديثة، يُفضل استخدام اختبار شايبرو-ويلك (Shapiro-Wilk) لاختبار التوزيع الطبيعي، خاصة مع العينات الصغيرة والمتوسطة. ومع ذلك يظل اختبار كولموجروف-سميرنوف أداة مهمة وقيمة يجب على الباحث معرفتها وفهمها.

## عاشراً: مزايا وقيود اختبار كولموجروف-سميرنوف

### مزايا الاختبار

- لا يتطلب افتراضات كثيرة حول توزيع البيانات، فهو اختبار غير معلمي.
- يتميز بالبساطة والسهولة في الفهم والتطبيق.
- يمكن استخدامه لمقارنة التوزيع مع أي توزيع نظري (طبيعي، منتظم، أسّي، إلخ).
- يأخذ في الاعتبار جميع نقاط التوزيع وليس فقط المتوسط والتباين.

- متوفر في معظم البرامج الإحصائية مثل SPSS و R و Python.
- فعال مع العينات الكبيرة نسبياً.

## قيود الاختبار

- حساس لحجم العينة: قد لا يكون موثقاً مع العينات الصغيرة جداً (أقل من 20 مشاهدة).
- أقل حساسية لانحرافات الأطراف (الذيلين) مقارنة باختبار شايرو-ويلك.
- يفترض معرفة معلمات التوزيع المرجعي مسبقاً (في الصيغة الكلاسيكية).
- قد يكون مفراط الحساسية مع العينات الكبيرة جداً، حيث يكشف عن فروق ضئيلة لا تهم عملياً.
- غير مناسب للبيانات المنفصلة بشكل كامل.

## حادي عشر: أهمية الاختبار في البحث الاجتماعي

يحتل اختبار كولموجروف-سميرنوف مكانة هامة في البحث العلمي الاجتماعي لعدة أسباب جوهرية ترتبط بطبيعة البيانات التي يتعامل معها الباحث الاجتماعي وطرق تحليلها. وتوزع هذه الأهمية على عدة محاور أساسية:

- اختيار الأداة الإحصائية المناسبة: بعد معرفة ما إذا كانت البيانات تتبع التوزيع الطبيعي خطوة حاسمة قبل اختيار نوع الاختبار الإحصائي المناسب. فإذا كانت البيانات طبيعية التوزيع يمكن استخدام الاختبارات المعملية الأكثر قوة مثل اختبار t واختبار ANOVA. أما إذا لم تكن كذلك فيجب اللجوء إلى الاختبارات غير المعملية مثل اختبار مان-ويتني واختبار كروسكال-واليس.
- ضمان صحة النتائج: تطبيق اختبار إحصائي معلمي على بيانات لا تتبع التوزيع الطبيعي قد يؤدي إلى نتائج مضللة وقرارات خاطئة. لذلك يُعد اختبار كولموجروف-سميرنوف خطوة ضرورية للتأكد من صحة الافتراضات التي يقوم عليها التحليل الإحصائي.
- فهم طبيعة الظواهر الاجتماعية: يساعد الاختبار الباحث على فهم طبيعة توزيع الظواهر الاجتماعية محل الدراسة، وهل هي قريبة من التوزيع الطبيعي أم تميل إلى التوزيعات المتوترة أو غير المتماثلة، وهو ما يقدم رؤية أعمق لطبيعة المجتمع المدروس.
- مقارنة المجتمعات والمجموعات: يمكن استخدام النسخة ثنائية العينات من الاختبار للمقارنة بين توزيعات المتغيرات في مجتمعات أو مجموعات اجتماعية مختلفة، مما يساهم في الكشف عن الفروق في البناء الاجتماعي والاقتصادي لهذه المجموعات.

## ثاني عشر: خلاصة عامة

اختبار كولموجروف-سميرنوف هو أداة إحصائية غير معملية قوية تُستخدم لاختبار ما إذا كانت بيانات العينة تتبع توزيعاً احتمالياً معيناً، ويُستخدم بكثرة لاختبار التوزيع الطبيعي للبيانات. يقوم الاختبار بمقارنة دالة التوزيع التجريبي للعينة مع دالة التوزيع التراكمي النظري، ويحسب أقصى فرق مطلق بينهما (قيمة D) كإحصائية اختبار.

يتوفر الاختبار بنوعيه (لعينة واحدة ولعینتين) في معظم البرامج الإحصائية الحديثة مثل SPSS، ويمكن تطبيقه بسهولة من خلال قائمة الاختبارات غير المعملية أو من خلال قائمة الاستكشاف (Explore). والقاعدة الأساسية لتفسير النتائج هي: إذا كانت القيمة الاحتمالية (Sig)

أكبر من 0.05 فإن البيانات تتبع التوزيع الطبيعي، وإذا كانت أقل من 0.05 فإنها لا تتبعه.

ورغم أن اختبار شاير-ويلك أصبح الخيار المفضل في الأبحاث الحديثة خاصة مع العينات الصغيرة، إلا أن اختبار كولموجروف-سميرنوف يبقى أداة أساسية يجب على كل باحث في علم الاجتماع معرفتها واستخدامها عند الاقتضاء. ففهم آلية عمل هذا الاختبار وشروط تطبيقه وقيوده يُمكن الباحث من اتخاذ قرارات إحصائية سليمة وتحقيق نتائج بحثية موثوقة ودقيقة.

## المراجع والمصادر

- كولموجوروف، أ. (1933). Sulla Determinazione Empirica di una Legge di Distribuzione. Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari.
- سميرنوف، ن. (1939). On the Estimation of the Discrepancy Between Empirical Curves of Distribution for Two Independent Samples. Bulletin of Moscow University.
- ماسيه، و. ج. (1951). The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit. Journal of the American Statistical Association, 46(253), 68-78.
- شاير، س. س.، وويلك، م. ب. (1965). An Analysis of Variance Test for Normality. Biometrika, 52(3-4), 591-611.
- SPSS Inc. (2023). IBM SPSS Statistics Base Documentation. IBM Corporation.
- الدكتور سامية بوكحيل. محاضرات في مادة الإحصاء الاستدلالي. قسم علم الاجتماع، جامعة جيجل.