

Calcul Intégral

Intégrale Curviligne

Arcs et Chemins

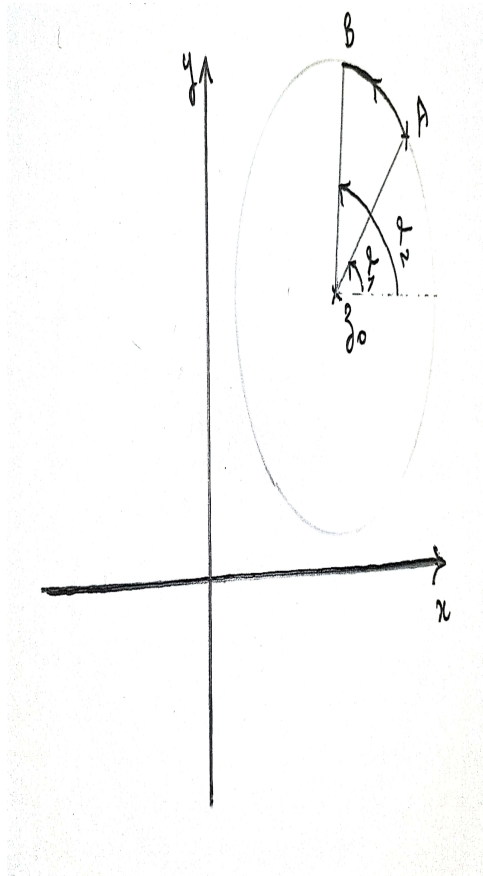
Définition 0.1. *Le chemin est une application continue $t \mapsto \gamma(t)$ de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont respectivement l'origine et l'extrémité du chemin.*

Le chemin est dit de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. $\mathcal{C}^1$ par morceaux) lorsque $t \mapsto \gamma(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. $\mathcal{C}^1$ par morceaux).

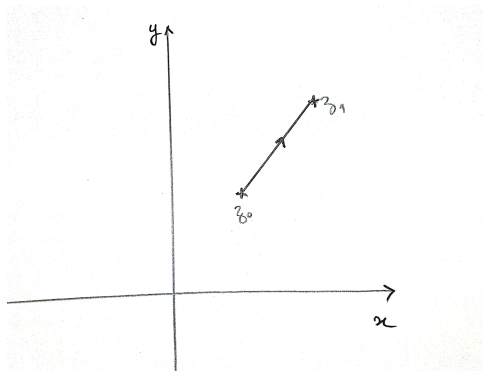
Remarque 0.2. *On rappelle que l'expression **de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux** signifie que l'intervalle $[a, b]$ peut être divisé en un nombre fini d'intervalles $[t_j, t_{j+1}]$ sur lesquels $t \mapsto \gamma(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.*

Définition 0.3. *Arc de courbe simple est l'image d'un chemin injectif de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.*

Exemple 0.4. 1. $z \in \gamma_1(t) \Leftrightarrow z = z_0 + re^{it}, t \in [\alpha_1, \alpha_2]$.



2. $z \in \gamma_2 \Leftrightarrow z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0), t \in [0, 1]$.



Définition 0.5. *Tout arc de courbe simple γ a une longueur $L(\gamma)$, donnée par l'expression suivante*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{z}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt,$$

si l'on pose $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$.

Un changement des coordonnées montre que cette définition est indépendante du représentant d'une courbe. De plus, on a $L(-\gamma) = L(\gamma)$ et $L(\gamma_1 + \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$, où

$-\gamma$ est le chemin opposé à $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ défini par

$$-\gamma(t) = \gamma(a + b - t).$$

Intuitivement, c'est l'arc γ **parcoursu dans l'autre sens**.

Exemple 0.6. *Considérons la parabole $y = x^2$ paramétrisée par $\gamma(t) = (t, t^2)^T$, on obtient pour la longueur d'arc entre $t = 0$ et $t = 1$*

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}).$$

Définition 0.7. *Arc de courbe fermée simple est l'image d'un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et qui satisfait aux propriétés suivantes*

1. *sa restriction à $]a, b[$ est injective.*
2. *$\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Un arc de courbe fermée simple γ est notée

1. *γ^+ : lorsque son orientation est celle du sens trigonométrique.*
2. *γ^- : lorsque orientation est inverse de celle du sens trigonométrique.*

Définition 0.8. *Deux chemins $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ sont dits équivalents s'il existe une application $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ vérifiant les conditions suivantes*

1. *ϕ est bijective, croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.*
2. *la bijection réciproque de ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.*
3. *$\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$.*

On sait que tout sous ensemble $\mathcal{D}$ ouvert connexe de $\mathbb{C}$ est appelé domaine. Dans ce qui suit nous limiterons l'étude au cas où la frontière $\partial\mathcal{D}$ est une réunion finie de points et de courbe.

La frontière $\partial\mathcal{D}$ d'un domaine se repartira donc comme suit

1. Une courbe extérieure (sauf si $\overline{\mathcal{D}} = \mathbb{C}$).
2. $p - 1$ courbes ou points intérieurs ($p \geq 1$).

lorsque $p = 1$ on dit que le domaine $\mathcal{D}$ est **simplement connexe** et lorsque $p > 1$ on dit que le domaine $\mathcal{D}$ est **p -connexe**.

0.0.1 Intégrale $\int_{\gamma} f(z) dz$

Définition 0.9. *Soient γ un arc de courbe simple inclu dans $\mathbb{C}$ et f une application continue $f(z) = p(x, y) + iq(x, y)$. On appelle intégrale de f sur γ , l'expression définie par*

l'intégrale curviligne suivante

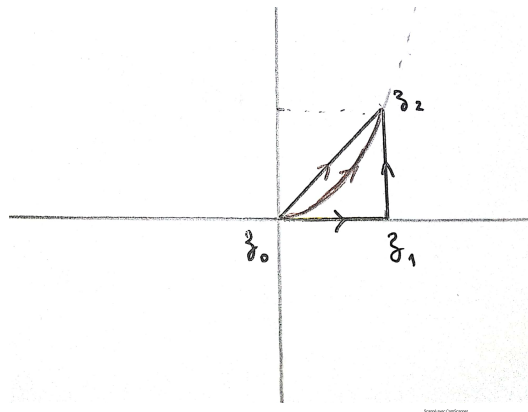
$$\int_{\gamma} p(x, y)dx - q(x, y)dy + i \int_{\gamma} q(x, y)dx + p(x, y)dy,$$

on la note $\int_{\gamma} f(z)dz$ et on a donc

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} p(x, y)dx - q(x, y)dy + i \int_{\gamma} q(x, y)dx + p(x, y)dy.$$

Exemple 0.10. l'intégrale $\int_{\gamma} (1 + i - 2\bar{z})dz$ prise le long des lignes qui relient les points $z_0 = 0$ et $z_2 = 1 + i$:

1. suivant une droite.
2. suivant la parabole $y = x^2$.
3. suivant la ligne polygonale $z_0 z_1 z_2$, où $z_1 = 1$.



Suivant une droite :

l'équation de la droite qui passe par les points z_0 et $z_2 = 1 + i$ est $y = x$ et donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (1 + i - 2\bar{z})dz &= \int_{\gamma} [(1 - 2x) + i(1 + 2y)]dz \\ &= \int_{\gamma} (1 - 2x)dx - (1 + 2y)dy + i \int_{\gamma} (1 + 2y)dx + (1 - 2x)dy \\ &= \int_0^1 (1 - 2x)dx - \int_0^1 (1 + 2y)dy + i \int_0^1 (1 - 2x)dx + i \int_0^1 (1 + 2x)dx \\ &= -2 + 2i. \end{aligned}$$

Suivant la parabole d'équation $y = x^2$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} (1 + i - 2\bar{z})dz &= \int_{\gamma} (1 - 2x)dx - (1 + 2y)dy + i \int_{\gamma} (1 + 2y)dx + (1 - 2x)dy \\
 &= \int_{\gamma} (1 - 2x)dx - (1 + 2x^2)2xdx + i \int_{\gamma} (1 + 2x^2)dx + (1 - 2x)2xdx \\
 &= \int_0^1 (1 + 4x^3)dx + i \int_0^1 (1 + 2x - 2x^2)dx \\
 &= 2 + i\frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

Suivant la ligne polygonale $z_0z_1z_2$:

$$\int_{\gamma} (1 + i - 2\bar{z})dz = \int_{\gamma_1} (1 + i - 2\bar{z})dz + \int_{\gamma_2} (1 + i - 2\bar{z})dz,$$

où γ_1 et γ_2 sont respectivement les segments $[z_0, z_1]$ et $[z_1, z_2]$.

Sur γ_1 : on a $y = 0$ et $0 \leq x \leq 1$ d'où

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_1} (1 + i - 2\bar{z})dz &= \int_0^1 (1 - 2x)dx + i \int_0^1 dx \\
 &= i.
 \end{aligned}$$

ù Sur γ_2 : on a $x = 1$ et $0 \leq y \leq 1$ d'où

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_2} (1 + i - 2\bar{z})dz &= \int_0^1 (1 + 2y)dy - i \int_0^1 dy \\
 &= -2 - i.
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_{\gamma} (1 + i - 2\bar{z})dz = -2.$$

Théorème 0.11. Soient $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et f une fonction continue sur $\text{Im}\gamma$. Alors,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt.$$

supposons que $f(z) = p(x, y) + iq(x, y)$ et $z(t) = x(t) + iy(t)$. Alors,

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\gamma} p(x, y)dx - q(x, y)dy + i \int_{\gamma} q(x, y)dx + p(x, y)dy \\
 &= \int_a^b p(x(t), y(t))\dot{x}(t)dt - q(x(t), y(t))\dot{y}(t)dt + i \int_a^b q(x(t), y(t))\dot{x}(t)dt + p(x(t), y(t))\dot{y}(t)dt \\
 &= \int_a^b p(x(t), y(t))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t))dt + i \int_a^b q(x(t), y(t))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t))dt \\
 &= \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Proposition 0.12. Soient $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$, et f une fonction continue sur $Im\gamma_1 \cup Im\gamma_2$.

1. Si γ_2 est le chemin opposé à γ_1 . Alors,

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = - \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

2. Supposons que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Alors,

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

3. Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins équivalents et si f est une fonction continue sur $Im\gamma_1$, on a

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_2} f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma_2(t))\dot{\gamma}_2(t)dt \\
 &= - \int_a^b f(\gamma_1(a+b-t))\dot{\gamma}_1(a+b-t)dt \\
 &= \int_b^a f(\gamma_1(t))\dot{\gamma}_1(t)dt \\
 &= - \int_a^b f(\gamma_1(t))\dot{\gamma}_1(t)dt,
 \end{aligned}$$

d'où

$$\int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t)dt = - \int_a^b f(\gamma_1(t))\dot{\gamma}(t)dt.$$

2. evident

3. γ_1 et γ_2 sont équivalents alors il existe une application ϕ bijective croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sa bijection réciproque est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$, d'où

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma_1(t))\dot{\gamma}_1(t)dt \\ &= \int_a^b f(\gamma_2 \circ \phi(t))\dot{\gamma}_2 \circ \phi(t)dt \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma_2)(\phi(t))\dot{\phi}(t)\gamma_2(\phi(t))dt \\ &= \int_c^d f(\gamma_2(t))\dot{\gamma}_2(t)dt \\ &= \int_{\gamma_2} f(z)dz. \end{aligned}$$

■

Théorème 0.13. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin qui est continument différentiable et soit f une fonction continue sur $Im\gamma$. Alors,

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq ML(\gamma),$$

où $M = \max_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))|$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\dot{\gamma}(t)|dt \\ &= \max_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|dt \\ &= ML(\gamma). \end{aligned}$$

Remarque 0.14. Dans le cas où γ est seulement continument différentiable par morceaux, il faut appliquer ce raisonnement à chaque sous intervalle où γ est continument différentiable.

Exemple 0.15.

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} z \bar{z} dz &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} e^{-it} i e^{it} dt \\ &= i \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemple 0.16.

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt \\ &= i \int_{-\pi}^{\pi} dt \\ &= i2\pi. \end{aligned}$$

Théorème 0.17. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur U . Les conditions suivantes sont équivalentes

1. f possède une primitive dans U .
2. Pour tout chemin fermé γ dans U , on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Théorème 0.18. Si f admet une primitive F holomorphe dans $\mathcal{D}$. Pour tout chemin γ d'origine z_1 et d'extrémité z_2 . Alors,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1).$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)dt \\
&= \int_a^b (F(z(t))\dot{z}(t))dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}(F(z(t)))dt \\
&= F(z(b)) - F(z(a)) \\
&= F(z_2) - F(z_1).
\end{aligned}$$

Exemple 0.19.

$$\begin{aligned}
\int_{1+i}^{-1-i} (2z+1)dz &= \frac{1}{4} \int_{1+i}^{-1-i} 2 \times 2 \times (2z+1)dz \\
&= \frac{1}{4} (2z+1)^2 \Big|_{1+i}^{-1-i} \\
&= -2(1+i).
\end{aligned}$$

0.1 Théorème de Cauchy

Lemme 0.20. (*Lemme de Green*)

Si p et q ont des dérivées partielles continues sur un domaine $\mathcal{D}$. Alors,

$$\int_{\partial\mathcal{D}} p dx + q dy = \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy.$$

Théorème 0.21. (*Théorème de Cauchy*)

Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et γ un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans $\mathcal{D}$. Alors,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Démonstration. Supposons que $f(x, y) = p(x, y) + iq(x, y)$. On sait que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} p(x, y)dx - q(x, y)dy + i \int_{\gamma} p(x, y)dy + q(x, y)dx,$$

en appliquant le lemme de Green on obtient

$$\int_{\gamma} f(z)dz = - \int \int_{Int(\gamma)} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) dx dy + i \int \int_{Int(\gamma)} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx dy,$$

comme f est holomorphe, alors les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites, d'où $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}$ et $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}$ ce qui montre que

$$\int_{\gamma} f(z)dz.$$

■

Exemple 0.22. Calculons $\int_{\gamma} e^{z^2} dz$ où γ est le carré des sommets $0, 1, 1+i$ et i . Comme $z \mapsto e^{z^2}$ est holomorphe sur γ ainsi que son intérieur, on en déduit d'après le théorème de Cauchy que

$$\int_{\gamma} e^{z^2} dz = 0.$$

Exemple 0.23. $\int_{|z|=1} \cos z dz = 0$ car la fonction $z \mapsto \cos z$ est holomorphe sur le disque unité fermé.

Remarque 0.24. 1. Si $\mathcal{D}$ est un domaine simplement connexe, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}$ et $A, B \in \mathcal{D}$. Alors, $\int_A^B f(z)dz$ dépend uniquement de A et B et ne dépend pas du chemin entre A et B . En effet, considérons le chemin $\Gamma = \Gamma_1 \cup (-\Gamma_2)$. Comme $\Gamma \mathcal{D}$ est fermé et f holomorphe sur $\mathcal{D}$ on conclut alors d'après le théorème de Cauchy que

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0,$$

mais

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz - \int_{\Gamma_2} f(z)dz,$$

d'où

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

2. Si $\mathcal{D}$ est multiplément connexe de frontière $\Gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$ et f une fonction holomorphe sur $\overline{\mathcal{D}}$. Alors,

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

Théorème 0.25. (Formule de Cauchy)

Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ un domaine, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et γ un chemin contenu ainsi que son intérieur dans $\mathcal{D}$. Alors, pour tout z dans l'intérieur de γ on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

le chemin étant parcouru dans le sens trigonométrique.

Démonstration. On considère la fonction $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{2\pi i(\zeta - z)}$. La fonction g est holomorphe sur $\mathcal{D} \setminus \{z\}$ alors si nous prenons le chemin $\Gamma = \gamma \cup L \cup (-C_r) \cup (-L)$. Le théorème de Cauchy nous donne

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = 0,$$

d'où

$$\int_{\gamma} g(z) dz + \int_L g(z) dz - \int_{C_r} g(z) dz - \int_L g(z) dz = 0,$$

alors

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_{C_r} g(z) dz.$$

Sur C_r on a $\zeta = z + re^{it}$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z + re^{it}) dt \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z + re^{it}) dt,$$

le premier ordre membre de la dernière équation est indépendant de r et par suite, en faisant tendre r vers 0 on trouve que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z) dt = f(z).$$

■

Exemple 0.26.

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2 + 2z}.$$

La fonction $z \mapsto \frac{e^z}{z^2 + 2z}$ n'est pas holomorphe au points $z_0 = 0$ et $z_1 = -2$ dans $D(0, 3)$.

Méthode 01 : On décompose $\frac{1}{z(z+2)}$.

$$\frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} \right).$$

Alors,

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz = \frac{1}{2} \left(\int_{|z|=3} \frac{dz}{z} - \int_{|z|=3} \frac{1}{z+2} dz \right),$$

la fonction $z \mapsto e^z$ est holomorphe sur le disque fermé centré en 0 de rayon 3 et donc d'après la formule intégrale de Cauchy

$$\begin{aligned} \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz &= \frac{1}{2} \times 2\pi i (e^0 - e^{-2}) \\ &= \pi i (1 - e^{-2}). \end{aligned}$$

Méthode 02 : On considère le chemin $\Gamma = C \cup (-C_1) \cup (-C_2)$. On remarque que la fonction $z \mapsto \frac{e^z}{z^2 + 2z}$ est holomorphe sur Γ et $\text{Int}(\Gamma)$ et alors d'après la formule intégrale de Cauchy

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz = 0,$$

d'où

$$\int_C \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz - \int_{C_1} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz - \int_{C_2} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz,$$

et par suite

$$\int_C \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz = \int_{C_1} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz + \int_{C_2} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz.$$

Sur C_1

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz &= \int_{C_1} \frac{e^z}{z} dz \quad (0 \in \text{Int}(C_1)) \\ &= 2\pi i f_1(0) / f_1(z) = \frac{e^z}{z+2} \\ &= \pi i. \end{aligned}$$

Sur C_2

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz &= \int_{C_2} \frac{e^z}{z+2} dz \quad (-2 \in \text{Int}(C_2)) \\ &= 2\pi i f_2(-2) / f_2(z) = \frac{e^z}{z} \\ &= -\pi i e^{-2}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\int_C \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz = \pi i(1 - e^{-2}).$$

Remarque 0.27. (Formule intégrale de Cauchy pour les dérivées)

Par récurrence sur n , on voit par un raisonnement semblable que l'on a pour la $n^{\text{ème}}$ dérivées $f^{(n)}$ et sous les mêmes hypothèses, la relation suivante

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

En particulier, f admet des dérivées de tout ordre $k \in \mathbb{N}^*$ et ces dérivées sont holomorphe.

Exemple 0.28.

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2 - 1)^2} dz = \int_{|z-1|=1} \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^2(z+1)^2} dz.$$

comme $z \mapsto \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^2(z+1)^2}$ est holomorphe sur le disque fermé de centre 1 et de rayon 1 sauf au point 1, alors d'après la formule intégrale de Cauchy (pour les dérivées) on a

$$\begin{aligned} \int_{|z-1|=1} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2 - 1)^2} dz &= \int_{|z-1|=1} \frac{\sin(\pi z)}{(z+1)^2(z-1)^2} dz \\ &= \frac{2\pi i}{1!} f'(1), \end{aligned}$$

où $f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(z+1)^2}$ et donc

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2 - 1)^2} dz = \frac{-i\pi^2}{2}.$$

Théorème 0.29. (Formule de la moyenne)

Soient f une fonction holomorphe sur un domaine $\mathcal{D}$, $z_0 \in \mathcal{D}$, $R > 0 : \overline{D}(z_0, R) \subset \mathcal{D}$.

Alors,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt.$$

Démonstration. On sait que

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

sur $\partial\mathcal{D}$ $z = z_0 + Re^{it}$ d'où

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{Re^{it}} iRe^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt. \end{aligned}$$

■

Théorème 0.30. (Inégalité de Cauchy)

Soient f une fonction holomorphe sur un domaine $\mathcal{D}$, $z_0 \in \mathcal{D}$, $r > 0$: $\overline{D}(z_0, r) \subset \mathcal{D}$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N} : |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Démonstration. D'après la formule intégrale de Cauchy on a

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z_0) &= \frac{n!}{2i\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \\ &= \frac{n!}{2i\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z_0 + re^{it})}{r^{n+1} e^{(n+1)it}} i r e^{it} dt, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &\leq \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{|f(z_0 + re^{it})|}{r^{n+1} |e^{(n+1)it}|} |i r e^{it}| dt \\ &= \frac{n!}{2\pi r^n} \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)| \int_{-\pi}^{\pi} \pi dt \\ &\leq \frac{n!}{2r^n} \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|. \end{aligned}$$

■

Théorème 0.31. (Théorème de Liouville)

Si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, f est une fonction holomorphe bornée alors f est constant.

Démonstration. Soient a et b deux points dans $\mathbb{C}$ et soit γ le cercle d'origine a et de rayon r tel que $b \in \gamma$ on a

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - b} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) \frac{z - b - z + a}{(z - a)(z - b)} dz \\ &= \frac{a - b}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - a)(z - b)} dz, \end{aligned}$$

on sait que f est holomorphe, alors f est continue ce qui montre que f est bornée, c'est à dire, il existe une constante $M > 0$ telle que $|f(z)| < M$. Alors,

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &\leq \frac{|a - b|M}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(z)|}{|z - a||z - b|} |dz| \\ &\leq \frac{|a - b|M}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z - a||z - b|}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |z - b| &\geq |z - a| - |a - b| \\ &\geq r - |b - a|, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &\leq \frac{|a - b|M}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|dz|}{r(r - |a - b|)} \\ &\leq \frac{|a - b|M}{2\pi} \frac{2\pi r}{r(r - |a - b|)} \\ &\leq \frac{|a - b|M}{(r - |a - b|)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

lorsque $r \rightarrow +\infty$ ce qui montre que $f(a) = f(b)$ et par conséquent f est constante. ■

Théorème 0.32. (Théorème de Morera)

Soient $\mathcal{D}$ un domaine de $\mathbb{C}$ et soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que pour tout chemin γ dans $\mathcal{D}$ on a $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$. Alors, f est holomorphe dans $\mathcal{D}$.

Démonstration. D'après le Théo. 0.17, cette condition est équivalente à l'existence d'une primitive F de f dans $\mathcal{D}$. Alors F est holomorphe et il est de même pour sa dérivée $f = \dot{F}$ d'après la Rem. 0.27. ■