Université de Jijel
Faculté des sciences et de la technologie
$1^{ere}$ année ST Décembre 2025

**Espaces vectoriels et applications linéaires**

**Exercise 1** [*Sous espaces vectoriels*] *Déterminer si les ensembles suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels:*

$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+3z=0\right\}$
$E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+3z=2\right\}$
$E_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+3z=0\right\} \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x-y+z=0\right\}$
$E_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x+3y-5z=0\right\} \cup \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x-y+z=0\right\}$
$E_5 = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P(0) = P(2)\}$
$E_6 = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P'(0) = 2\}$
$E_7 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});\ f \text{ paires ou impaires}\}$

**Exercise 2** [*Famille libre ou liée*] *Soient:* $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ *et* $v_3 = (2,-1,4)$.

***1.*** *Vérifier que* $v_1$ *et* $v_2$ *ne sont pas colinéaires, puis qu'il en est de même pour* $v_2$ *et* $v_3$.

***2.*** *La famille* $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ *est-elle libre? Sinon, donner une relation de dépendance linéaire.*

**Exercise 3** [*Bases et* dim *ension*] *Pour a réel donné, on considère dans* $\mathbb{R}^3$ *les vecteurs* $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,2,3)$,$v_3 = (1,1,-1)$ *et* $v_4 = (2a, a+1, 4)$.

1. *Montrer que* $B = (v_1, v_2, v_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Donner une équation du plan* $\mathbf{P}$ *engendré par* $v_2$ *et* $v_3$ .
3. *Pour quelles valeurs de a la famille* $(v_2, v_3, v_4)$ *est-elle une base de* $\mathbb{R}^3$*?*
4. *Déterminer les coordonnées de* $v_4$ *dans la base* $\mathcal{B}$ *et la base canonique* $\mathcal{B}_c$.
5. *Pour quelles valeurs de a la famille* $(v_1, v_2, v_4)$ *est-elle une base de* $\mathbb{R}^3$*?*
6. *Donner la dimension de* $\mathbb{R}^3$.

**Exercise 4** [*Applications linéaires* (ker Im *et rang*] *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'application linéaire définie par*

$$f(x,y,z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2, -4x - y + 2z)$$

1. *Déterminer une base de* $\mathrm{Im}(f)$.
2. *Déterminer une base de* $\ker(f)$.
3. *L'application* $f$ *est-elle injective? surjective?*
4. *Quel est le rang de* $f$.

**Exercise 5** [*Supp*] *Déterminer si les ensembles suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels:*

$E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2y + 4z = 1\right\}$,
$E_2 = \mathbb{R}_2 [X]$, $\quad E_3 = \left\{P \in \mathbb{R}_2 [X] ; P^{(2)}(0) = 0\right\}$,
$E = \{f \in \mathcal{F} (\mathbb{R}, \mathbb{R}) ;\ f \text{ dérivable}\}$, $E = \{f \in \mathcal{F} (\mathbb{R}, \mathbb{R}) ;\ f \text{ paire}\}$, $E = \{f \in \mathcal{F} (\mathbb{R}, \mathbb{R}) ;\ f \text{ impaire}\}$,

**Exercise 6** [*Supp*]*Soit $E$ un espace vectoriel et soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer que $F \cup G$ est encore un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.*

**Exercise 7** [*Supp*] *On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.*

1. *Montrer que la famille $(v_1, v_2)$ est libre. Faire de même pour $(v_1, v_3)$, puis pour $(v_2, v_3)$.*
2. *La famille $(v_1, v_2, v_3)$ est-elle libre?*

**Exercise 8** [*Supp*] *On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:*

*$E = \{v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y + z + t = 0\}$ et $F = \{v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0 \text{ et } z = 2t\}$ .*

1. *Déterminer la dimension et une base de $E$ et $F$.*
2. *Trouver la dimension et une base de $E \cap F$ .*
3. *Que peut-on dire de $E + F$? La somme est-elle directe?*

**Exercise 9** [*Supp*] *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par*

$$f(x, y, z) = (x, 2x + z, y + z)$$

1. *Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.*
2. *Déterminer une base de $\ker(f)$.*
3. *L'application $f$ est-elle injective? surjective?*
4. *Quel est le rang de $f$.*

**Exercise 10** *On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:*

$$f(x, y, z) = (x + y, x - 2z)$$

1. *Montrer que $f$ est une application linéaire.*
2. *Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\{0\})$. $f$ est-elle injective?*
3. *Déterminer l'image $f(\mathbb{R}^3)$ de $f$. $f$ est-elle surjective?*