

Série de TD N°03
Espaces vectoriels et applications lineaires

Exercice 1

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$.

C'est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène. Il contient 0, et il est stable par addition et par multiplication par un scalaire. Donc E_1 est un sous-espace vectoriel.

2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 2\}$.

L'origine n'appartient pas à E_2 puisqu'on aurait $0 = 2$. Donc E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel.

3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0, 2x - y + z = 0\}$.

Intersection de deux sous-espaces (deux équations homogènes). Donc E_3 est un sous-espace vectoriel.

4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - 5z = 0 \text{ ou } x - y + z = 0\}$.

C'est l'union de deux sous-espaces. En général, l'union de deux sous-espaces n'est pas un sous-espace (sauf si l'un est inclus dans l'autre). Donc E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel.

5. $E_5 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(2)\}$.

La condition $P(0) - P(2) = 0$ est linéaire. 0 vérifie la condition. L'ensemble est stable par addition et par scalaire. Donc E_5 est un sous-espace.

6. $E_6 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P'(0) = 2\}$.

0 n'appartient pas à E_6 car $0'(0) = 0 \neq 2$. Donc E_6 n'est pas un sous-espace.

7. $E_7 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est paire ou impaire}\}$.

La somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire n'est en général ni paire ni impaire. Donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 2

On considère les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$, $v_3 = (2, -1, 4)$. Soient

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (4, 1, 4), \quad v_3 = (2, -1, 4).$$

1. Vérifier que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.

Si v_1 et v_2 étaient colinéaires, il existerait un réel λ tel que

$$v_2 = \lambda v_1.$$

Cela donnerait le système suivant :

$$\{ 4 = \lambda \cdot 1, 1 = \lambda \cdot 1, 4 = \lambda \cdot 0.$$

Les deux premières équations donnent $\lambda = 4$ et $\lambda = 1$, ce qui est une contradiction. La troisième équation donne $4 = 0$, ce qui est impossible. On en conclut que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.

2. Vérifier que v_2 et v_3 ne sont pas colinéaires.

S'ils étaient colinéaires, il existerait un réel λ tel que

$$v_3 = \lambda v_2.$$

On obtiendrait alors :

$$\{ 2 = 4\lambda, -1 = \lambda, 4 = 4\lambda.$$

La deuxième équation donne $\lambda = -1$, mais en remplaçant dans la première on trouve $2 = -4$, ce qui est absurde. Ainsi, aucune valeur de λ ne satisfait simultanément les trois équations.

$$\Rightarrow \quad v_2 \text{ et } v_3 \text{ ne sont pas colinéaires.}$$

Conclusion : Les couples de vecteurs (v_1, v_2) et (v_2, v_3) ne sont pas colinéaires. Soient

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (4, 1, 4), \quad v_3 = (2, -1, 4).$$

On cherche des scalaires $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0.$$

En composantes, cela donne le système linéaire : Soit la famille de vecteurs

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (4, 1, 4), \quad v_3 = (2, -1, 4).$$

On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0,$$

ce qui donne le système linéaire suivant :

$$\{ \alpha + 4\beta + 2\gamma = 0, \alpha + \beta - \gamma = 0, 4\beta + 4\gamma = 0.$$

Résolution :

De la troisième équation, on obtient

$$4\beta + 4\gamma = 0 \Rightarrow \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \beta = -\gamma.$$

En remplaçant dans la deuxième équation :

$$\alpha + \beta - \gamma = \alpha - \gamma - \gamma = \alpha - 2\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = 2\gamma.$$

Ainsi, la solution générale est

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma(2, -1, 1), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

En prenant $\gamma = 1$, on obtient la relation de dépendance linéaire non triviale :

$$2v_1 - v_2 + v_3 = 0.$$

Conclusion : La famille $F = (v_1, v_2, v_3)$ n'est pas libre

Exercice 3

1. **Montrer que $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .**

Vérifions que la famille est *libre* : supposons que

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0.$$

La seule solution est $\alpha = \beta = \gamma = 0$, donc la famille est libre.

Remarque : $\text{card}(B) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Or une famille libre de cardinal égal à la dimension de l'espace est automatiquement *génératrice*.

Conclusion : B est libre et génératrice, donc B est une **base de \mathbb{R}^3** .

Équation du plan $P = \text{Vect}(v_2, v_3)$

On a :

$$v_2 = (1, 2, 3), \quad v_3 = (1, 1, -1)$$

Tout vecteur (x, y, z) du plan P s'écrit comme combinaison linéaire de v_2 et v_3 :

$$(x, y, z) = \alpha v_2 + \beta v_3 = \alpha(1, 2, 3) + \beta(1, 1, -1) = (\alpha + \beta, 2\alpha + \beta, 3\alpha - \beta)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

De la première composante, on obtient :

$$x = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = x - \beta$$

Substituons dans la deuxième composante :

$$y = 2\alpha + \beta = 2(x - \beta) + \beta = 2x - \beta \Rightarrow \beta = 2x - y$$

Puis la troisième composante devient :

$$z = 3\alpha - \beta = 3(x - \beta) - \beta = 3x - 4\beta = 3x - 4(2x - y) = 4y - 5x$$

Ainsi, une équation cartésienne du plan P est :

$$z = 4y - 5x \quad \text{ou équivalentement} \quad 5x - 4y + z = 0$$

Pour quelles valeurs de a la famille (v_2, v_3, v_4) est-elle une base de \mathbb{R}^3 ?

Une famille de 3 vecteurs dans \mathbb{R}^3 est une base si et seulement si elle est *libre*, c'est-à-dire si $v_4 \notin \text{Vect}(v_2, v_3)$.

L'équation du plan engendré par v_2 et v_3 est :

$$5x - 4y + z = 0$$

Vérifions si $v_4 = (2a, a + 1, 4)$ appartient au plan :

$$5(2a) - 4(a + 1) + 4 = 10a - 4a - 4 + 4 = 6a$$

Ainsi :

$$v_4 \in \text{Vect}(v_2, v_3) \iff a = 0$$

Donc pour $a \neq 0$, $v_4 \notin \text{Vect}(v_2, v_3)$, et la famille (v_2, v_3, v_4) est **libre** et constitue donc une **base** de \mathbb{R}^3 .

$$a \neq 0$$

d'autres méthodes existent toujours!!! **Coordonnées de v_4 dans les bases B et B_c**

1. Base canonique $B_c = (e_1, e_2, e_3)$:

$$v_4 = 2a e_1 + (a + 1) e_2 + 4 e_3$$

Donc les coordonnées dans B_c sont :

$$(2a, a + 1, 4)$$

2. Base $B = (v_1, v_2, v_3)$:

On cherche (α, β, γ) tels que

$$v_4 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$$

En composantes :

$$\alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 2, 3) + \gamma(1, 1, -1) = (2a, a + 1, 4)$$

Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2a \\ \beta + \gamma = a + 1 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 4 \end{cases}$$

Réolvons :

$$\alpha = 2a - \beta - \gamma$$

$$(2a - \beta - \gamma) + 3\beta - \gamma = 4 \Rightarrow \beta - \gamma = 2 - a$$

$$\{\beta - \gamma = 2 - a, 2\beta + \gamma = a + 1\} \Rightarrow \beta = 1, \gamma = a - 1, \alpha = a$$

Donc les coordonnées de v_4 dans la base B sont :

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (a, 1, a - 1)$$

Pour quelles valeurs de a la famille (v_1, v_2, v_4) est-elle une base de \mathbb{R}^3 ?

La famille est une base si et seulement si elle est *libre*, c'est-à-dire si la seule combinaison linéaire nulle est triviale :

$$\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_4 = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$$

Écrivons le système des composantes :

$$\{\lambda + \mu + 2a\nu = 0, 2\mu + (a + 1)\nu = 0, \lambda + 3\mu + 4\nu = 0\}$$

De la deuxième équation : $\mu = -\frac{a+1}{2}\nu$

De la première équation : $\lambda = -\frac{3a-1}{2}\nu$

Substituons dans la troisième équation :

$$-\frac{3a-1}{2}\nu + 3\left(-\frac{a+1}{2}\nu\right) + 4\nu = (3-3a)\nu = 0$$

Donc $\nu = 0$ si $a \neq 1$, et alors $\mu = \lambda = 0$.

Conclusion : la famille (v_1, v_2, v_4) est une **base** de \mathbb{R}^3 pour

$$a \neq 1.$$

Dimension de \mathbb{R}^3

Par définition, la dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs dans une base. Puisque \mathbb{R}^3 possède des bases contenant exactement 3 vecteurs, on a :

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$$