Série de TD-2

Exercice 1 :

On considère $f : R^3 \to R^2$, $f(x, y, z) = (x + y, x - 2z)$.
1) Montrer que *f* est une application linéaire.
2) Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\{0_{R^2}\})$. *f* est-elle injective?
3) Déterminer l'image $f(R^3)$ de *f*. *f* est-elle surjective?

Exercice 2 :
Soit $f : R^3 \to R^3$, l'application linéaire définie par
$$f(x, y, z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z) .$$
1) Déterminer une base de Im(*f*).
2) Déterminer une base de ker(*f*).
3) L'application *f* est-elle injective? surjective?
4) Quel est le rang de *f*.

Exercice 3 :
Soit $f : R^3 \to R^3$, l'application linéaire définie par
$$f(x, y, z) = (x, 2x + z, y + z) .$$
1) Déterminer une base de Im(*f*).
2) Déterminer une base de ker(*f*).
3) L'application *f* est-elle injective? surjective?
4) Quel est le rang de *f*.

Exercice 4 :
On considère $f : R^2 \to R^2$, $f(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$.
1) Montrer que *f* est une application linéaire.
2) Montrer que *f* est ni injective ni surjective.
3) Donner une base de son noyau (ker(*f*)) et une base de son image (Im(*f*)).

Exercice 5 :
On considère $f : R^3 \to R^3$, l'application définie par
$$f(x, y, z) = (-x + 2y + 2z, -8x + 7y + 4z, -13x + 5y + 8z) .$$
1) Montrer que *f* est une application linéaire.
2) Déterminer l'image par f des vecteurs de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de R^3. Calculer $f(2e_1 + e_2 - e_3)$.
3) Déterminer le noyau de *f*. En donner une base et préciser sa dimension.
4) L'application *f* est-elle injective? surjective? Bijective?
5) Soit g l'application linéaire définie par :
$$g : R^2 \to R^3,\ g(x, y) = (x - y, x + y, x + 2y)$$
Calculer $f \circ g$.