Ex. 10.

$$f(x,y,z) = (x+y,\ x-2z)$$

1) f linéaire ??

Soient $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. On a

$$f(\alpha(x_1,y_1,z_1) + \beta(x_2,y_2,z_2)) = f(\underline{\alpha x_1+\beta x_2},\ \underline{\alpha y_1+\beta y_2},\ \underline{\alpha z_1+\beta z_2})$$

$$= (\alpha x_1+\beta x_2+\alpha y_1+\beta y_2,\ \alpha x_1+\beta x_2-2\alpha z_1-2\beta z_2)$$

$$= (\alpha(x_1+y_1),\ \alpha(x_1-2z_1)) + (\beta(x_2+y_2),\ \beta(x_2-2z_2))$$

$$= \alpha(x_1+y_1,\ x_1-2z_1) + \beta(x_2+y_2,\ x_2-2z_2)$$

$$= \alpha f(x_1,y_1,z_1) + \beta f(x_2,y_2,z_2)$$

2)

$$\mathrm{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = (0,0)\} = f^{-1}(0,0)$$

Donc $\begin{cases} x+y = 0 \ \ldots (1) \\ x-2z = 0 \ \ldots (2) \end{cases}$

$\underset{\Longrightarrow}{\text{de }(2)}$ $x = 2z$

En remplaçant dans (1)

$2z+y = 0 \Rightarrow y = -2z$

Donc $(x,y,z) = (2z,-2z,z)$

$f^{-1}(0,0) = \{z(2,-2,1) \ / \ z \in \mathbb{R}\}$

alors $\dim \mathrm{Ker} f = 1$

f injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

et on a $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{(2,-2,1)\}$

alors f n'est pas injective

3/

$\mathrm{Im} f = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid \exists! (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x', y')\}$

Donc

$$\begin{cases} x + y = x' & \text{--- } (1) \\ x - 2z = y' & \text{--- } (2) \end{cases}$$

de (2) $\Longrightarrow$ $x = y' + 2z$ --- (3)

On remplace dans (1)

$y' + 2z + y = x' \Longrightarrow y = x' - y' - 2z$

Pour tout $x', y' \in \mathbb{R}$, on peut choisir z librement et obtenir une solution

Donc

$f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$

f surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$

alors f est surjective

Scanné avec CamScanner

Ex. 04.

1/ $f(x,y,z) = (-3x - y + z,\ 8x + 3y - 2z,\ -4x - y + 2z)$

$\mathrm{Im} f = ??$

$\mathrm{Im} f = \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \mid \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x', y', z')\}$

$= \{(-3x - y + z,\ 8x + 3y - 2z,\ -4x - y + 2z) / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

$= \{x(-3, 8, -4) + y(-1, 3, -1) + z(1, -2, 2) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

donc

$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(-3,8,-4), (-1,3,1), (1,-2,2)\}$

On vérifie si ces vecteurs sont liés

Cherchons si

$(1,-2,+2) = \alpha(-3,8,-4) + \beta(-1,3,-1)$

on trouve $\alpha = 1$, $\beta = 2$

Les trois vecteurs sont donc liés.

On garde deux vecteurs indépendants

$\mathrm{Im} f = \{\mathrm{Vect}\{(-3,8,-4), (-1,3,-1)\}$

On vérifie facilement que ces vecteurs sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de $\mathrm{Im} f$. et $\dim \mathrm{Im} f = 2$

2/ $\mathrm{Ker} f = ??$

$\mathrm{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = (0,0,0)\}$

Donc

$$\begin{cases} -3x - y + z = 0 & \cdots (1) \\ 8x + 3y - 2z = 0 & \cdots (2) \\ -4x - y + 2z = 0 & \cdots (3) \end{cases}$$

de (1) $\Longrightarrow$ $z = 3x + y \quad \cdots (4)$

On remplace dans (2)

$8x + 3y - 2(3x + y) = 0$

$\Longrightarrow y = -2x$

de (4) $\Longrightarrow$ $z = x$

Donc

$(x, y, z) = (x, -2x, x) = x(1, -2, 1)$

$\operatorname{Ker} f = \{ x(1, -2, 1) \ / \ x \in \mathbb{R} \}$

Ainsi

$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{(1, -2, 1)\}$

Le vecteur $(1, -2, 1) \neq (0,0,0)$, donc il forme une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$

3/

f injective $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

ici le noyau contient $(1, -2, 1) \neq (0,0,0)$

donc f n'est pas injective

4/ Surjective

f surjective $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$

On a $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$, par la formule du rang

$\dim \overset{E}{\mathbb{R}^3} = \underset{\dim(\operatorname{Im} f)}{\operatorname{rg} f} + \dim \operatorname{Ker} f$ / $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$

Donc l'image est de dimension 2 / f n'est pas surjective