Matière : Maths2

Série de TD-1

Exercice 1 :

Calculer les matrices suivantes :

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&4\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&4&-1\\2&1&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&b&a\\1&1&1\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}1&a&c\\1&b&b\\1&c&a\end{pmatrix}$ $(a,b,c)\in R^3$; $C=2B-{}^tB+I_3$.

Exercice 2 :

On dit que deux matrices A et B commutent si $A.B=B.A$. Trouver toutes les matrices qui commutent avec A : $A=diag(1,3,5)$

Exercice 3 :

1) Soit $A(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\in M_2(R)$, pour $\theta\in R$. Calculer $A(\theta).A(\theta')$ et $[A(\theta)]^n$ pour $n\geq 1$.

2) Pour $x\in R$: $B(x)=\begin{pmatrix}chx&shx\\shx&chx\end{pmatrix}\in M_2(R)$.

a) Calculer $B(x).B(y)$ et en déduire la matrice inverse de $B(x)$.

b) Calculer $[B(x)]^n$ pour $n\in Z$.

Exercice 4 :

Calculer (s'il existe) l'inverse des matrices :

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\3&-2&0\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}1&\bar z&\bar z^2\\z&1&\bar z\\z^2&z&1\end{pmatrix}\ (z=x+iy)\in C\ ;\quad\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 5 :

1) Soient A et B deux matrices de $M_n(K)$. On suppose que $A.B=I_n+A+A^2$.

- Montrer que A est inversible et calculer A^{+1}.
- En déduire que A et B commutent.

2) Pour quelle valeur de x la trace de la matrice A est minimale ? Et pour quelle valeur de x est-elle maximale ?

$$A=\begin{pmatrix}2x^3&1&1\\0&3x^2&2\\5&6&-12x\end{pmatrix}$$

Exercice 6 :

Soit f l'application linéaire définie par : $\begin{aligned}f:\ &R^2\to R^3\\ &(x,y)\mapsto f(x,y)=(x-y,x+y,y-x)\end{aligned}$

Déterminer la matrice $M(f/B,C)$ associée à f selon les cas suivants :

a) B et C sont respectivement les bases canoniques de R^2 et de R^3.

b) B est une base de R^2 : $B=(b_1,b_2)$ avec $b_1=(1,1)$ et $b_2=(-1,1)$ et C une base de R^3 : $C=(c_1,c_2,c_3)$ avec $c_1=(1,1,1)$, $c_2=(0,1,0)$ et $c_3=(-1,-1,1)$

Exercice 7 :

1) Soit B et B' deux familles de vecteurs de R^3. Montrer que B et B' sont des bases et déterminer la matrice de passage $P_B^{B'}$.

$B=(e_1,e_2,e_3)$: $e_1=(-1,-1,3)$; $e_2=(-4,-4,4)$; $e_3=(-1,-2,4)$

$B'=(e_1',e_2',e_3')$: $e_1'=e_1+2e_2+e_3$; $e_2'=2e_1+3e_2+e_3$; $e_3'=3e_1+e_2+2e_3$

2) En déduire la matrice de passage $P_{B'}^{B}$.

Exercice 8 :

On considère l'application f de R^4 dans R^4 définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+t \\ bx+ay+z \\ y+az+bt \\ x+bz+at \end{pmatrix}$$ ou a et b sont des paramètres.

1) Ecrire f sous forme $f(X) = A.X$ et donner sa matrice dans les bases canoniques.

2) On considère les 4 vecteurs :

$V_1 = (1,1,1,1)$, $V_2 = (-1,1,-1,1)$, $V_3 = (-1,-1,1,1)$, $V_4 = (1,-1,-1,1)$

Ecrire les images de V_1, V_2, V_3, V_4 par f, d'abord dans la base canonique, puis dans la base (V_1,V_2,V_3,V_4).

3) Ecrire la matrice de f dans la base (V_1,V_2,V_3,V_4) (au départ et à l'arrivée).

4) Ecrire la matrice de passage P de la base canonique dans la base (V_1,V_2,V_3,V_4).

5) Vérifier vos calculs à l'aide d'une formule du cours, après avoir inversé P.

Corrigé de la Série de TD_1 (Mathe 2) ST

Ex.01 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

$$C = 2B - B^2 + I_3 =$$

Ex 02 : $A = \text{diag}(1, 3, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

On cherche B telle que :

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}} \cdot \overset{B}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}} = \overset{B}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}} \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 3b_{21} & 3b_{22} & 3b_{23} \\ 5b_{31} & 5b_{32} & 5b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 3b_{12} & 5b_{13} \\ b_{21} & 3b_{22} & 5b_{23} \\ b_{31} & 3b_{32} & 5b_{33} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} b_{11} = b_{11} \\ b_{12} = 3b_{12} \\ b_{13} = 5b_{13} \\ 3b_{21} = b_{21} \\ 3b_{22} = 3b_{22} \\ 3b_{23} = 5b_{23} \\ 5b_{31} = b_{31} \\ 5b_{32} = 3b_{32} \\ 5b_{33} = 5b_{33} \end{cases} \iff B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \text{ avec}$$

$$\begin{matrix} b_{11} = b_{11} \\ b_{22} = b_{22} \\ b_{33} = b_{33} \end{matrix} \quad \left(b_{12} = 0,\ b_{13} = 0,\ b_{21} = 0,\ b_{23} = 0,\ b_{31} = 0,\ b_{32} = 0 \right.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

Ex 03

1/ $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; $\theta \in \mathbb{R}$

$$A(\theta) \cdot A(\theta') = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta \cdot \cos\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{donc } A(\theta) \cdot A(\theta') = A(\theta+\theta')}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}}$$

TD_1 Math 2 ST

*/ $\left[A(\theta)\right]^n = ?$ $\forall n \geq 1$

On montre par récurrence : $\forall n \geq 1$: $\left[A(\theta)\right]^n \overset{?}{=} A(n\theta)$

- La proposition est vraie pour $n=1$
- Fixons $n \geq 1$ et supposons que $\left[A(\theta)\right]^n = A(n\theta)$

alors $\left[A(\theta)\right]^{n+1} = \left[A(\theta)\right]^n . A(\theta)$

$$= A(n\theta) . A(\theta) = A(n\theta + \theta)$$

$$= A((n+1)\theta)$$

donc la Proposition est vraie pour $(n+1)$

donc $\forall n \geq 1$: $\left[A(\theta)\right]^n = A(n\theta)$

2/ $B(x) = \begin{pmatrix} ch x & sh x \\ sh x & ch x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$

a/ $B(x).B(y) = \begin{pmatrix} ch x & sh x \\ sh x & ch x \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} ch y & sh y \\ sh y & ch y \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{ch x\, ch y + sh x\, sh y}^{ch(x+y)} & \overbrace{ch x\, sh y + sh x\, ch y}^{sh(x+y)} \\ \underbrace{sh x\, ch y + ch x\, sh y}_{sh(x+y)} & \underbrace{sh x\, sh y + ch x\, ch y}_{ch(x+y)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ch(x+y) & sh(x+y) \\ sh(x+y) & ch(x+y) \end{pmatrix}$$

donc $B(x) . B(y) = B(x+y)$

* $B^{-1}_{(x)} = ?$

On a $B(x) . B(-x) = A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

donc $B(x)$ est inversible d'inverse $B^{-1}(x) = B(-x)$

$$B^{-1}(x) = B(-x)$$

b/ $[B(x)]^n = ?$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

On a pour $n \in \mathbb{N}^*$ $(n>0) \Rightarrow$

$$[B(x)]^n = B(x) . B(x) . \dots . B(x)$$
$$= B(x+x+\dots+x) = B(nx)$$

Pour $n=0$, $[B(x)]^0 = I_2 = B(0)$

et enfin pour $n<0$ $(n=-m, m>0$

$$\Rightarrow [B(x)]^n = [B(x)]^{-m} = \left((B(x))^{-1}\right)^m$$
$$= [B(-x)]^m = B(-mx)$$
$$= B(nx)$$

TD_1 (Math 2) ST

Finalement on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z} : [B(x)]^n = B(nx)$$

$$= \begin{pmatrix} ch(nx) & sh(nx) \\ sh(nx) & ch(nx) \end{pmatrix}$$

Ex 04 : Calcul de l'inverse matriciel

N.B :

*) $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ si $\det A \neq 0 \Rightarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t[Cof(A)]$$ où $Cof(A)$ est la matrice de cofacteur.

1/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow$ corrigé au cours.

$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & \bar{z} \\ z & 1 \end{vmatrix}$ $M_{12} = \begin{vmatrix} z & \bar{z} \\ z^2 & 1 \end{vmatrix}$

2/ $B = \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & \bar{z}^2 \\ z & 1 & \bar{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$

$z = x + iy$; $\bar{z} = x - iy$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & \bar{z} \\ z & 1 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} \bar{z} & \bar{z}^2 \\ z & 1 \end{vmatrix} + z^2 \begin{vmatrix} \bar{z} & \bar{z}^2 \\ 1 & \bar{z} \end{vmatrix}$$

$$= (1 - z\bar{z})^2$$

$\underline{\text{Si}}$ $1-2.\bar{z} \neq 0$ $(2.\bar{z} \neq 1) \Rightarrow B$ est inversible.

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

$$B^{-1} = \frac{1}{1-2.\bar{z}} \; {}^t(\mathrm{Cof}(B)) \quad / \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

$$\mathrm{Cof}\, B = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} =$$

$${}^t(\mathrm{Cof}\, B) = \qquad \Rightarrow B^{-1} =$$

3/ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det C = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$\det C =$

$\underline{\text{Ex 05}}$

1/ $A.B \in M_n(\mathbb{K}) / A.B = I_n + A + A^2$ $\exists ?\, B$ tq : $A.\underset{A^{-1}}{B} = I_n$

*) On a $A.B = I_n + A + A^2 \Rightarrow$

$A.B - A - A^2 = I_n \Rightarrow$

TD-1 (Math 2) ST

$$A(\underbrace{B - I_n - A}_{A^{-1}}) = I_n \Longrightarrow \boxed{A^{-1} = B - I_n - A}$$

*/ On a $A^{-1} = B - I_n - A \Longrightarrow$

$$B = A^{-1} + I_n + A \Longrightarrow$$

$$B.A = (A^{-1} + I_n + A).A = A^{-1}.A + I_n.A + A.A$$

$$= I_n + A + A^2$$

donc $A.B = B.A$

2) $$A = \begin{pmatrix} 2x^3 & 1 & 1 \\ 0 & 3x^2 & 2 \\ 5 & 6 & -12x \end{pmatrix}$$

$$Tr(A) = 2x^3 + 3x^2 - 12x = y(x)$$

Etudions la fonction $y(x)$

$$y'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$$

$$= 6(x-1)(x+2)$$

$y'(x) = 0 \Longrightarrow x = 1 \vee x = -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$y(-2)$	$\searrow$	$y(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

donc $y(x)$ présente un maximum local pour $x=-2$ et un minimum local pour $x=1$

Ex 06 A ne pas corriger (Il a été corrigé au cours).

Ex 07 :

$B, B' \in \mathbb{R}^3$ / $B=(e_1, e_2, e_3)$
$B'=(e'_1, e'_2, e'_3)$

1°/ B est une base :

Puisque l'on est en dimesion 3 et que la famille B a 3 éléments, B est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi elle est libre (ou génératrice).

Pour montrer qu'elle est libre, on regarde à quelle condition ~~une~~ combinaison linéaire est nulle :

Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$,

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 - 4\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_1 - 4\lambda_2 \\ 2\lambda_3 = -\lambda_1 - 4\lambda_2 = \lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$

TD_1 (Math 2) ST

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -4\lambda_2 \\ -12\lambda_2 + 4\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0}$$

b/ B' est une base, même raisonnement pour B'

$$\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow$$

$$\lambda_1 (e_1 + 2e_2 + 3e_3) + \lambda_2 (2e_1 + 3e_2 + e_3) + \lambda_3 (3e_1 + e_2 + 2e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Longleftrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) e_1 + (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3) e_2 + (3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Puisque on a montré que B est une base de $\mathbb{R}^3$, (e_1, e_2, e_3) forme une famille libre et donc :

$\lambda_1 = -2\lambda_2 - 3\lambda_3$

$$\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \ldots (1) \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \ldots (2) \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \ldots (3) \end{cases}$$

On résout le système (par substitution par exemple)

et on trouve $\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0}$

1/ Matrice de passage : $P_B^{B'}$

Par définition même de la matrice de passage, P est la matrice obtenue ~~an~~ écrivant en colonne les coefficients des 3 vecteurs e'_1, e'_2 et e'_3 écrits en fonction de e_1, e_2 et e_3 $\Rightarrow$

$$P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2/ $P_{B'}^{B} = ?$

N.B On peut utiliser 2 méthodes afin de déterminer $P_{B'}^{B}$ $\quad e_1 = \alpha_1 e'_1 + \beta_1 e'_2 + \gamma_1 e'_3$

1ère méthode : On exprime les vecteurs e_1, e_2 et e_3 en fonction des vecteurs e'_1, e'_2 et e'_3 en on déduit la matrice de passage $P_{B'}^{B}$ ~~on~~ chaque colonne de $P_{B'}^{B}$ représente les coefficients des vecteurs e_1, e_2 et e_3 en fonction de e'_1, e'_2 ~~et~~ et e'_3.

2ème méthode : on a $P_{B'}^{B} = \left(P_B^{B'}\right)^{-1}$

on calcule la matrice inverse de $P_B^{B'}$

Scanné avec CamScanner

TD_1 (Math2) ST

$$P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(P_B^{B'}\right)^{-1} = \frac{1}{\det P_B^{B'}} \, {}^t\left(Cof\left(P_B^{B'}\right)\right)$$

On a $\det P_B^{B'} = -4$

$$Cof\left(P_B^{B'}\right) = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$$

N.B : $Cof_{ij} A = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ← Mineur

$$Cof\left(P_B^{B'}\right) = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t\left(Cof\, P_B^{B'}\right) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_B^{B} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exo8 : $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$X \longmapsto Y = f(X)$ avec

${}^tX = (x, y, z, t)$, ${}^tY = (ax + by + t, bx + ay + z, y + az + bt, x + bz + at)$

1°/ a) Ecriture matricielle de f :

$f(X) = AX$ / $A = ?$ / $\dim A = 4 \times 4$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & 0 & 1 \\ b & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & b \\ 1 & 0 & b & a \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

N.B : f est linéaire

b) Matrice associée à f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$:

$B_c = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ / $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$
$e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$

$M(f / B_c, B_c) = ?$ ← $\dim M = 4 \times 4$

on a donc

$M(f / B_c, B_c) = (f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$

TD_1 (Math2_ST)

$$\Rightarrow \quad M(f/_{B_c, B_c}) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 1 \\ b & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & b \\ 1 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

N.B :

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^{4} a_{ij} e_i \; / \; a_{ij} = ?$$

Remarque : $A = M(f/_{B_c, B_c})$

2/ Soit $B = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ /

$V_1 = (1,1,1,1)$, $V_2 = (-1,1,-1,1)$, $V_3 = (-1,-1,1,1)$, $V_4 = (1,-1,-1,1)$

a/ $f(V_i) = ?$ $\quad i = \overline{1,4}$ dans la base B_c

* $f(V_1) = f\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+1 \\ b+a+1 \\ 1+a+b \\ 1+b+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+1 \\ a+b+1 \\ a+b+1 \\ a+b+1 \end{pmatrix}$

* $f(V_2) = f\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b+1 \\ -b+a-1 \\ 1-a+b \\ -1-b+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b+1 \\ a-b-1 \\ -a+b+1 \\ a-b-1 \end{pmatrix}$

* $f(V_3) = f\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b+1 \\ -a-b+1 \\ a+b-1 \\ a+b-1 \end{pmatrix}$ / $f(V_4) = f\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+1 \\ -a+b-1 \\ -a+b-1 \\ a-b+1 \end{pmatrix}$

b) $\underset{i=1,4}{f(V_i)} = ?$ dans la base $B = (V_1, V_2, V_3, V_4)$

on remarque que :

$f(V_1) = (a+b+1) \cdot V_1$ | $f(V_3) = (a+b-1)\, V_3$

$f(V_2) = (a-b-1) \cdot V_2$ | $f(V_4) = (a-b+1)\, V_4$

Si l'on écrit les matrices des coordonnées de ces vecteurs dans la base B, on a donc

$$f(V_1) = \begin{pmatrix} a+b+1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(V_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ a-b-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(V_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a+b-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(V_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a-b+1 \end{pmatrix}$$

3/ $M(f/_{B,B}) = ?$

N.B. La matrice d'une application linéaire f a pour colonnes les images des vecteurs de la base de départ écrits dans la base d'arrivée. Ici les 2 bases sont les mêmes.

$$\Longrightarrow M(f/_{B,B}) = \begin{pmatrix} a+b+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b+1 \end{pmatrix}$$

TD_1 (Math 2-ST)

$V_i = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4$
$i=1,\dots,4$

4) $P = P^{B}_{B_c} = ?$

La matrice P est celle du système (V_1, V_2, V_3, V_4)

$$\Longrightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5) On a, $A = M(f/_{B_c, B_c})$

$A' = M(f/_{B,B})$

La relation entre les matrices. A et A' est donnée par la formule :

$$\cancel{A} \; A' = P^{-1} . A . P$$

On calcule d'abord P^{-1} : $P^{-1} = \frac{1}{\det P} \, {}^t(\mathrm{Cof}\, P)$

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$A . P = \begin{pmatrix} a+b+1 & -a+b+1 & -a-b+1 & a-b+1 \\ a+b+1 & a-b-1 & -a-b+1 & -a+b+1 \\ a+b+1 & a+b+1 & a+b-1 & -a+b-1 \\ a+b+1 & a-b-1 & a+b-1 & a-b+1 \end{pmatrix}$$