

## Série de TD N°2

2025-2026

---

### Exercice 1 :

I) On considère le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u'(x))' + bu'(x) = f(x), & x \in ]0, 1[, \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\alpha \in C([0, 1])$  satisfait  $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $b \in \mathbb{R}$  et  $f \in L^2(]0, 1[)$ .

1. Écrire la formulation faible correspondant à (1).
2. Montrer qu'il existe une solution faible unique  $u$  et que l'estimation correspondente est indépendante de  $b$ .
3. Justifier que  $u$  n'est pas nécessairement dans  $H^2(]0, 1[)$ .

### Exercice 2.

I) On considère le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in ]0, 1[, \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

où  $b \in H^1(]0, 1[)$  et  $c \in L^\infty(]0, 1[)$  des fonctions telles que  $c - \frac{1}{2}b' \geq 0$  p.p. et  $f \in L^2(]0, 1[)$ .

1. Écrire la formulation faible correspondant à (2).
2. Montrer qu'il existe une solution faible unique  $u$  et que l'estimation correspondente est indépendante de  $b$  et de  $c$ .
3. Montrer que  $u \in H^2(]0, 1[)$ .

II) Considérons maintenant le problème (2) avec des conditions aux limites de type Dirichlet non homogènes

$$u(0) = \beta, u(1) = \lambda,$$

où  $\beta$  et  $\lambda$  sont deux nombres réels. En se ramenant au problème de Dirichlet homogène, montrer que ce problème admet une solution faible unique. (*Indic.* Chercher la solution  $u$  sous la forme  $u = \tilde{u} + R$ , où  $\tilde{u}$  est la solution d'une EDP avec des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes et  $R$  est définie par  $R(x) = (\lambda - \beta)x + \beta$ .)

### Exercice 3 :

On considère le problème conditions aux limites mixtes suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in ]0, 1[, \\ u(0) = 0, u'(1) = \beta, \end{cases} \quad (3)$$

où  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $f \in L^2(]0, 1[)$ . On considère l'espace vectoriel

$$H_D^1(]0, 1[) = \{v \in H^1(]0, 1[), v(0) = 0\}.$$

1. Écrire la formulation faible correspondant à (6) dans  $H_D^1(]0, 1[)$
2. Montrer qu'il existe une solution faible unique  $u \in H_D^1(]0, 1[)$  et estimer la solution.

**Exercice 4 :**

On considère le problème de Neumann suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{dans } ]0, 1[, \\ u'(0) = \alpha, u'(1) = \beta, \end{cases} \quad (4)$$

où  $c \in L^\infty(I)$  satisfait  $c(x) \geq c_0 > 0$  p.t.  $x \in I$ ,  $f \in L^2(I)$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

1. Écrire la formulation faible correspondant à (4) dans  $H^1(]0, 1[)$
2. Montrer qu'il existe une solution faible unique  $u \in H^1(]0, 1[)$  et estimer la solution.
3. Montrer que  $u \in H^2(]0, 1[)$ .

**Exercice 5 :**

Soit  $f \in L^2(]0, 1[)$  et  $k \in \mathbb{R}$ . On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{dans } ]0, 1[, \\ u'(0) - ku(0) = 0, u(1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

1. On considère l'espace

$$H = \{v \in H^1(]0, 1[) : v(1) = 0\},$$

et on définit l'application linéaire  $\phi : H^1(]0, 1[) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $v \mapsto v(1)$ .

- (a) Montrer que  $\phi$  est bien définie et continue.
- (b) Vérifier que  $H = \phi^{-1}(\{0\})$  et en déduire que  $H$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H^1(]0, 1[)$ .
- (c) Conclure que  $H$  est un espace de Hilbert.

2. Donner une formulation faible du problème (6) dans l'espace  $H$ .
3. Montrer que, pour  $k \geq 0$ , le problème (6) admet une solution faible unique  $u \in H$  et estimer la solution.
4. Montrer que  $u \in H^2(]0, 1[)$  et que  $u$  est une solution forte du problème (6).

**Exercice 6 :**

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{dans } ]0, 1[, \\ u(0) = u(1), u'(0) = u'(1), \end{cases} \quad (6)$$

où  $b \in H_0^1(]0, 1[)$  et  $c \in L^\infty(]0, 1[)$  des fonctions telles que  $c - \frac{1}{2}b' \geq 1$  p.p. et  $f \in L^2(]0, 1[)$ .

1. On considère l'espace

$$H = \{v \in H^1(]0, 1[) : v(0) = v(1)\}.$$

Montrer que  $H$  est un espace de Hilbert.

2. Donner une formulation faible du problème (6) dans l'espace  $H$ .
3. Montrer que le problème (6) admet une solution faible unique  $u \in H$  et estimer la solution.
4. Montrer que  $u \in H^2(]0, 1[)$  et que  $u$  est une solution forte du problème (6).