Les méthodes numériques pour l'optimisation avec contraintes

Dualité Lagrangienne

Trouver une solution d'un problème d'optimisation sous contraintes fonctionnelles consiste à déterminer un point optimal x^* et des multiplicateurs associés (λ^*, μ^*). Deux grandes familles de méthodes peuvent être définies pour la résolution des problèmes d'optimisation sous contraintes : les méthodes primales et les méthodes duales. Les approches primales se concentrent sur la détermination du point x^*, les multiplicateurs (λ, μ) ne servant souvent qu'à vérifier l'optimalité de x^* Les méthodes duales quant à elles mettent l'accent sur la recherche d'un multiplicateur en travaillant sur un problème d'optimisation déduit du problème initial par *dualité*.

Dualité Lagrangienne

1. Problème primal, problème dual

Problème primal (P): minimiser $f(x)$ sous les contraintes $g(x) \le 0$, $h(x) = 0$, $x \in X \subseteq R^n$

où $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$

X est une partie quelconque de R^n. Par exemple: R^n, un ensemble discret (nombres entiers naturels par exemple), ou encore un ensemble défini par des contraintes d'inégalité ou d'égalité autres que g et h.

Dualité Lagrangienne

A partir de (P) on définit un autre problème: le problème dual.

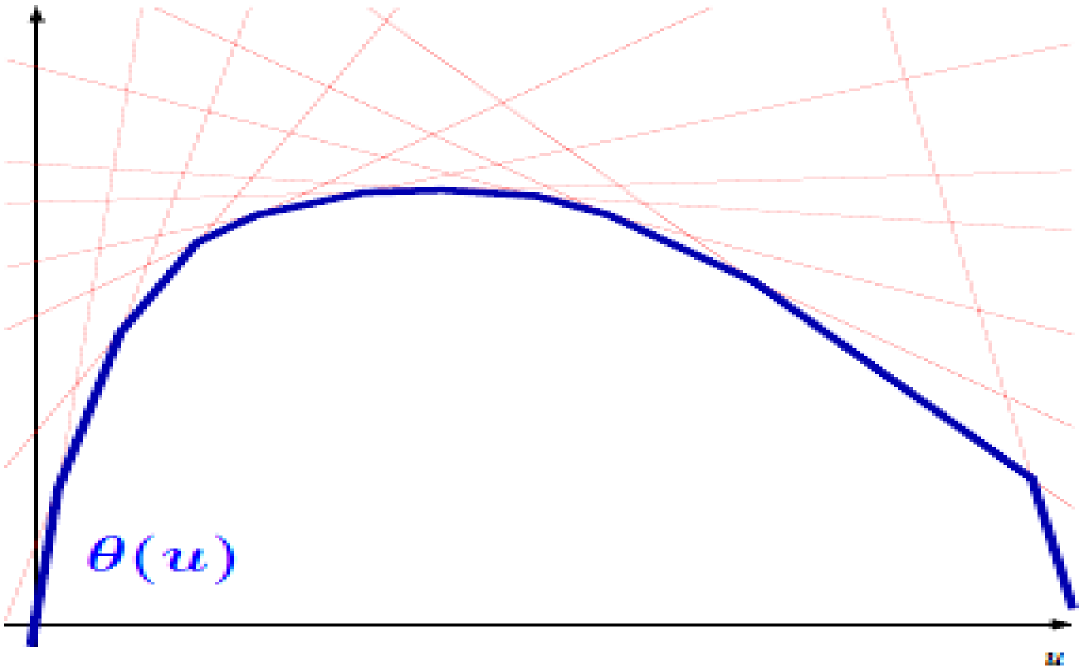
Problème dual (D): maximiser $\theta(u,v) = \inf\left\{ f(x) + u \bullet g(x) + v \bullet h(x) : x \in X \right\}$ sous les contraintes $u \geq 0$

$L(x,u,v) = f(x) + u \bullet g(x) + v \bullet h(x)$ est appelée fonction de Lagrange

$\theta(u,v) = \inf_{x \in X} L(x,u,v)$ est appelée fonction duale

Dualité Lagrangienne

- La fonction θ est linéaire par morceaux et concave sur un domaine X* convexe.



Dualité Lagrangienne

2. Relation entre primal et dual

Théorème de dualité (faible)
Si x est une solution réalisable de (P) et si (u,v) est une solution réalisable de (D) alors $f(x) \geq \theta(u,v)$.

Corollaire
Si x est une solution réalisable de (P) et si (u,v) est une solution réalisable de (D) telles que $f(x) = \theta(u,v)$ alors x est une solution (optimale) de (P) et (u,v) est une solution (optimale) de (D)

Dualité Lagrangienne

3. Points selles

3.1. définition

Soient $x^* \in X$, $u^* \geq 0$. $\left(x^*, u^*, v^*\right)$ est un point selle ssi:

$$L(x^*, u, v) \leq L(x^*, u^*, v^*) \leq L(x, u^*, v^*) \quad \forall x \in X, \ \forall u \geq 0$$

3.2. Caractérisation des points selles

Soient $x^* \in X$, $u^* \geq 0$. $\left(x^*, u^*, v^*\right)$ est un point selle ssi $\begin{cases} 1) \ L(x^*, u^*, v^*) = \inf\limits_{x \in X} L(x, u^*, v^*) \\ 2) \ g(x^*) \leq 0, \ h(x^*) = 0 \\ 3) \ u_i^* g_i(x^*) = 0 \ \ i = 1, \ldots, m \end{cases}$

Dualité Lagrangienne

3.3. théorème de dualité (fort)

Si $\left(x^*,u^*,v^*\right)$ est un point selle alors x^* est une solution (optimale) de (P) et (u^*,v^*) est une solution (optimale) de (D)

En effet x^* est une solution réalisable de (P) en raison de la caractéristique 2). De plus les caractéristiques 2), 3) et 1) permettent d'établir les égalités suivantes:

$$f(x^*) = f(x^*) + u^* \bullet g(x^*) + v^* \bullet h(x^*) = L(x^*,u^*,v^*) = \inf_{x\in X} L(x,u^*,v^*) = \theta\left(u^*,v^*\right)$$

La conclusion découle du corollaire du théorème de la dualité faible.

Dualité Lagrangienne

4. Relations entre optimums du dual et du primal et point selle

théorème

Soit $(\bar{u}, \bar{v})$ une solution (optimale) de (D). Si la fonction de Lagrange admet un point selle alors il existe x^* une solution (optimale) de (P) telle que $\left(x^*, \bar{u}, \bar{v}\right)$ soit un point selle.

corollaire

Soit $(\bar{u}, \bar{v})$ une solution (optimale) de (D). Si la fonction de Lagrange admet un point selle et si $L(x, \bar{u}, \bar{v})$ admet un minimum unique $\bar{x}$ sur X alors $\bar{x}$ est solution (optimale) de (P).

Dualité Lagrangienne

5. Relation entre points selles et conditions de Kuhn et Tucker

On suppose ici $X=R^n$

Si $\left(x^*, u^*, v^*\right)$ est un point selle alors il vérifie les conditions de Kuhn et Tucker.

En effet $L(x, u^*, v^*)$ admet un minimum en x^* et donc $\nabla L(x^*, u^*, v^*) = 0$. Ce qui donne les conditions de Kuhn et Tucker.

Dualité Lagrangienne

Exemple: soit (P) minimiser $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ sous les contraintes $\begin{cases} x_1+x_2\geq 1 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0 \end{cases}$

On met les contraintes sous la forme $\begin{cases} g_1(x_1,x_2)=-x_1-x_2+1\leq 0 \\ g_2(x_1,x_2)=-x_1\leq 0 \\ g_3(x_1,x_2)=-x_2\leq 0 \end{cases}$

Ici $X=R^n$.

La fonction de Lagrange est $L(x,u)=x_1^2+x_2^2+u_1(-x_1-x_2+1)+u_2(-x_1)+u_3(-x_2)$

La fonction duale est $\theta(u)=\inf\left\{L(x,u):\ x\in R^n\right\}$

Dualité Lagrangienne

Explicitons la fonction duale. Pour cela cherchons un point critique de $L(x,u)$ (u constant):

$$\begin{cases} 2x_1 - u_1 - u_2 = 0 \\ 2x_2 - u_1 - u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{u_1+u_2}{2} \\ x_2 = \dfrac{u_1+u_3}{2} \end{cases}$$

On en déduit: $\theta(u) = -\dfrac{u_1^2}{2} - \dfrac{u_2^2}{4} - \dfrac{u_3^2}{4} - \dfrac{u_1 u_2}{2} - \dfrac{u_1 u_3}{2} + u_1$

On remarque que $\theta(u)$ est bien concave (on vérifie que son hessien est défini négatif).

Le problème dual (D) est: maximiser $\theta(u)$ sous les contraintes $u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0$

Résolvons le problème dual. Pour cela réécrivons (D) en un problème (D') de type minimiser:

Dualité Lagrangienne

minimiser $\frac{u_1^2}{2}+\frac{u_2^2}{4}+\frac{u_3^2}{4}+\frac{u_1u_2}{2}+\frac{u_1u_3}{2}-u_1$ sous les contraintes $-u_1\leq 0,\ -u_2\leq 0,\ -u_3\leq 0$

Ecrivons les conditions de Kuhn et Tucker:

$$\begin{cases} u_1+\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{2}-1-\lambda_1=0 \\ \frac{u_2}{2}+\frac{u_1}{2}-\lambda_2=0 \\ \frac{u_3}{2}+\frac{u_1}{2}-\lambda_3=0 \\ \\ \lambda_i\geq 0 \quad (i=1,2,3) \\ \lambda_i u_i=0 \quad (i=1,2,3) \end{cases}$$

Ce système admet une solution telle que (u_1,u_2,u_3) vérifie les contraintes de (D):

$\lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{2},\ u_1=1,\ u_2=u_3=0.$

Dualité Lagrangienne

Les hypothèses de qualification sont satisfaites puisque les conditions de l'indépendance linéaire sont satisfaites.

Le problème (D') vérifiant par ailleurs les conditions de convexité, les conditions de Kuhn-Tucker sont suffisantes et le point $(1,0,0)$ est minimum (global) donc maximum (global) pour (D).

$\inf\left\{L\left(x,(1,0,0)\right) : x \in R^n\right\}$ est atteint par le point $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Il est unique donc c'est la solution de (P) (les hypothèses de convexité et de superconsistence étant vérifiées on sait que la fonction de Lagrange admet un point selle).

Remarquons que $\theta(1,0,0) = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et que $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 0$ vérifient les conditions de Kuhn-Tucker de (P).

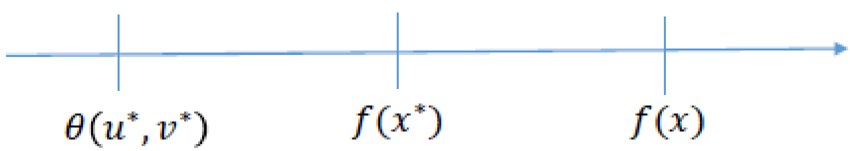
Saut de dualité

Saut de dualité

- Il n'y a pas toujours un point selle
- Il y a des cas où $f(x^*) > \theta(u^*, v^*)$
  où x* solution optimale de (P) et (u*,v*) solution optimale de (D)
- Ceci arrive notamment dans les problèmes (P) en variables entières
- On parle dans ce cas de saut de dualité

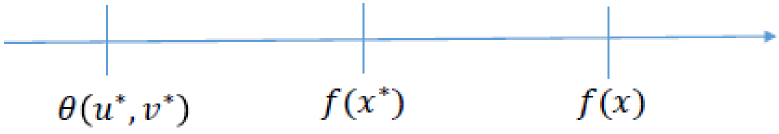
Saut de dualité - Minorant

- Dans le cas de saut de dualité, la valeur du problème dual est un minorant de la valeur optimale de (P) et elle permet d'évaluer la qualité de solution x « approchée » de (P)



Saut de dualité - Minorant

- Dans le cas de saut de dualité, la valeur du problème dual est un minorant de la valeur optimale de (P) et elle permet d'évaluer la qualité de solution x « approchée » de (P)



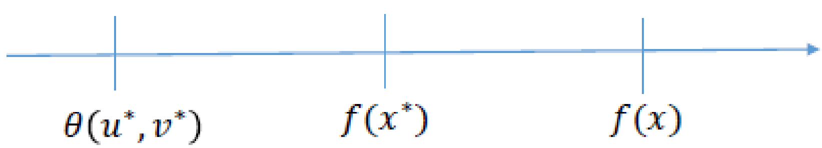
<u>Exemple</u>

On a trouvé x une solution réalisable de (P) t.q. $f(x) = 50$

Quelle la qualité de cette solution ? ? ?

Saut de dualité - Minorant

- Dans le cas de saut de dualité la valeur du problème dual est un minorant de la valeur optimale de (P) et elle permet d'évaluer la qualité de solution x « approchée » de (P)



<u>Exemple</u>

On a trouvé x une solution réalisable de (P) t.q. $f(x) = 50$

Quelle la qualité de cette solution ?

Supposons $\theta(u^*, v^*) = 47{,}5$

Dans ce cas on voit que notre solution x n'est pas très éloignée de l'optimum

Méthodes de résolution

6. Résolution du problème dual

6.1. Algorithme de sous-gradient (Algorithme d'Uzawa)

6.1.1. Sous-gradient de la fonction duale

Notons: $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \beta(x) = \begin{pmatrix} g(x) \\ h(x) \end{pmatrix},\ X(w) = \{x \in X:\ f(x) + w \bullet \beta(x) = \theta(w)\}.$

- $\beta(x)=\nabla\theta(w)$ est le sous gradient de la fonction duale $\theta(w)$

- Théorème: si $\theta(w)$ est différentiable en w solution (optimale) du problème dual et si $x \in X(w) \neq \emptyset$ alors (x, w) est un point selle.

6.1.2. Maximisation de la fonction duale

On cherche ici à résoudre le problème dual c'est-à-dire maximiser la fonction duale sous la contrainte que certaines des variables doivent être positives ou nulles. La simplicité de ces contraintes fait que l'on peut adapter l'algorithme de plus forte pente utilisé dans le cas de l'optimisation sans contraintes. La différence est qu'on utilise un sous-gradient à la place du gradient et que l'on interdit les déplacements qui rendraient négatives des variables astreintes à être positives ou nulles.

Algorithme de sous-gradient (Algorithme d'Uzawa)

On se donne une suite de nombres réels $\rho^{(k)} > 0$.

Soit $w^{(0)} = \begin{pmatrix} u^{(0)} \\ v^{(0)} \end{pmatrix}$ avec $u^{(0)} \geq 0$, k=0.

1) résoudre le problème $\min\limits_{x \in X} f(x) + w^{(k)} \bullet \beta(x)$: soit $x^{(k)}$ une solution.

$$w^{k+1} = w^{k} + \rho^{k} \beta\left(x^{k}\right)$$

Avec

$$u_i^{k+1} = \begin{cases} u_i^{k+1} & \text{si } u_i^{k+1} \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

si $w^{(k+1)} = w^{(k)}$ alors STOP

sinon k=k+1 et aller en 1)

Algorithme de sous-gradient (Algorithme d'Uzawa)

Les choix possibles de $\rho^{(k)}$ sont:

- constant $\rho^{(k)} = \rho \ \forall k$

- la série divergente $\rho^{(k)} \to 0, \sum_k \rho^{(k)} = +\infty$

Théorème

Dans le cas de la minimisation d'une fonction quadratique $f(x) = \frac{1}{2} x \bullet Ax - b \bullet x$ (A définie positive) sous des contraintes d'inégalité affines $Dx - d \leq 0$ (D de rang m) et $X = R^n$, dans le cas du choix $\rho^{(k)} = \rho \ \forall k$, si $\rho \in \left]0, \frac{\lambda_{\min}(A)}{\|D\|^2}\right[$ ($\lambda_{\min}(A)$ est la plus petite valeur propre de A) alors la suite $\left(x^{(k)}, w^{(k)}\right)$ converge vers $\left(x^*, w^*\right)$ un point selle.

Algorithme de sous-gradient (Algorithme d'Uzawa)

- Le pas de déplacement peut être choisi aussi comme suit:

$$\rho^k = \delta^k \frac{\left(z - \theta(w^k)\right)}{\left\|\beta(x^k)\right\|^2}$$

Où z est la valeur de l'objectif de la meilleur solution réalisable obtenu pour le primal (P), δ_k est un nombre choisi entre 0 et 2, puis δ_k est réduit par un facteur de 2 chaque fois que $\theta(w^k)$ n'est pas améliorée après un certain nombre d'itérations.

Algorithme de sous-gradient (Algorithme d'Uzawa)

Exemple: appliquons l'algorithme d'Uzawa au dual du problème minimiser $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

sous les contraintes $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ en partant de $u^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec le pas constant $\rho = 1$.

On pose: $g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \\ g_3(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 + 1 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$.

itération 1

On minimise $x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 \quad (x_1, x_2) \in R^2$. La fonction étant convexe et soumise à aucune contrainte, il suffit de chercher un point critique: $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$. Ce qui donne $\theta(0,1,1) = -\frac{1}{2}$

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Algorithme de sous-gradient (Algorithme d'Uzawa)

itération 2

On minimise $x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \quad (x_1, x_2) \in R^2$. La solution est $x_1 = x_2 = \frac{1}{4}$. Ce qui donne

$$\theta\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

$$u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Algorithme de sous-gradient (Algorithme d'Uzawa)

itération 3

On minimise $x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2 + \frac{1}{2}$ $(x_1, x_2) \in R^2$. La solution est $x_1 = x_2 = \frac{3}{8}$. Ce qui donne

$\theta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{32}$

$u^{(2)} + g\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$. En projetant sur $K = \left(R^+\right)^3$ on obtient: $u^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Algorithme de sous-gradient (Algorithme d'Uzawa)

itération 4

On minimise $x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{4}$ $(x_1, x_2) \in R^2$. La solution est $x_1 = x_2 = \frac{3}{8}$. Ce qui donne

$\theta\left(\frac{3}{4}, 0, 0\right) = \frac{15}{32}$

$u^{(3)} + g\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$. En projetant on obtient: $u^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Algorithme de sous-gradient (Algorithme d'Uzawa)

itération 5

On minimise $x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 + 1 \ \ (x_1, x_2) \in R^2$. La solution est $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$. Ce qui donne

$\theta(1,0,0) = \frac{1}{2}$

$u^{(4)} + g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. En projetant on obtient: $u^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$u^{(5)} = u^{(4)}$ donc on arrête.

Algorithme de sous-gradient (Algorithme d'Uzawa)

Vérifions que $\left(x^*, u^*\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0\right)$ est un point selle:

- les relations de complémentarités 3) sont vérifiées: $u^* \bullet g\,(x^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$

- la condition 2) (x^* réalisable) est vérifiée: $g(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \leq 0$

- la condition 1) (x^* minimise la fonction de Lagrange $L(x, u^*)$ en u^*) est vérifiée par définition de x^*.

Algorithme des plans sécants

6.2. Méthode des plans sécants

Le problème dual (D) peut s'écrire:

maximiser z

$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} z \le f(x) + u \bullet g(x) + v \bullet h(x) \text{ pour tout } x \in X \\ u \ge 0 \end{cases}$$

En effet, pour u, v fixés, si z est maximum alors $z = \inf\{f(x) + u \bullet g(x) + v \bullet h(x) : x \in X\} = \theta(u,v)$. Donc le problème ci-dessus revient à maximiser la fonction duale $\theta(u,v)$ sous les conditions $u \geq 0$ soit au problème dual.

Ce problème est un problème linéaire (en les variables z, u, v) qui comporte autant de contraintes (en dehors des contraintes $u \geq 0$) qu'il y a d'éléments dans X (en particulier cardinal de X peut être infini).

Algorithme des plans sécants

C'est pourquoi à la place de (D), on résout une relaxation de (D) où seulement quelques contraintes sont prises en compte. Si la solution obtenue vérifie toutes les contraintes c'est fini sinon on rajoute une contrainte non vérifiée et on réitère.

Résoudre le problème dual – Algorithme des plans sécants

Le problème dual (D) peut s'écrire:

maximiser z

$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} z \le f(x) + u \bullet g(x) + v \bullet h(x) \ \text{ pour tout } x \in X \\ u \ge 0 \end{cases}$$

Il y a autant de contraintes que d'éléments dans X ce qui peut être énorme .
Mais toutes ne seront pas utiles. Donc on introduit les contraintes petit-à-petit.

Algorithme des plans sécants

algorithme:

soit $X^{(0)}$ contenant quelques éléments de X, $k \leftarrow 0$.

(1) on résout le problème maître:

maximiser z

sous les contraintes $\begin{cases} z \leq f(x) + u \bullet g(x) + v \bullet h(x) & \text{pour tout } x \in X^{(k)} \\ u \geq 0 \end{cases}$

Soit $z^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}$ une solution. Pour tester si cette solution vérifie toutes les contraintes de (D),

on résout le sous-problème: $z^* = \min_{x \in X} \left\{ f(x) + u^{(k)} \bullet g(x) + v^{(k)} \bullet h(x) \right\}$

Si $z^{(k)} \leq z^*$

alors STOP (on a résolu (D))

sinon

soit $x^{(k)}$ une solution du sous-problème

$X^{(k+1)} \leftarrow X^{(k)} + \left\{ x^{(k)} \right\}$ (on rajoute une contrainte au problème maître)

$k \leftarrow k + 1$ et aller en (1)

Algorithme des plans sécants

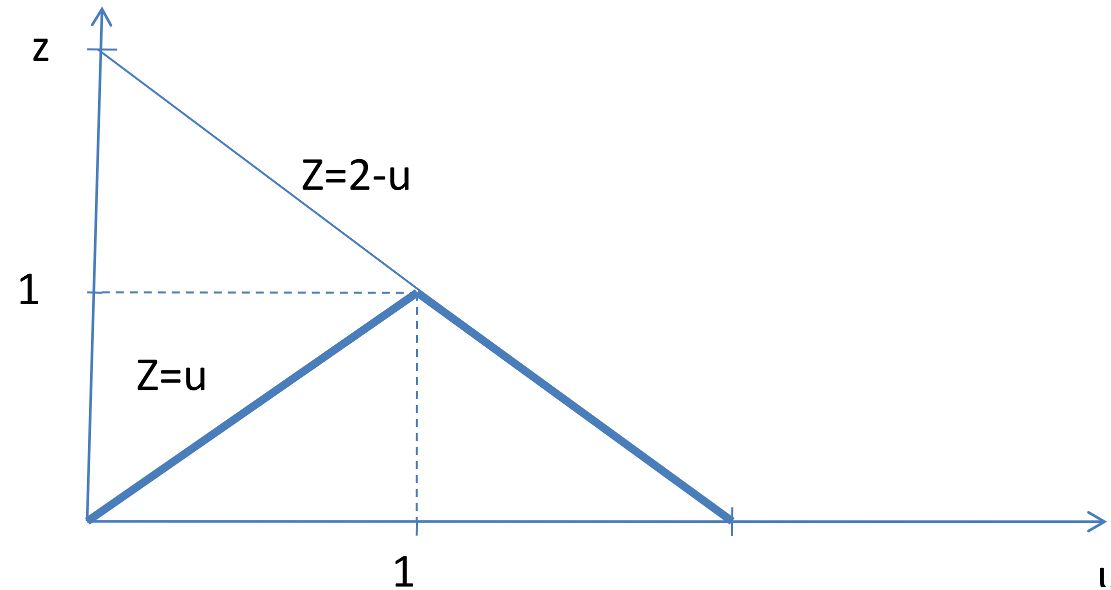
Exemple: appliquons l'algorithme des plans sécants au dual du problème minimiser $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ sous les contraintes $\begin{cases} g_1(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 + 1 \leq 0 \\ (x_1, x_2) \in X = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\} \end{cases}$

Partons avec $X^{(0)} = \{(0,0), (1,1)\}$.

itération k=0:

Le problème maître est: maximiser z s.c. $\begin{cases} z \leq u_1 \\ z \leq 2 - u_1 \\ u_1 \geq 0 \end{cases}$

Algorithme des plans sécants



La solution est $z^{(0)} = 1, u_1^{(0)} = 1.$

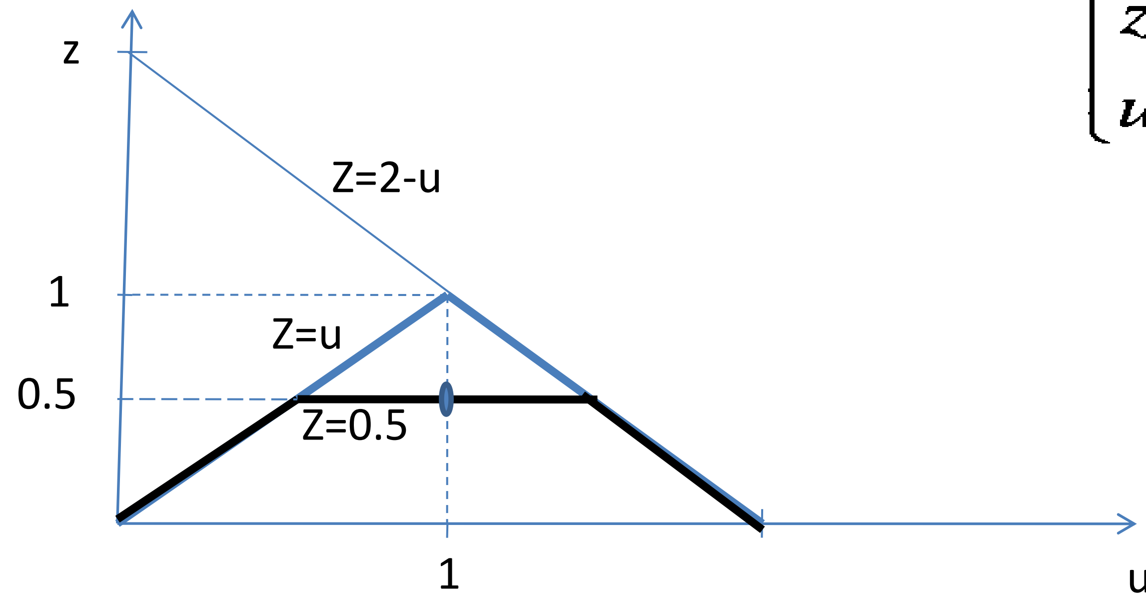
Le sous-problème est: $z^* = \min_{x \in X} \left\{ x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 + 1 \right\} = \frac{1}{2}$

La solution est $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \frac{1}{2}$. $z^{(0)} > z^*$ donc on rajoute au problème maître, la contrainte engendrée par $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \frac{1}{2}$ i.e. $X^{(1)} = \left\{ (0,0), (1,1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$.

Algorithme des plans sécants

itération $k=1$:

Le problème maître est: maximiser z s.c. $\begin{cases} z \leq u_1 \\ z \leq 2-u_1 \\ z \leq \frac{1}{2} \\ u_1 \geq 0 \end{cases}$



$z^{(1)}=\frac{1}{2}, u_1^{(1)}=1$ est une solution.

Le sous-problème est: $z^* = \min_{x \in X} \left\{ x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 + 1 \right\} = \frac{1}{2}$

$z^{(1)} \leq z^*$ donc on arrête. L'optimum du dual vaut $\frac{1}{2}$ et est atteint pour $u_1 = 1$.

Algorithme des plans sécants

Exercice 2 : Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Min } (16x_1+10x_2+4x_4)$$

$$\text{s. c. : } 8x_1+2x_2+x_3+4x_4 \geq 10$$

$$x_1+x_2 \geq 1$$

$$x_3+x_4 \geq 1$$

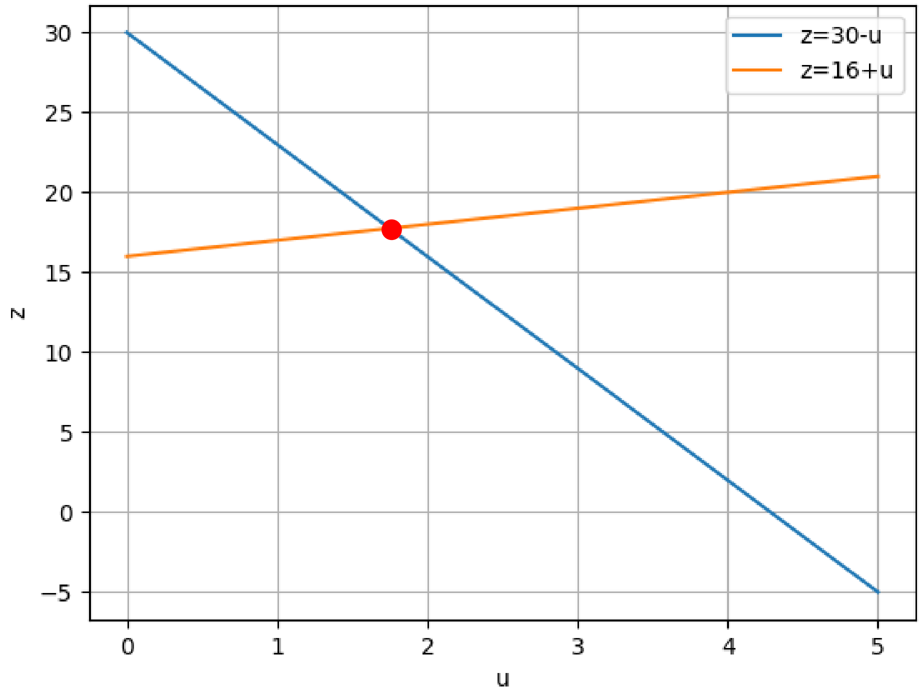
$$x_i \in \{0,1\}$$

1. Résoudre ce problème en utilisant la méthode des plans coupant avec $X^0=\{ (1,1,1,1), (1,0, 1,0) \}$
2. En utilisant la méthode des sous gradient avec
   I. un pas $\rho_k= 1/2^{(k+3)}$ (k=0,1,.. .) et $\lambda^{(0)} =0$

$$Min\ 16x_1 + 10x_2 + 4x_4 \qquad X^0 = \{\,(1,1,1,1),(1,0,1,0)\}$$

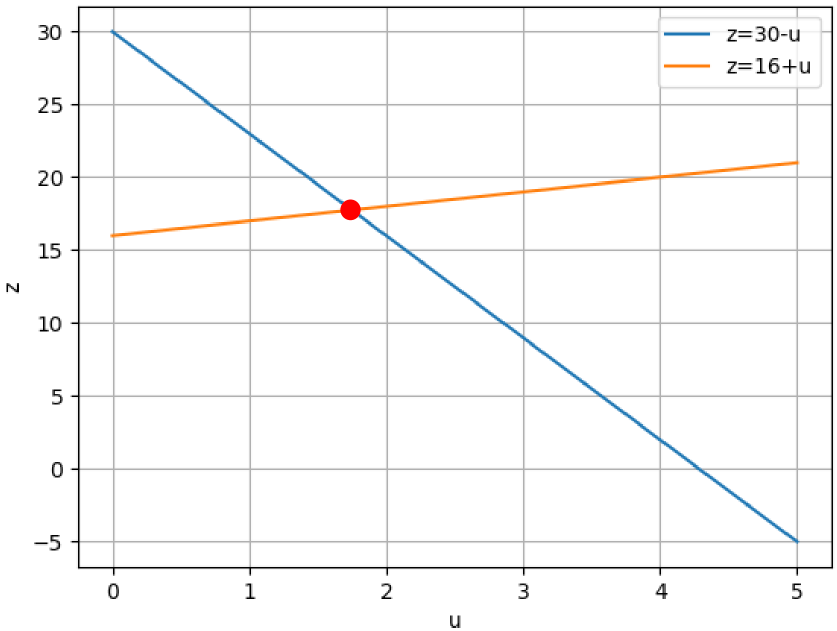
$$\begin{cases} -8x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 10 \le 0 \\ -x_1 - x_2 + 1 \le 0 \\ -x_3 - x_4 + 1 \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max\ z \\ z \le f(x) + ug(x) \\ u \ge 0 \end{cases} \quad pour\ tout\ x \in X^0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z \le 30 - 7u \\ z \le 16 + u \\ u \ge 0 \end{cases}$$



$$30 - 7u = 16 + u \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{u^0} = \frac{14}{8} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}} \quad \Rightarrow \boldsymbol{z^0} = \frac{\mathbf{71}}{\mathbf{4}}$$



$$\boldsymbol{u^0 = \frac{14}{8} = \frac{7}{4} \Rightarrow z^0 = \frac{71}{4}}$$

$$z^* = Min\,\{16x_1 + 10x_2 + 4x_4 + \frac{7}{4}(-9x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 + 12)\} \quad \Rightarrow$$

$$z^* = Min\,\{\frac{64}{4}x_1 + \frac{40}{4}x_2 + \frac{16}{4}x_4 - \frac{63}{4}x_1 - \frac{21}{4}x_2 - \frac{14}{4}x_3 - \frac{35}{4}x_4 + \frac{84}{4}\} \Rightarrow$$

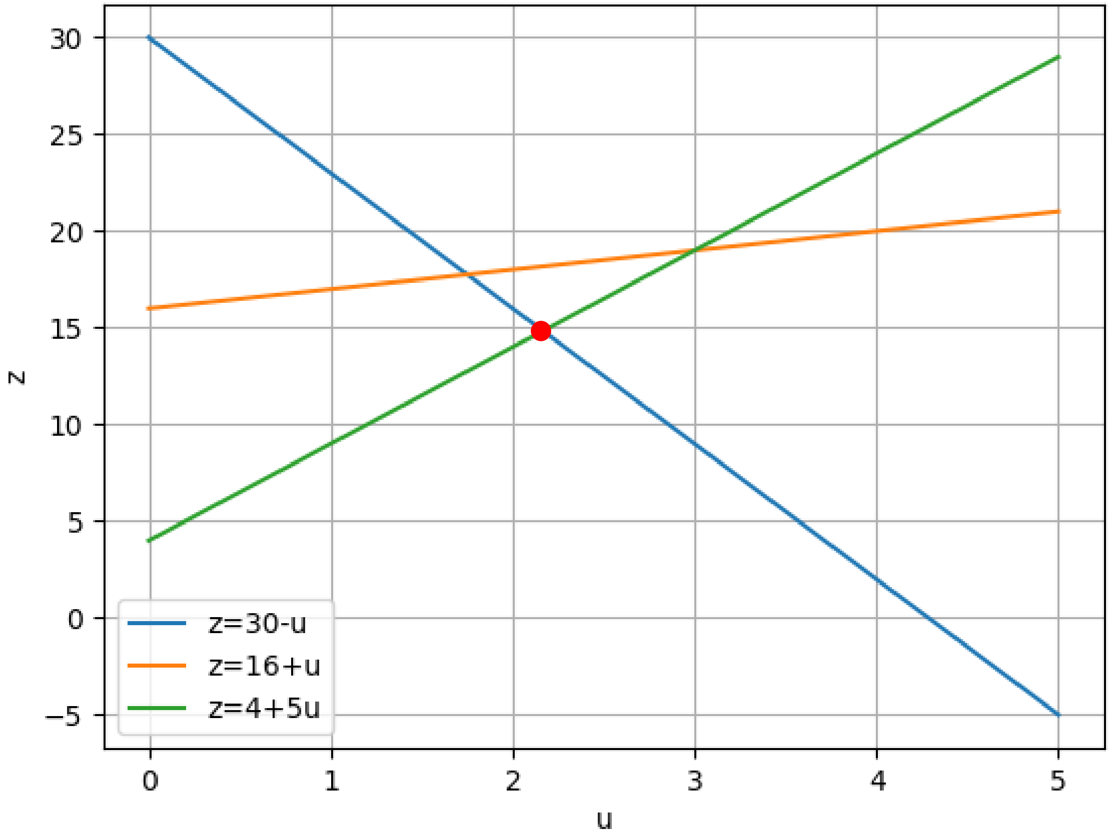
$$z^* = Min\,\left\{\frac{1}{4}x_1 + \frac{19}{4}x_2 - \frac{14}{4}x_3 - \frac{19}{4}x_4 + \frac{84}{4}\right\} \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_1{}^0 = x_2{}^0 = 0, \qquad x_3{}^0 = x_4{}^0 = 1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{z^* = \frac{51}{4}} \qquad \boldsymbol{z^0 > z^*\ alors\ continue} \qquad \Rightarrow X^1 = \{\,(1,1,1,1), (1,0,1,0), (0,0,1,1)\}$$

$X^1 = \{ (1,1,1,1), (1,0,1,0),(0,0,1,1)\}$

$$Min\ 16x_1 + 10x_2 + 4x_4$$

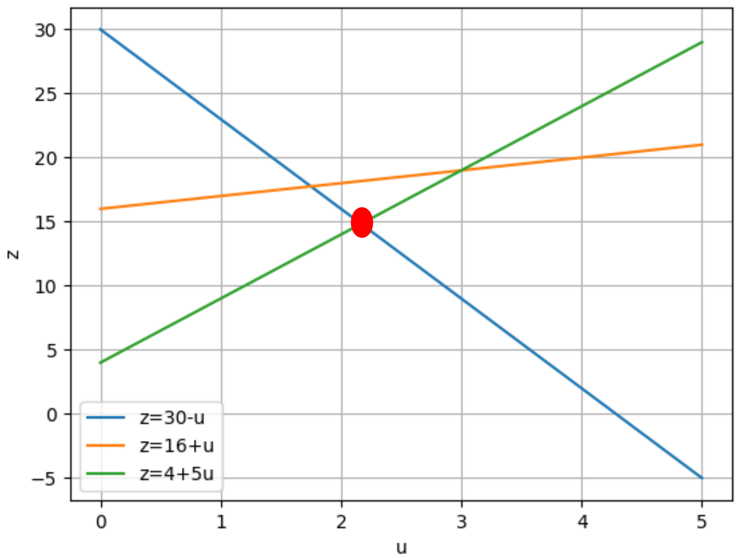
$$\begin{cases} -8x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 10 \ \leq 0 \\ -x_1 - x_2 + 1 \leq 0 \\ -x_3 - x_4 + 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \leq 30 - 7u \\ z \leq 16 + u \\ z \leq 4 + 5u \\ u \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



$$30 - 7u = 4 + 5u \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{u^1} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{z^1 = \frac{89}{6} = 14{,}83}$$



$$\boldsymbol{u^1} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6} = 2{,}16 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{z^1 = \frac{89}{6} = 14,83}$$

$$z^* = Min\,\{16x_1 + 10x_2 + 4x_4 + \frac{13}{6}(-9x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 + 12)\} \quad \Rightarrow$$

$$z^* = Min\,\{\frac{96}{6}x_1 + \frac{60}{6}x_2 + \frac{24}{6}x_4 - \frac{117}{6}x_1 - \frac{39}{6}x_2 - \frac{26}{6}x_3 - \frac{65}{6}x_4 + \frac{156}{6}\} \Rightarrow$$

$$z^* = Min\,\left\{-\frac{21}{6}x_1 + \frac{21}{6}x_2 - \frac{26}{6}x_3 - \frac{41}{6}x_4 + \frac{156}{6}\right\} \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_1{}^1 = 1, x_2{}^1 = 0, x_3{}^1 = x_4{}^1 = 1}$$

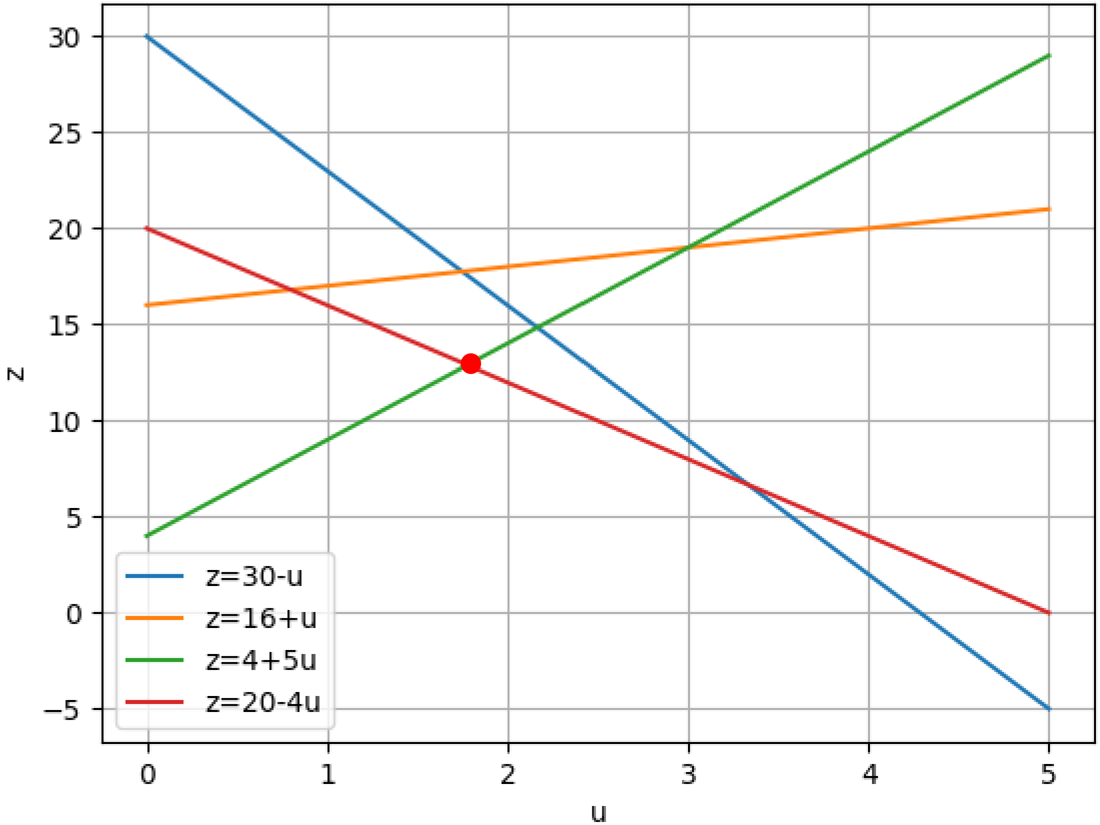
$$\Rightarrow \boldsymbol{z^* = \frac{68}{6} = 11,33} \quad \boldsymbol{z^1 \;\; > z^*\; alors\; continue}$$

$$\Rightarrow X^2 = \{\,(1,1,1,1),\,(1,0,1,0),(0,0,1,1),\,(1,0,1,1)\}$$

$\Rightarrow X^2 = \{ (1,1,1,1), (1,0,1,0),(0,0,1,1), (1,0,1,1)\}$

$$Min\ 16x_1 + 10x_2 + 4x_4$$

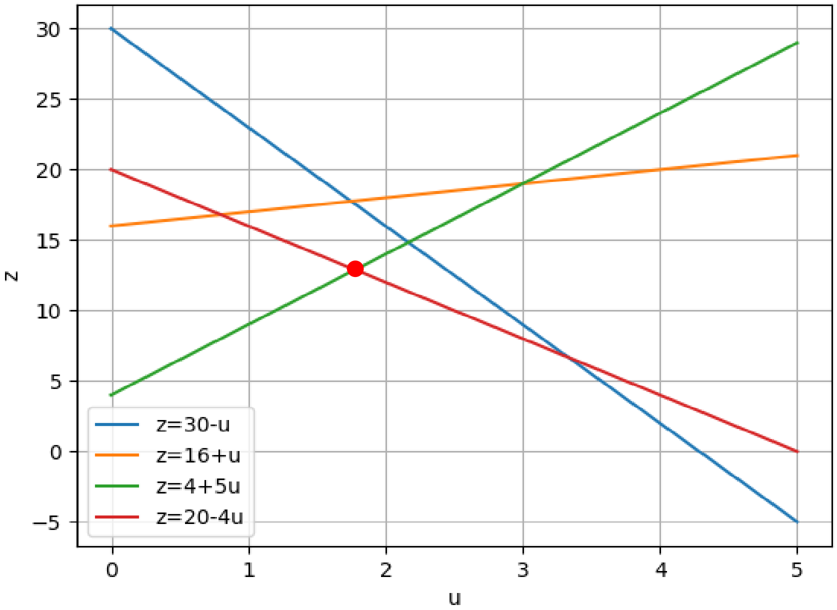
$$\begin{cases} -8x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 10 \leq 0 \\ -x_1 - x_2 + 1 \leq 0 \\ -x_3 - x_4 + 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \leq 30 - 7u \\ z \leq 16 + u \\ z \leq 4 + 5u \\ z \leq 20 - 4u \\ u \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



$20 - 4u = 4 + 5u \quad \Rightarrow$

$$\boldsymbol{u^2 = \frac{16}{9} = 1,77} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{z^2 = \frac{116}{9} = 12,88}$$



$$20 - 4u = 4 + 5u \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{u^2 = \frac{16}{9} = 1,77} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{z^2 = \frac{116}{9} = 12,88}$$

$$z^* = Min\,\{16x_1 + 10x_2 + 4x_4 + \frac{16}{9}(-9x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 + 12)\} \quad \Rightarrow$$

$$z^* = Min\,\{\frac{256}{9}x_1 + \frac{90}{9}x_2 + \frac{36}{9}x_4 - \frac{144}{9}x_1 - \frac{48}{9}x_2 - \frac{32}{9}x_3 - \frac{80}{9}x_4 + \frac{192}{9}\} \Rightarrow$$

$$z^* = Min\,\left\{\frac{112}{9}x_1 + \frac{42}{9}x_2 - \frac{32}{9}x_3 - \frac{44}{9}x_4 + \frac{192}{9}\right\} \Rightarrow \quad \boldsymbol{{x_1}^2 = {x_2}^2 = 0, {x_3}^2 = {x_4}^2 = 1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{z^* = \frac{116}{9} = 12,88 \;\; z^2 = z^* \; alors \;\; on \; stop}$$

Algorithme de sous-gradient (Algorithme d'Uzawa)

$$Min\ 16x_1 + 10x_2 + 4x_4$$

$$\begin{cases} -8x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 10 \leq 0 \\ -x_1 - x_2 + 1 \leq 0 \\ -x_3 - x_4 + 1 \leq 0 \end{cases}$$

<u>Itération 0</u>

$$p^0 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \qquad \lambda^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$calcule\ \min 16x_1 + 10x_2 + 4x_4 \qquad \min = 0, et\ la\ solution\ est\ (0,0,1,0)$$

$$\lambda^1 = \lambda^0 + p^0 \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{1}{8} \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Itération 1</u>

$$p^1 = \frac{1}{2^{3+1}} = \frac{1}{16}$$

$$calcule\ \min \frac{55}{8}x_1 + \frac{61}{8}x_2 - \frac{9}{8}x_3 - \frac{4}{8}x_4 + \frac{91}{8} \qquad \min = 78, et\ la\ solution\ est\ (0,0,1,1)$$

Algorithme de sous-gradient (Algorithme d'Uzawa)

$$\lambda^2 = \lambda^1 + p^1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{1}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{-1}{16} \end{pmatrix}$$

<u>Itération 2</u>

.

.

.