

Chapitre 1

Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev¹ sont des espaces fonctionnels, c'est-à-dire des espaces dont les éléments sont des fonctions, et ces fonctions sont telles que leurs puissances et les puissances de leurs dérivées (au sens de la transposition, ou au sens faible, que nous allons préciser) sont intégrables au sens de Lebesgue. Tout comme les espaces de Lebesgue, ces espaces sont des espaces de Banach². Le fait que les espaces de Sobolev sont complets est très important pour démontrer l'existence de solutions aux équations aux dérivées partielles.

1.1 Dérivées faibles

La notion de dérivée faible apparaît déjà dans un article célèbre de Jean Leray³ paru en 1934, sur les équations de Navier-Stokes ; dans cet article, elle apparaît sous le nom de "quasi-dérivée" ([7] page 205). Cette notion est fondamentale pour l'étude de l'existence des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques.

Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, et on note $C_c^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact sur Ω c'est-à-dire

$$C_c^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega); \exists K \subset \Omega, K \text{ compact}; u = 0 \text{ sur } K^c\}.$$

De plus, l'ouvert Ω sera toujours muni de la tribu de Borel (ou tribu borélienne), notée $\mathcal{B}(\Omega)$, et de la mesure de Lebesgue, notée λ si $N = 1$ et λ_N si $N > 1$. Les intégrales seront toujours par rapport à cette mesure de Lebesgue, sauf indication contraire.

Le lemme suivant est absolument fondamental, car il permet de confondre $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ avec l'application linéaire $T_f : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \mapsto T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x) dx$.

On rappelle que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ si, pour tout sous-ensemble compact K de Ω , la restriction $f|_K$ de f à K est un élément de $L^1(K)$.

Lemme 1.1 (Egalité presque partout dans L^1) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, et soient f et $g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors :

$$\left[\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_\Omega f(x)\varphi(x) dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x) dx \right] \iff [f = g \text{ p.p.}]$$

1. Sergueï Lvovitch Sobolev, (1908-1989) est un mathématicien et physicien russe.

2. Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

3. Jean Leray, 1906 -1998, est un mathématicien français ; il a travaillé sur les équations aux dérivées partielles et sur la topologie algébrique.

Démonstration : La démonstration de ce lemme utilise la régularisation d’une fonction intégrable par la convolution avec une suite de noyaux régularisants : voir [3, Exercice 8.7 page 480]. \square

On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l’espace $C_c^\infty(\Omega)$ et $\mathcal{D}^*(\Omega)$ l’ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{D}(\Omega)$: on dit que $\mathcal{D}^*(\Omega)$ est le dual algébrique de $\mathcal{D}(\Omega)$ (pour le distinguer du dual continu, qui est l’ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$, après avoir muni $\mathcal{D}(\Omega)$ d’une topologie, ce qui sera inutile pour ce cours). Si $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, le réel $T(\varphi)$ s’appelle l’“action de T sur φ ” et sera noté $\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)}$ ou $\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}$.

Le lemme 1.1 nous permet de définir la dérivée par transposition d’une fonction L_{loc}^1 de la manière suivante :

Définition 1.2 (Dérivée par transposition) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$.

- Soit $f \in L_{loc}^1(\Omega)$, on appelle dérivée par transposition de f par rapport à sa i -ème variable la forme linéaire $D_i f$ sur $C_c^\infty(\Omega)$ définie par :

$$\langle D_i f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = - \int_{\Omega} f \partial_i \varphi \, dx$$

où $\partial_i \varphi$ désigne la dérivée partielle classique de φ par rapport à sa i -ème variable. Donc $D_i f$ est un élément de $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Noter que si $f \in C^1(\Omega)$, alors $D_i f$ n’est autre que $\partial_i f$ car on confond $\partial_i f$ et $T_{\partial_i f}$ (qui est l’élément de $\mathcal{D}^*(\Omega)$ induit par $\partial_i f$). Il s’agit donc bien d’une généralisation de la notion de dérivée.

Si la forme linéaire $D_i f$ peut être confondue avec une fonction localement intégrable au sens du lemme 1.1, on dit que f admet une dérivée faible.

- Soit $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$; on définit la dérivée par transposition $D_i T$ de T par :

$$\langle D_i T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = - \langle T, \partial_i \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

La notion de dérivée au sens des distributions est un peu plus délicate à définir car elle demande la définition d’une topologie sur $C_c^\infty(\Omega)$. Nous n’en aurons pas besoin dans le cadre de ce cours.

Voici un exemple de dérivée par transposition. La fonction de Heaviside⁴, définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0, \\ 0 & \text{if } x < 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

est localement intégrable. Elle admet donc une dérivée par transposition. Pour calculer cette dérivée, notée DH , on remarque, pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on a :

$$- \int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi'(x) \, dx = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \, dx = \varphi(0),$$

et donc DH est la forme linéaire qui à φ associe sa valeur en 0, qu’on appelle aussi “mesure de Dirac en 0” : $DH = \delta_0$. Par contre, cette dérivée n’est pas une dérivée faible, car δ_0 ne peut pas être assimilée à une fonction de L_{loc}^1 , au sens où il n’existe pas de fonction $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ telle que $\delta_0(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g \varphi \, dx$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ (voir exercice 1.1).

La définition 1.2 permet de définir des dérivées par transposition d’une fonction L_{loc}^1 (ou d’un élément de $\mathcal{D}^*(\Omega)$) à tous les ordres. Par l’identification d’une fonction L_{loc}^1 avec l’élément de $\mathcal{D}^*(\Omega)$ qu’elle représente, on peut aussi définir la notion de dérivée faible à tous les ordres. Plus précisément, pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, et $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$, on définit la dérivée faible $D_1^{\alpha_1} \dots D_N^{\alpha_N} u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$, si elle existe, par

$$\int_{\mathbb{R}^N} D_1^{\alpha_1} \dots D_N^{\alpha_N} u(x) \varphi(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_N^{\alpha_N} \varphi(x) \, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ et $\partial_i^{\alpha_i} \varphi$ désigne la dérivée partielle (classique) d’ordre α_i par rapport à la i -ème variable.

4. Oliver Heaviside (1850 - 1925) physicien britannique autodidacte.

Remarque 1.3 (Convergence dans \mathcal{D}^*) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}^*(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$. On dit que $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$, quand $n \rightarrow +\infty$, si

$$\langle T_n, \phi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} \rightarrow \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} \text{ pour tout } \phi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (1.2)$$

Il s'agit donc de la convergence simple dans l'ensemble des applications de $C_c^\infty(\Omega)$ dans \mathbb{R} . Lorsque l'on s'intéresse aux distributions, on ajoute une structure topologique à l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ (non décrite dans ce polycopié) et, au lieu de travailler avec $\mathcal{D}^*(\Omega)$, on travaille avec l'espace strictement plus petit des applications linéaires continues de $C_c^\infty(\Omega)$ dans \mathbb{R} . Cet espace est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$. Toutefois, même lorsque l'on travaille avec l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$, la notion de convergence est toujours donnée par (1.2).

1.2 Définition et propriétés

Définition 1.4 (Espaces de Sobolev) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$.

1. L'espace $H^1(\Omega)$ est défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } D_i u \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, N\}.$$

Dans cette définition, lorsqu'on écrit $D_i u \in L^2(\Omega)$, on sous-entend

$$\exists g \in L^2(\Omega); \langle D_i f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = - \int_{\Omega} g \varphi \, dx, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

2. L'espace $H^m(\Omega)$: For $m \in \mathbb{N}$, we define :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega) \forall \alpha \in \mathbb{N}^N; |\alpha| \leq m\}.$$

3. L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est défini pour $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}$, par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N; |\alpha| \leq m\}.$$

4. Noter que pour $m = 0$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

On note $(\cdot | \cdot)_{L^2}$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, i.e.

$$(u | v)_{L^2} = \int_{\Omega} uv \, dx,$$

et $\|\cdot\|_{L^p}$ la norme dans $L^p(\Omega)$, i.e.

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 1.5 (Structure d'espace vectoriel) Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert lorsqu'on les munit du produit scalaire

$$(u | v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u | D^\alpha v)_{L^2}.$$

Noter que $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Une norme naturelle sur $W^{m,p}(\Omega)$ est définie par :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & \text{si } p = +\infty. \end{cases} \quad (1.3)$$

Muni de cette norme $W^{m,p}(\Omega)$ est un **espace de Banach**. On peut montrer que la norme :

$$\|u\|_{m,p} = \begin{cases} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}, & 1 \leq p < +\infty; \\ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & p = +\infty. \end{cases} \quad (1.4)$$

est une norme équivalente à la norme définie par (1.3) : ceci est une conséquence de l'équivalence entre les normes dans \mathbb{R}^q où $q = \text{card}(\{\alpha \in \mathbb{N}^N \mid |\alpha| \leq m\})$. Les deux normes sont notées indifféremment $\|\cdot\|_{m,p}$ ou $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$. L'intérêt principal de la norme (1.3) est que dans le cas $p = 2$ elle confère à H^m une structure hilbertienne, ce qui n'est pas le cas avec la norme définie par (1.4)

Remarque 1.6 (Espaces de Sobolev et continuité) En une dimension d'espace ($N = 1$), avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $1 \leq p \leq +\infty$, tout élément de $W^{1,p}(]a, b[)$ (qui est donc une classe de fonctions) peut être assimilé à une fonction continue, au sens où il existe un représentant de la classe qui est continu (ce représentant continu est unique, voir à ce propos l'exercice 1.3). Ceci tient au fait qu'en dimension 1, toute (classe de) fonction(s) de $W^{1,p}(]a, b[)$ peut s'écrire comme l'intégrale de sa dérivée.

$$u \in W^{1,p}(]a, b[) \iff \left\{ \exists \tilde{u} \in C([a, b]) \text{ et } v \in L^p(]a, b[); u = \tilde{u} \text{ p.p. et } \tilde{u}(x) = \tilde{u}(a) + \int_a^x v(s) ds \right\}.$$

En dimension strictement supérieure à 1, ceci est faux. En particulier $H^1(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$, comme le prouve l'exemple suivant : soit $\Omega = \{x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2, |x_i| < \frac{1}{2}, i = 1, 2\}$, et u la fonction définie sur Ω par $u(x) = (-\ln(|x|))^\gamma$, avec $\gamma \in]0, 1/2[$. Alors $u \in H^1(\Omega)$ mais $u \notin L^\infty(\Omega)$ (voir exercice 1.5), et donc en particulier, $u \notin C(\overline{\Omega})$.

Proposition 1.7 (Séparabilité) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < +\infty$; l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ is **espace séparable** (c'est-à-dire un espace vectoriel normé qui contient une partie dénombrable dense).

La preuve de cette proposition fait l'objet de l'exercice 1.9, où l'on montre aussi par un contre-exemple que le résultat de séparabilité n'est pas vrai pour $p = +\infty$.

La notion de séparabilité est importante, car elle permet d'approcher aussi près que l'on veut n'importe quel élément de l'espace par un élément d'une famille dénombrable : dans le cadre d'un espace de Hilbert, on peut montrer que cette propriété est équivalente à l'existence d'une base hilbertienne (voir par exemple [3, Proposition 6.62]).

Nous rappelons maintenant la notion importante d'espace réflexif.

Définition 1.8 (Espace réflexif) Soit E un espace vectoriel normé réel. On note E' son dual topologique, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues de E dans \mathbb{R} muni de sa norme naturelle (E' est un espace de Banach). Pour tout $x \in E$, on définit l'application J_x de E' dans \mathbb{R} par $J_x(T) = T(x)$ pour tout $T \in E'$. On a

$$|J_x(T)| = |T(x)| \leq \|T\|_{E'} \|x\|_E$$

et donc J_x est une forme linéaire continue sur E' , ce qu'on note $J_x \in E''$ où E'' est le bidual de E , c'est-à-dire le dual topologique de E' . On peut montrer par le théorème de Hahn-Banach qu'on rappelle dans le paragraphe suivant, que $\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$.

L'application J , définie de E dans E'' par $J(x) = J_x$ pour tout $x \in E$, est donc une isométrie linéaire de E sur son image, notée $\text{Im}(J)$, et on a évidemment $\text{Im}(J) \subset E''$.

On dit que E est un espace **réflexif** si $\text{Im}(J) = E''$, ce qui revient à dire que J est surjective.

Notons que tout espace réflexif E est forcément complet puisque le dual d'un espace vectoriel normé quelconque est toujours complet.

Proposition 1.9 (Réflexivité) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, et $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in]1, +\infty[$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace réflexif.

La preuve de ce résultat fait l'objet de l'exercice 1.10.

1.3 Rappels d'analyse fonctionnelle

Commençons par un théorème fondamental :

Théorème 1.10 (Hahn Banach) Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} et p une fonction convexe définie de E dans \mathbb{R} . Soit F un sous-espace vectoriel de E , et T une forme linéaire sur F qui vérifie $T(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Il existe alors une forme linéaire de E dans \mathbb{R} , égale à T sur F , qui prolonge T sur l'espace E tout entier, et qui vérifie encore la condition : $T(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

Le corollaire suivant est essentiel :

Corollaire 1.11 Soit E un espace normé, F un sous-espace de E et T une forme linéaire continue sur F . On peut alors prolonger T en une application continue définie sur E , de même norme que T .

Un résultat bien connu sur les espaces de dimension finie est donné dans le théorème suivant :

Théorème 1.12 (CNS sur la dimension) Un espace de Banach E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

Les notions de convergence faible et faible- \star seront fondamentales pour la suite.

Définition 1.13 (Convergence faible et faible- \star) Soit E un espace de Banach

1. **Convergence faible** Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ et $u \in E$. On dit que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans E lorsque $n \rightarrow \infty$ si $T(u_n) \rightarrow T(u)$ pour tout $T \in E'$.
2. **Convergence faible- \star** Soient $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$ et $u \in E'$. On dit que $T_n \rightarrow T$ dans E' faible- \star si $T_n(x) \rightarrow T(x)$ pour tout $x \in E$.

Théorème 1.14 (Compacité faible- \star des bornés du dual d'un espace séparable) Soit E un espace de Banach séparable, et soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E' (c'est-à-dire telle qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|T_n\|_{E'} \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Alors il existe une sous-suite, encore notée $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $T \in E'$ telle que $T_n \rightarrow T$ dans E' faible- \star .

Une application importante de ce théorème est la suivante : si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^\infty(\Omega)$, alors il existe une sous-suite encore notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $u \in L^\infty(\Omega)$ tels que $\int_\Omega u_n \varphi \, dx \rightarrow \int_\Omega u \varphi \, dx$ pour tout $\varphi \in L^1(\Omega)$. Ceci découle du fait qu'il existe une isométrie naturelle entre $L^\infty(\Omega)$ et le dual de $L^1(\Omega)$ et que $L^1(\Omega)$ est séparable.

Théorème 1.15 (Compacité faible des bornés d'un espace réflexif) Soit E un espace de Banach réflexif, et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E (c'est-à-dire telle qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ t.q. $(\|u_n\|_E \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Alors il existe une sous-suite, encore notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $u \in E$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans E faiblement.

Noter qu'un espace de Hilbert est toujours un espace de Banach réflexif.

1.4 Théorèmes de densité

Définition 1.16 (Frontière lipschitzienne) Un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^N est dit à frontière lipschitzienne s'il existe des ouverts $(\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n)$ de \mathbb{R}^N et des applications $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ telles que :

1. $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^n \Omega_i$ et $\Omega_0 \subset \Omega$.
2. $\phi_0 : \Omega_0 \rightarrow B_{1,N} = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ t.q. } \|x\| < 1\}$ est bijective et ϕ_0 et ϕ_0^{-1} sont lipschitziennes,
3. Pour tout $i \geq 1$, $\phi_i : \Omega_i \rightarrow B_{1,N}$ est bijective et ϕ_i et ϕ_i^{-1} sont lipschitziennes, et $\phi_i(\Omega_i \cap \Omega) = B_{1,N} \cap \mathbb{R}_+^N$ et $\phi_i(\Omega_i \cap \partial\Omega) = B_{1,N} \cap \{(0, y), y \in \mathbb{R}^{N-1}\}$. (Avec $\mathbb{R}_+^N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N; x \in \mathbb{R}, x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}^{N-1}\}$.)

Théorème 1.17 Soit Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 \leq p \leq +\infty$ alors :

1. Si $p < +\infty$, l'ensemble $C^\infty(\bar{\Omega})$ des restrictions à Ω des fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$.
2. Il existe une application linéaire continue $P : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), P(u) = u \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Des résultats analogues sont vrais avec $W^{m,p}(\Omega)$ ($m > 1$) au lieu de $W^{1,p}(\Omega)$ mais demandent plus de régularité sur Ω (voir [1]). La démonstration se fait par troncature et régularisation. Un cas particulier fait l'objet de l'exercice 1.16.

On peut montrer aussi que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ si $N \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < +\infty$. Mais, ceci est faux si on remplace \mathbb{R}^N par Ω avec Ω ouvert borné et $m > 0$. Par exemple, si Ω est un ouvert borné, l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$. Son adhérence est un sous espace strict de $H^1(\Omega)$, qu'on note $H_0^1(\Omega)$.

Définition 1.18 (Espace $H_0^1(\Omega)$) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$.

1. On appelle $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, ce qu'on note aussi : $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$.
2. Pour $m > 0$ et $1 \leq p < +\infty$, on définit le sous espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ de $W^{m,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$:

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Comme cela a été dit précédemment, si $\Omega = \mathbb{R}^N$ on a $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ alors que l'inclusion est stricte si Ω est un ouvert borné.

1.5 Théorèmes de trace

Théorème 1.19 (Trace) Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N; x \in \mathbb{R}, x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}^{N-1}\}$. Pour tout p tel que $1 \leq p < +\infty$, il existe une unique application linéaire continue γ de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\overline{\mathbb{R}_+^{N-1}})$ telle que $\gamma u = u(0, \cdot)$ p.p sur $\overline{\mathbb{R}_+^{N-1}}$ (au sens de la mesure de Lebesgue $N - 1$ dimensionnelle) si $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$.

Remarque 1.20 (Lien avec la trace classique.) On suppose que $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Alors :

1. Si $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, on a alors $\gamma u = u$ p.p sur $\partial\Omega$ (au sens de la mesure de Lebesgue $N - 1$ dimensionnelle).
2. $\text{Ker } \gamma = W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$.

Voir à ce propos l'exercice 1.15.

Théorème 1.21 Soit Ω un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 \leq p < +\infty$. Alors, il existe une unique application γ (linéaire continue) définie de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$ et tel que

$$\gamma u = u \text{ p.p. sur } \partial\Omega \text{ si } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Ici encore, p.p. est à prendre au sens de la mesure de Lebesgue $N - 1$ dimensionnelle sur $\partial\Omega$.

De plus $\text{Ker } \gamma = W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarquons que si $p > N$, on peut montrer (voir théorème 1.26) que $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ et γu est alors la valeur de u au bord au sens classique.

Le théorème suivant généralise la propriété d'intégration par parties des fonctions régulières.

Théorème 1.22 (Intégration par parties)

- Si $\Omega = \mathbb{R}_+^N (= \{x = (x_1, \dots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N; x_1 > 0\})$, alors

$$\begin{cases} \text{Si } 2 \leq i \leq N, \int_{\Omega} u D_i v \, dx = - \int_{\Omega} D_i u v \, dx, \forall (u, v) \in (H^1(\Omega))^2, \\ \text{Si } i = 1, \int_{\Omega} u D_1 v \, dx = - \int_{\Omega} D_1 u v \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u(y) \gamma v(y) \, d\gamma(y), \forall (u, v) \in (H^1(\Omega))^2, \end{cases}$$

- si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne, alors, pour tout $i = 1, \dots, N$,

$$\int_{\Omega} u D_i v \, dx = - \int_{\Omega} D_i u v \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u(y) \gamma v(y) n_i(y) \, d\gamma(y), \forall (u, v) \in (H^1(\Omega))^2,$$

où γu désigne la trace de u sur la frontière $\partial\Omega$ et $d\gamma(y)$ désigne l'intégration par rapport à la mesure adéquate sur $\partial\Omega$ (c'est-à-dire la mesure de Hausdorff sur $\partial\Omega$ qu'on peut voir comme une mesure de Lebesgue $(N - 1)$ dimensionnelle), et $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)^t$ est la normale à $\partial\Omega$ extérieure à Ω .

1.6 Théorèmes de compacité

Les théorèmes suivants sont une conséquence du théorème de Kolmogorov (voir [4, Théorème 8.5]).

Théorème 1.23 (Rellich) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et $1 \leq p < +\infty$. Toute partie bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$. Ceci revient à dire que de toute suite bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^p(\Omega)$.

Le théorème précédent reste vrai avec $W^{1,p}(\Omega)$ à condition de supposer la frontière lipschitzienne.

Théorème 1.24 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), à frontière lipschitzienne, et $1 \leq p < +\infty$. Toute partie bornée de $W^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$. Ceci revient à dire que de toute suite bornée de $W^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^p(\Omega)$.

Nous aurons aussi besoin d'une version du théorème 1.23 dans les espaces duaux de L^p et $W_0^{1,p}$. Comme, pour $p < +\infty$, le dual de L^p est identifié à l'espace L^q avec $q = p/(p-1)$, et que le dual de $W_0^{1,p}$ est noté $W^{-1,q}$, on obtient le théorème 1.25.

Théorème 1.25 *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et $1 < q < +\infty$. Toute partie bornée de $L^q(\Omega)$ est relativement compacte dans $W^{-1,q}(\Omega)$.*

En particulier, pour $q = 2$, l'espace $W^{-1,2}(\Omega)$ est aussi noté $H^{-1}(\Omega)$. Toute partie bornée de $L^2(\Omega)$ est donc relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$.

1.7 Injections de Sobolev

Le théorème suivant donne les injections de Sobolev ; ces injections établissent le fait qu'une fonction dont une certaine puissance d'elle-même et de sa dérivée est intégrable (c'est-à-dire $u \in W^{1,p}$) est en fait dans un "meilleur" espace (en terme d'intégration ou de régularité). On distingue trois cas différents, selon que la puissance est inférieure strictement, égale, ou supérieure strictement à la dimension de l'espace N .

Théorème 1.26 (Injections de Sobolev) *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$ qui est soit borné à frontière lipschitzienne, soit égal à \mathbb{R}^N .*

1. *Si $1 \leq p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, avec $p^* = \frac{Np}{N-p}$, et l'injection est continue, c'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ (ne dépendant que de p, N et Ω) tel que*

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}, \text{ ce qu'on note } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega);$$

on a en particulier

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega).$$

Pour $N = 1$, le cas $p = N$ est autorisé. On a donc aussi

$$[W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \text{ si } N = 1.$$

2. *Si $p > N$, alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$$

où, pour $\alpha > 0$, $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions höldériennes d'exposant α défini par

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = \{u \in C(\Omega, \mathbb{R}) \mid \exists k \in \mathbb{R}; |u(x) - u(y)| \leq k \|x - y\|^\alpha, \forall (x, y) \in \Omega^2\}. \quad (1.5)$$

La démonstration de ce résultat fait l'objet de l'exercice 1.13.

3. *Dans le cas où Ω est borné à frontière lipschitzienne, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout q tel que $1 \leq q < +\infty$ (et le cas $q = \infty$ est autorisé si $N = 1$). Ce résultat est faux dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$, voir un contre exemple à l'exercice 1.5.*

Si Ω est un ouvert borné sans hypothèse de régularité sur la frontière, les trois assertions précédentes restent vraies si l'on remplace l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ par l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 1.27 *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N . Une conséquence simple du théorème d'injection de Sobolev (théorème 1.26) et du théorème de compacité de Rellich (théorème 1.23) est que l'application $u \mapsto$ est compacte de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ si $1 \leq p \leq N$ et $q < p^* = \frac{pN}{N-p}$.*

Si $p > N$, une conséquence simple de théorème d'injection de Sobolev (théorème 1.26) et du théorème (classique) d'Ascoli est que l'application $u \mapsto$ est compacte de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $C(\bar{\Omega})$.