

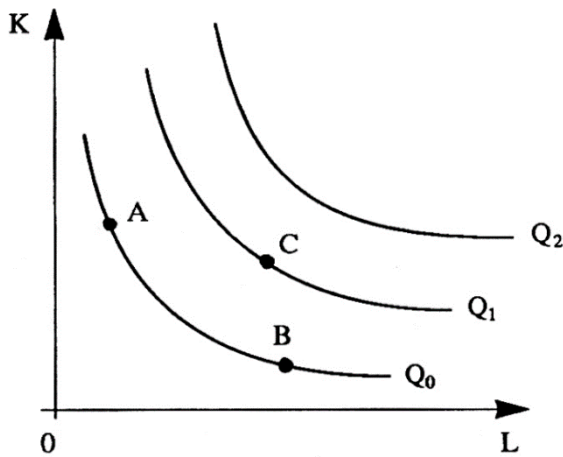
الفصل الثاني: نظرية سلوك المنتج - تابع -

دالة الإنتاج في الفترة الطويلة (دالة الإنتاج لعوامل قابلة للإحلال)

أدت دراسة سيرورة الإنتاج بعنصر متغير وحيد الى التطرق الى مفاهيم الإنتاجية الحدية والمتوسطة وتحديد المرحلة الفعالة للإنتاج. ويمكن دراسة سيرورة الإنتاج بفرضية وجود عنصرين متغيرين قابلين للإحلال، مع ثبات بقية عوامل الإنتاج الأخرى وهذا في الفترة الطويلة. ولتبسيط التحليل سنقتصر على دراسة تغير عاملين فقط من عوامل الإنتاج هما العمل L ورأس المال K ، وبالتالي فان دالة الإنتاج تأخذ الشكل التالي: $Q = f(L, K)$.

1. منحنى الناتج المتساوي (الكمية المتساوية) Les isoquants

بافتراض ان مستوى الإنتاج يتأثر فقط برأس المال واليد العاملة، يعرف منحنى الناتج المتساوي أو "منحنى سواء الإنتاج" بأنه المحل الهندسي لكل التوليفات من كميات العمل L ورأس المال K التي تعطي نفس القدر من الإنتاج. وجددير بالذكر ان منحنى الناتج المتساوي له خصائص تشبه إلى حد كبير خصائص منحنيات السواء في نظرية المستهلك حيث:



- منحنيات الناتج المتساوي ذات ميل سالب يعكس وجود علاقة عكسية بين عنصري الإنتاج. فإذا أراد المنتج تقليل استخدام رأس المال مع الحفاظ على نفس مستوى الإنتاج، يجب عليه زيادة كمية العمل المستخدمة.
- كلما ابتعدنا عن نقطة الأصل كلما كان المنحنى يمثل مستوى انتاج أفضل.
- يمكن الحصول على نفس مستوى الإنتاج بتوافيق مختلفة من L و K .

- منحنيات الناتج المتساوي لا تتقاطع لأن كل منحنى يمثل مستوى إنتاج فريد، وتقاطعها يعني رياضيا أن نقطة التقاطع تعطي مستويين مختلفين من الإنتاج في آن واحد، وهو أمر غير منطقي اقتصاديا.
- منحنيات الناتج المتساوي محدبة تجاه نقطة الأصل فيما يخص الجزء المناسب للإنتاج، ويعود سبب التحذب إلى تناقص المعدل الحدي للإحلال التقني (حيث يضحى المنتج بكميات متناقصة من رأس المال مقابل كل وحدة إضافية من العمل للبقاء على نفس مستوى الإنتاج).

- إذا كان الاحلال بين العمل ورأس المال يتم بمعدل ثابت فان منحنى الناتج المتساوي يأخذ شكل خط مستقيم.

2. المعدل الحدي للإحلال التقني: Le Taux Marginal de Substitution Technique (TMST_{L,K})

يعرف المعدل الحدي للإحلال الفني أو التقني بأنه عدد الوحدات (أو الكمية) من رأس المال التي يجب ان يتنازل

عنها المنتج لزيادة عنصر العمل بوحدة واحدة، مع الحفاظ على نفس المستوى من الإنتاج. ويمكن الوصول الى عبارة المعدل الحدي للإحلال التقني عن طريق مفاضلة دالة الإنتاج تفاضلا كليا كالآتي:

$$Q = F(L, k)$$

$$dQ = \left(\frac{\delta F}{\delta L}\right) \cdot dL + \left(\frac{\delta F}{\delta K}\right) \cdot dK$$

بما أن الإنتاج ثابت على طول منحنى الناتج المتساوي، فإن التغير في كمية الإنتاج نتيجة الانتقال من نقطة الى أخرى على هذا المنحنى يكون معدوما.

$$dQ = 0 \Rightarrow \left(\frac{\delta F}{\delta L}\right) \cdot dL + \left(\frac{\delta F}{\delta K}\right) \cdot dK = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\delta F}{\delta L}\right) \cdot dL = - \left(\frac{\delta F}{\delta K}\right) \cdot dK$$

$Pm_L = \frac{\delta F}{\delta L}$: يمثل الناتج الحدي للعمل ، $Pm_K = \frac{\delta F}{\delta K}$: يمثل الناتج الحدي لرأس المال
وعليه نكتب:

$$Pm_L \cdot dL = - Pm_K \cdot dK$$

$$\Rightarrow \frac{Pm_L}{Pm_K} = - \frac{dK}{dL}$$

$$TMST_{L.K} = \frac{Pm_L}{Pm_K} = - \frac{dK}{dL} = - \frac{\Delta K}{\Delta L}$$

أي أن المعدل الحدي للإحلال التقني عبارة عن ميل منحنى الناتج المتساوي $\frac{dK}{dL}$ مسبقا بإشارة سالبة ويساوي ناتج قسمة النواتج الحدية لعوامل الإنتاج L و K.

مثال 1: يمثل الجدول التالي نقاطا على منحنى الناتج المتساوي $Q = 100$

الإنتاج (Q)	رأس المال (K)	العمل (L)
100	20	1
100	15	2
100	11	3
100	8	4
100	6	5

- مثل بيانيا منحنى الناتج المتساوي الذي يوافق كمية الإنتاج $Q = 100$.

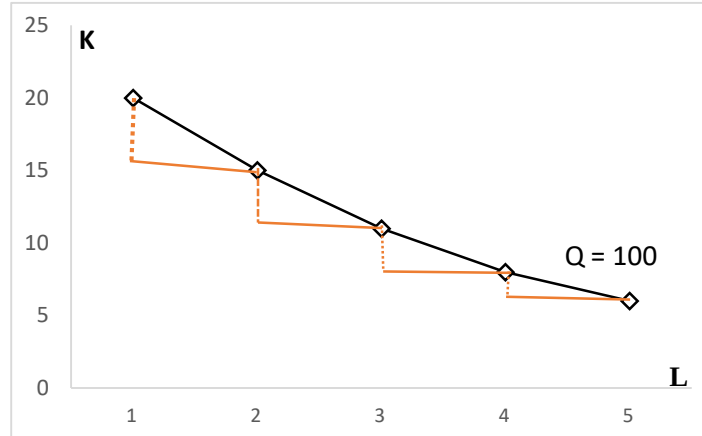
- احسب قيم المعدل الحدي للإحلال التقني بين العمل ورأس المال، وماذا تستنتج؟

الحل

التمثيل البياني لمنحنى الناتج المتساوي

حساب $TMST_{L;K}$

TMST _{L;K}	العمل (L)	رأس المال (K)	الإنتاج (Q)
/	1	20	100
5	2	15	100
4	3	11	100
3	4	8	100
2	5	6	100



الاستنتاج:

نلاحظ ان المعدل الحدي للإحلال التقني في تناقص مستمر، ويعود ذلك الى ظاهرة تناقص الإنتاجية الحدية لعناصر الإنتاج. فمع تزايد استخدام وحدات إضافية من عنصر العمل تقل كفاءته الإنتاجية (إنتاجيته الحدية Pm_L)، بينما رأس المال تزايد إنتاجيته الحدية Pm_K مع انخفاض الكمية المستخدمة منه في كل مرة. وبموجب العلاقة: $TMST_{L,K} = \frac{Pm_L}{Pm_K}$ ، فان هذا الأخير يتناقص تدريجياً كلما انتقلنا من الأعلى نحو الأسفل على طول منحنى الناتج المتساوي.

مثال 2

دالة الإنتاج لمؤسسة ما معطاة بالصيغة التالية: $Q = \sqrt{K} + 2\sqrt{L}$

1. ما هو مستوى الإنتاج الذي يتم الحصول عليه عند استخدام 25 وحدة من رأس المال و 100 وحدة من العمل، ثم عند استخدام 49 وحدة من رأس المال و 81 وحدة من العمل؟ وماذا تلاحظ؟
2. أوجد عبارة المعدل الحدي للإحلال التقني، ثم احسب قيمته عند التوليفتين السابقتين وما الذي يمكن استنتاجه حول شكل منحنى الناتج المتساوي؟

الحل

1. حساب مستوى الإنتاج عند التوليفتين: $(L = 100, k = 25)$ ، $(L = 81, k = 49)$

$$Q_1 = \sqrt{25} + 2\sqrt{100} = 25$$

$$Q_2 = \sqrt{49} + 2\sqrt{81} = 25$$

نلاحظ ان كلا التوليفتين تحققان نفس كمية الإنتاج مما يعني وقوعهما على نفس منحنى الناتج المتساوي.

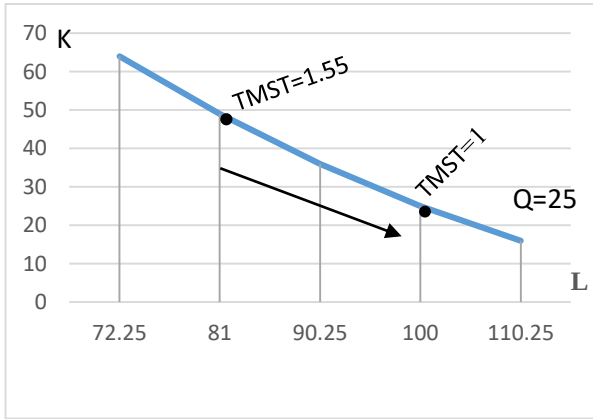
2. عبارة المعدل الحدي للإحلال التقني:

$$TMST_{L,K} = \frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{\frac{1}{\sqrt{L}}}{\frac{1}{2\sqrt{K}}} \Rightarrow TMST_{L,K} = 2\sqrt{\frac{K}{L}}$$

حساب قيمة $TMST_{L,K}$ عند التوليفتين السابقتين:

$$(L = 81, k = 49) \mapsto TMST_{L,K} = 2\sqrt{\frac{49}{81}} = 1.55$$

$$(L = 100, k = 25) \mapsto TMST_{L,K} = 2\sqrt{\frac{25}{100}} = 1$$



نلاحظ تناقص قيمة $TMST_{L,K}$ عند الانتقال من الأعلى نحو الأسفل على منحنى الناتج المتساوي مما يجعل المنحنى يأخذ شكل محدب نحو نقطة الأصل.

3. منطقة الكفاءة الاقتصادية

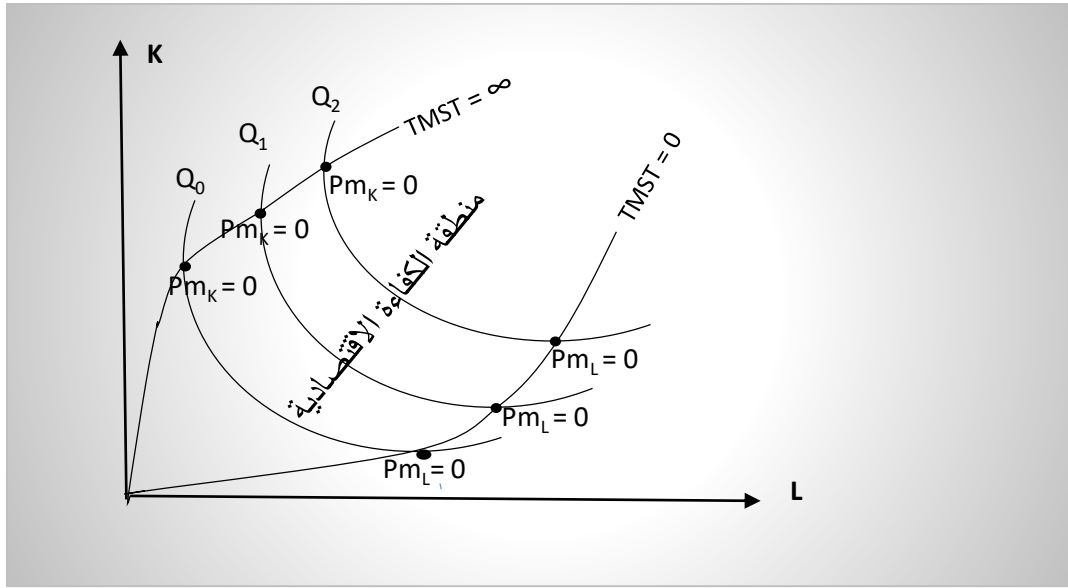
منطقة الكفاءة الاقتصادية هي الجزء من منحنى الناتج المتساوي الذي تكون فيه الإنتاجية الحدية لكل من العمل ورأس المال موجبة، ويكون المعدل الحدي للإحلال التقني متناقصا، مما يعكس الاستخدام الأمثل لعوامل الإنتاج بعيدا عن الإسراف أو النقص في أحدها. ويتم تحديد هذه المنطقة بيانيا من خلال تحديد:

– **منحنى الحد الأعلى (حافة الإنتاجية لرأس المال):** هو عبارة عن عدد لا متناهي من النقاط، وكل نقطة تمثل مستوى انتاج معين تكون عنده الإنتاجية الحدية لرأس المال معدومة.

– **منحنى الحد الأسفل (حافة الإنتاجية للعمل):** هو عبارة عن عدد لا متناهي من النقاط، وكل نقطة تمثل مستوى انتاج معين تكون عنده الإنتاجية الحدية للعمل معدومة.

نلاحظ من الشكل أدناه ما يلي:

1. داخل منطقة الكفاءة الإنتاجية يكون $TMST_{L,K}$ موجبا ومتناقصا كلما اتجهنا من الأعلى نحو الأسفل، حيث ان الناتج الحدي للعمل يتناقص بزيادة استخدام العمل، في حين ان الناتج الحدي لرأس المال يتزايد مع تناقص كمية رأس المال المستخدمة.



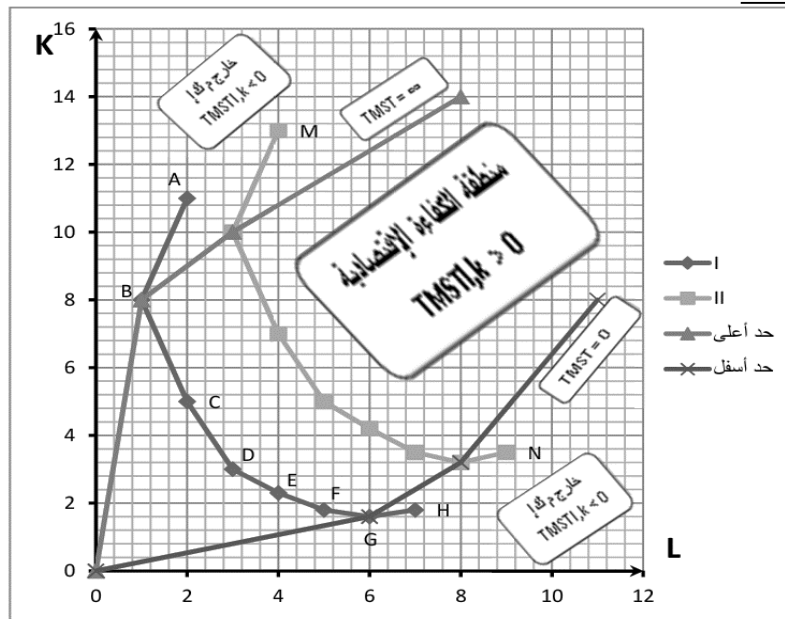
2. عند بداية التواء منحنى الناتج المتساوي جهة المحور الافقي يكون ميل المنحنى معدوما ($TMST=0$) حيث ان زيادة استخدام العمل مع بقاء كمية راس المال ثابتة لن يؤدي الى زيادة الإنتاج الكلي. كما ان ميل المنحنى بعد هذه النقطة يكون سالبا، حيث ان اية زيادة في استخدام العمل تستدعي زيادة استخدام راس المال للبقاء على نفس منحنى الناتج المتساوي وبدون زيادة كمية راس المال سوف يتراجع الإنتاج.

3. عند بداية التواء منحنى الناتج المتساوي جهة المحور الرأسي يكون ميل المنحنى لا نهائي ($TMST=\infty$) وبعد هذه النقطة يصبح الميل سالبا، حيث ان اية زيادة في استخدام راس المال لابد ان تتبع بزيادة في استخدام العمل للحفاظ على نفس الانتاج والا فان هذا الأخير سيتراجع.

مثال

انطلاقا من الجدول الموالي ارسم منطقة الكفاءة الاقتصادية وعلق عليها.

المنحنى I			المنحنى II		
L	K	TMST	L	K	TMST
2	11	-	4	13	-
1	8	-	3	10	-
2	5	3	4	7	3
3	3	2	5	5	2
4	2.3	0.7	6	4.2	0.8
5	1.8	0.5	7	3.5	0.7
6	1.6	0.2	8	3.2	0.3
7	1.8	-	9	3.5	-



واضح من الشكل ان المنتج لن يختار الإنتاج في الجزء الذي يكون فيه منحنى الناتج المتساوي ذو ميل موجب، لان ذلك يعني الحصول على نفس كمية الإنتاج باستعمال كميات أكبر من العمل ومن راس المال في آن واحد وهذا يتناقض مع مبدأ الرشادة (الكفاءة) الاقتصادية في تخصيص الموارد. وبناء عليه فان:

- الجزء غير المناسب للإنتاج بالنسبة للمنحنى الأول يتمثل في المقطع BA حيث التوليفة (11 ; 2) A تتطلب كميات أكثر من عوامل الإنتاج للحصول على نفس الناتج الكلي مقارنة بالتوليفة (8 ; 1) B. ويقال الشيء نفسه عن المقطع GH ذو الميل الموجب، حيث تتطلب التوليفة (1.8 ; 7) H قدرا من الموارد أكبر مما تطلبه التوليفة (1.6 ; 6) G لتحقيق نفس المستوى الإنتاجي.

- بالنسبة للمنحنى الثاني الجزء غير المناسب للإنتاج يتمثل في التوليفتين M و N لنفس الأسباب السابق ذكرها.