

9. دوال الإنتاج المتجانسة وغلة الحجم

نقول عن دالة انتاج بمتغيرين L و k أنها متجانسة (*) من الدرجة n إذا تحققت العلاقة الآتية:

$$Q = f(L;k) \Rightarrow f(\lambda L;\lambda k) = \lambda^n f(L;k) = \lambda^n Q$$

بمعنى انه بضرب عوامل الإنتاج k و L في المعامل λ فانه يتم ضرب دالة الإنتاج في المقدار λ^n حيث λ مقدار ثابت وموجب و n تعبر عن درجة التجانس. وهناك ثلاث حالات:

$n = 1$: دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة الأولى، أي أن تزايد عوامل الإنتاج بنسبة معينة سيؤدي إلى تزايد كمية الإنتاج بنفس النسبة، وبالتالي فغلة الحجم (الإنتاج) ثابتة.

$n > 1$: تزايد عوامل الإنتاج بنسبة ما يؤدي إلى تزايد كمية الإنتاج بنسبة أكبر وبالتالي فغلة الحجم متزايدة.

$n < 1$: تزايد عوامل الإنتاج بنسبة معينة سيؤدي إلى تزايد كمية الإنتاج بنسبة أقل وغلة الحجم متناقصة.

مثال

لتكن لدينا دالة الإنتاج من الشكل: $Q = f(L;k) = 3L^2 + 5LK + 7K^2$

حدد درجة التجانس لهذه الدالة وطبيعة مردودية السلم؟

بضرب عوامل الإنتاج في المعامل λ نحصل على:

$$\begin{aligned} Q^* &= f(\lambda L;\lambda k) = 3(\lambda L)^2 + 5(\lambda L)(\lambda K) + 7(\lambda K)^2 \\ &= 3\lambda^2 L^2 + 5\lambda^2 LK + 7\lambda^2 K^2 \\ &= \lambda^2 (3L^2 + 5LK + 7K^2) = \lambda^2 Q \end{aligned}$$

$n = 2$ ومنه الدالة متجانسة من الدرجة الثانية وتخضع لقانون غلة حجم متزايدة، حيث ان مضاعفة عوامل الإنتاج

بالمقدار λ يؤدي الى مضاعفة الإنتاج (Q) بالمقدار λ^2 . وعليه، فان زيادة عوامل الإنتاج الى الضعف ($\lambda=2$)

مثلا سيؤدي الى زيادة الإنتاج بـ 4 مرات.

(*) تكون الدالة غير متجانسة عندما لا تتغير مخرجاتها بنسبة ثابتة عند تغيير جميع المدخلات بنفس النسبة. رياضيا، هي الدالة التي لا يمكن فيها استخراج الثابت λ كعامل مشترك لكل الحدود. في هذه الحالة، لا توجد علاقة نسبية ثابتة بين زيادة المدخلات وزيادة المخرجات. وكأمثلة على ذلك:

- وجود رقم ثابت في الدالة يكسر التجانس مثال ذلك الدالة: $Q = 2L + 5K + 10$ حيث:

$$f(\lambda L; \lambda k) = 2\lambda L + 5\lambda K + 10 = \lambda(2L + 5K) + 10 \neq \lambda \cdot Q$$

- عندما نجمع حدودا بأسس مختلفة لعناصر الإنتاج. مثال ذلك الدالة: $Q = L^2 + K^3$

$$f(\lambda L; \lambda k) = (\lambda L)^2 + (\lambda K)^3 = \lambda^2 L^2 + \lambda^3 K^3$$

هنا λ^2 و λ^3 لا يمكننا توحيدهما في أس واحد لكل الدالة، لذا هي غير متجانسة.

لدينا مثلا الدالة: $Q = 1 + 2L$ $\begin{cases} L = 1 \rightarrow Q = 3 \\ L = 2 \rightarrow Q = 5 \end{cases}$ مضاعفة عنصر العمل لم يؤدي الى مضاعفة الإنتاج. هذا الخلل

سببه أن الدالة غير متجانسة.

ملاحظة

إذا كانت دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة صفر ($n = 0$)، فهذا يعني أن مستوى الإنتاج يظل ثابتا مهما تضاعفت كمية عوامل الإنتاج المستخدمة، مما يعني أن النظام وصل لحالة تشبع كاملة من حيث الحجم.

$$f(\lambda L; \lambda k) = \lambda^0 \cdot f(L; k) = Q$$

9.1. دالة الإنتاج كوب-دوغلاس la fonction de production COBB-DOUGLAS

تم اكتشاف هذه الدالة عام 1928 من طرف الاقتصادي بول دوغلاس والرياضي تشارلز كوب، وتعتبر من أشهر الدوال المستعملة لتوصيف العلاقة بين المدخلات والمخرجات. وتكتب على الشكل:

$$Q = b L^{\alpha} K^{\beta}$$

Q : تمثل الكمية المنتجة.

b : يسمى معامل الكفاءة أو التقنية، وهو يقيس أثر التقدم التكنولوجي.

α : مرونة الإنتاج الجزئية بالنسبة لعنصر العمل.

β : مرونة الإنتاج الجزئية بالنسبة لعنصر رأس المال.

α, β و b هي ثوابت موجبة.

بالتعريف هذه الدالة متجانسة من الدرجة $\alpha + \beta$ لأن:

$$\begin{aligned} Q^* &= f(\lambda L; \lambda k) = b (\lambda L)^{\alpha} (\lambda K)^{\beta} \\ &= b \lambda^{\alpha} L^{\alpha} \cdot \lambda^{\beta} K^{\beta} \\ &= b \lambda^{\alpha+\beta} L^{\alpha} \cdot K^{\beta} \\ &= \lambda^{\alpha+\beta} (b L^{\alpha} \cdot K^{\beta}) = \lambda^{\alpha+\beta} \cdot Q \end{aligned}$$

بالنسبة لغلة الحجم يتم تحديدها من خلال درجة التجانس، حيث إذا كان:

$\alpha + \beta = 1$: غلة الحجم (عوائد الإنتاج) ثابتة. وفي هذه الحالة يمكن كتابة دالة الإنتاج على الشكل:

$$Q = b L^{\alpha} K^{1-\alpha} \text{ ، حيث: } \beta = 1 - \alpha$$

$\alpha + \beta > 1$: غلة الحجم (عوائد الإنتاج) متزايدة.

$\alpha + \beta < 1$: غلة الحجم (عوائد الإنتاج) متناقصة.

9.2. مرونة الإنتاج

هي مقياس يقيس مدى استجابة حجم الإنتاج (المخرجات) للتغير في كمية أحد عناصر الإنتاج (المدخلات). وتعطى بالصيغة التالية:

$$E_Q = \frac{\text{التغير النسبي في الانتاج الكلي}}{\text{التغير النسبي في عنصر الانتاج المعني}}$$

فمثلا، إذا كانت $E_Q = 0.8$ فذلك يعني ان حدوث زيادة في كمية أحد عناصر الإنتاج بنسبة 1% سيؤدي الى زيادة الإنتاج الكلي بنسبة 0.8%.

ونميز بين مرونتين للإنتاج هما المرونة الجزئية ومرونة الحجم حيث:

- المرونة الجزئية: تركز على تغير عنصر واحد فقط ويمكن حسابها سواء في الاجل القصير أو في الاجل الطويل.

- مرونة الحجم: تركز على تغير كل العناصر دفعة واحدة وتنطبق في الاجل الطويل فقط.

■ مرونة الإنتاج بالنسبة للعمل

$$E_{Q/L} = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta L/L} = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \cdot \frac{L}{Q} \quad \text{بيانات متقطعة}$$

$$E_{Q/L} = \frac{dQ/Q}{dL/L} = \frac{dQ}{dL} \cdot \frac{L}{Q} \quad \text{بيانات مستمرة}$$

بما ان: $\frac{dQ}{dL} = P_{mL}$ يمثل الناتج الحدي للعمل و $\frac{L}{Q}$ هو مقلوب الناتج المتوسط للعمل، نكتب اذن:

$$E_{Q/L} = \frac{dQ}{dL} \cdot \frac{L}{Q} = P_{mL} \cdot \frac{1}{P_{ML}} = \frac{P_{mL}}{P_{ML}}$$

■ مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال:

بنفس الطريقة السابقة نجد:

$$E_{Q/K} = \frac{dQ}{dK} \cdot \frac{K}{Q} = P_{mK} \cdot \frac{1}{P_{MK}} = \frac{P_{mK}}{P_{MK}}$$

$E_Q > 1$: الإنتاج مرن جدا، حيث أن زيادة عنصر الإنتاج بنسبة ما يؤدي لزيادة الإنتاج بنسبة أكبر (مرحلة تزايد الغلة).

$E_Q < 1$: الإنتاج غير مرن، حيث أن زيادة عنصر الإنتاج بنسبة ما يؤدي لزيادة الإنتاج بنسبة أقل (مرحلة تناقص الغلة).

$E_Q = 0$: زيادة عنصر الإنتاج لا يضيف أي شيء للإنتاج.

$E_Q < 0$: زيادة عنصر الإنتاج يؤدي لخفض الإنتاج الكلي (مرحلة الغلة السالبة).

ملاحظة

في دالة الإنتاج كوب-دوغلاس، تشير الثوابت الأسية للدالة α و β الى مرونة الإنتاج الجزئية بالنسبة لكل من العمل ورأس المال على التوالي (أي حصة كل منهما في الإنتاج). ويمكن اثبات ذلك كما يلي:

$$Q = b L^{\alpha} K^{\beta}$$

$$E_{Q/L} = \frac{dQ}{dL} \cdot \frac{L}{Q} = \alpha b L^{\alpha-1} K^{\beta} \frac{L}{b L^{\alpha} K^{\beta}} = \alpha$$

تغير عنصر العمل بنسبة 1% يؤدي الى تغير الإنتاج الكلي بنسبة α %.

$$E_{Q/K} = \frac{dQ}{dK} \cdot \frac{K}{Q} = \beta b L^{\alpha} K^{\beta-1} \frac{K}{b L^{\alpha} K^{\beta}} = \beta$$

تغير عنصر رأس المال بنسبة 1% يؤدي الى تغير الإنتاج الكلي بنسبة β %.

مثال

لتكن لدينا دالة الإنتاج من الشكل: $Q = 10 L^{0.6} K^{0.7}$

- احسب مقدار الزيادة في الإنتاج اذا زاد عنصر العمل بـ 10 %.

- احسب مقدار الزيادة في الإنتاج اذا زاد عنصر رأس المال بـ 15 %.

- احسب مقدار الزيادة في الإنتاج اذا زادت مدخلات الإنتاج بـ 20 %.

الحل

1- مقدار الزيادة في الإنتاج اذا زاد عنصر العمل بـ 10%.

الطريقة 1: نطلق من إيجاد الناتج الحدي والناتج المتوسط للعمل وفقا للصيغة: $E_{Q/L} = \frac{P_{mL}}{P_{ML}}$

$$P_{mL} = \frac{\delta Q}{\delta L} = 6 L^{-0.4} K^{0.7}$$

$$P_{ML} = \frac{Q}{L} = \frac{10 L^{0.6} K^{0.7}}{L} = 10 L^{-0.4} K^{0.7}$$

$$E_{Q/L} = \frac{6 L^{-0.4} K^{0.7}}{10 L^{-0.4} K^{0.7}} = 0.6$$

الطريقة 2: بما ان دالة الإنتاج من النوع كوب-دوغلاس فان مرونة الإنتاج للعمل: $\alpha = 0.6$. وعليه فان زيادة

كمية العمل بـ 1% تؤدي الى زيادة الإنتاج الكلي بنسبة 0.6 %.

وبالنتيجة فان زيادة عنصر العمل بـ 10% تؤدي الى زيادة الإنتاج الكلي بنسبة 6 %.

2- مقدار الزيادة في الإنتاج اذا زاد عنصر رأس المال بـ 15%:

الطريقة 1: نستخدم القانون العام لمرونة الإنتاج: $E_{Q/K} = \frac{P_{mK}}{P_{MK}}$

$$P_{mK} = \frac{\delta Q}{\delta K} = 7 L^{0.6} K^{-0.3}$$

$$P_{MK} = \frac{Q}{K} = \frac{10 L^{0.6} K^{0.7}}{K} = 10 L^{0.6} K^{-0.3}$$

$$E_{Q/K} = \frac{7 L^{0.6} K^{-0.3}}{10 L^{0.6} K^{-0.3}} = 0.7$$

الطريقة 2: بما ان دالة الإنتاج من نوع كوب-دوغلان فان مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال: $\beta = 0.7$ ، أي ان زيادة عنصر رأس المال بـ 1% يؤدي الى زيادة الإنتاج الكلي بنسبة 0.7%. وبالنسبة فان زيادة رأس المال بـ 15% يؤدي الى زيادة الإنتاج الكلي بنسبة 10.5% .

3- مقدار الزيادة في الإنتاج اذا زادت مدخلات الإنتاج بـ 20%.

الدالة من نوع كوب-دوغلان وهي متجانسة من الدرجة 1,3 ($\alpha + \beta = 0.6 + 0.7$) ويعني ذلك ان زيادة عوامل الإنتاج (K, L) بنسبة 1% يؤدي الى زيادة الإنتاج الكلي بنسبة 1.3% (غلة حجم متزايدة). وبالتالي فزيادة مدخلات الإنتاج بـ 20% سيؤدي الى زيادة الإنتاج الكلي بنسبة 26%.

9.3. خصائص دوال الإنتاج المتجانسة

تتميز دوال الإنتاج المتجانسة بمجموعة من الخصائص الرياضية والاقتصادية التي تجعلها أداة قوية لتحليل سلوك المؤسسة، وأبرز هذه الخصائص هي:

1. تحديد نوع غلة الحجم: من خلال درجة التجانس ($\alpha + \beta$) يمكن مباشرة معرفة ماذا سيحدث للإنتاج عند زيادة جميع المدخلات بنفس النسبة.

2. المشتقات الجزئية الأولى لدالة انتاج متجانسة من الدرجة n تعتبر دوال إنتاجية متجانسة من الدرجة (n-1). فاذا كانت دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة 1 فان نواتجها الحدية P_{mL} و P_{mK} تشكل دوال انتاج متجانسة من الدرجة 0.

3. دوال الانتاج المتجانسة من الدرجة الأولى (ذات غلة حجم ثابتة)، تتميز بكون منحنيات الناتج المتساوي تتباعد عن بعضها بمسافات متساوية عند مضاعفة المدخلات. وخط الإنتاج ينطلق من نقطة المبدأ.

4. دوال الإنتاج المتجانسة (وخاصة من الدرجة الأولى)، يكون مسار التوسع فيها على شكل خط مستقيم يمر بنقطة الأصل. أي أنه مع توسع الشركة فإنها تزيد من استخدام عناصر الإنتاج بنسب ثابتة طالما بقيت أسعار هذه العناصر ثابتة.

5. دوال الإنتاج المتجانسة تستجيب لمطابقة أويلر (Euler's Theorem): متطابقة أويلر تربط بين درجة تجانس دالة الإنتاج والإنتاجيات الحدية لعوامل الإنتاج. وتنص على ان مجموع جداءات النواتج الحدية لعوامل الإنتاج بعدد الوحدات المستخدمة منها، يجب ان يساوي جداء الكمية المنتجة في درجة التجانس.

$$L f'_L + K f'_K = n \cdot Q$$

$$L \cdot P_{mL} + K \cdot P_{mK} = n \cdot Q$$

إذا كان كل عنصر انتاجي يكافأ حسب انتاجيته الحدية فان:

$L \cdot P_{mL}$: يعبر عن تكلفة عنصر العمل (مدفوعات الأجور).

$K \cdot P_{mK}$: يعبر عن تكلفة راس المال (أرباح ملاك راس المال).

وهناك ثلاث حالات:

$n = 1$ (غلة الحجم ثابتة): تعرف هذه الحالة بقاعدة نفاذ المنتج، وتعني ان الإنتاج المحقق يوزع بالكامل على عناصر الإنتاج التي ساهمت في تحقيقه.

$n < 1$ (غلة الحجم متناقصة) : يكون هناك فائض في الإنتاج وبإمكان المؤسسة تحقيق أرباح. بعبارة أخرى، فان جزء من الإنتاج فقط يكفي لتغطية تكاليف الإنتاج (مكافأة عوامل الإنتاج) والجزء الآخر يمثل المردود او الأرباح.

$n > 1$ (غلة الحجم متزايدة) : أي ان الإنتاج المحقق لا يكفي لتغطية احتياجات عوامل الإنتاج التي ساهمت في تحقيقه.

مثال 1

لتكن لدينا دالة الإنتاج من الشكل: $Q = f(L;k) = L^2 + 4LK + 3K^2$

اثبت ان دالة الإنتاج تحقق مطابقة اويلر وفسر معناها ؟

الحل

أولاً: إيجاد الطرف الثاني في المتطابقة من خلال حساب درجة تجانس الدالة:

بضرب عوامل الإنتاج في المقدار λ نجد:

$$Q^* = f(\lambda L; \lambda k) = (\lambda L)^2 + 4(\lambda L)(\lambda K) + 3(\lambda K)^2$$

$$Q^* = \lambda^2 L^2 + 4\lambda^2 LK + 3\lambda^2 K^2$$

$$Q^* = \lambda^2 (L^2 + 4LK + 3K^2)$$

$$Q^* = \lambda^2 f(L;k) = \lambda^2 Q$$

الدالة متجانسة من الدرجة الثانية ($n = 2$) وبذلك نحصل على الطرف الثاني في قاعدة ايلر:

$$n Q = 2 Q \dots\dots\dots(1)$$

ثانياً: حساب الطرف الأول من المتطابقة: $L \cdot P_{mL} + K \cdot P_{mK}$

$$P_{mL} = \frac{\delta Q}{\delta L} = 2L + 4K$$

$$P_{mK} = \frac{\delta Q}{\delta K} = 4L + 6K$$

$$\begin{aligned} L \cdot P_{mL} + K \cdot P_{mK} &= L(2L + 4K) + K(4L + 6K) \\ &= 2L^2 + 4LK + 4LK + 6K^2 \end{aligned}$$

$$= 2(L^2 + 4LK + 3K^2)$$

$$= 2Q \dots\dots\dots(2)$$

من (1) و(2) نلاحظ أن متطابقة أويلر محققة وبالتالي نقول ان دالة الإنتاج تستجيب لهذه المتطابقة.
التفسير الاقتصادي:

$$L \cdot P_{mL} + K \cdot P_{mK} = 2 Q$$

$$\frac{1}{2} (L \cdot P_{mL} + K \cdot P_{mK}) = Q$$

الإنتاج المحقق يكفي فقط لتغطية نصف المدفوعات لعناصر الإنتاج (مكافأة عوامل الإنتاج)، مما يعني ان المؤسسة تحقق خسارة.

مثال 2

لتكن لدينا دالة الإنتاج من الشكل: $Q = f(L;k) = 3L^{0.4} K^{0.5}$

اثبت ان دالة الإنتاج تحقق متطابقة أويلر ثم فسر معناها؟

الحل

حتى نقول إن دالة الإنتاج تحقق قاعدة أو متطابقة أويلر، يجب القيام بخطوتين أساسيتين:

- إثبات أن الدالة متجانسة.

- التحقق من مساواة طرفي المعادلة.

أولاً: إثبات أن الدالة متجانسة:

دالة الإنتاج من نوع كوب-دوغلاس وبالتالي فهي متجانسة من الدرجة $(\alpha+\beta)$

$$\alpha+\beta = 0.4 + 0.5 = 0.9$$

$\alpha+\beta < 1$: دالة الإنتاج تخضع لقانون غلة حجم متناقصة.

ثانياً: التحقق من مساواة طرفي المعادلة:

$$\text{الطرف الثاني: } n Q = 0.9 Q \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{الطرف الأول: } L \cdot P_{mL} + K \cdot P_{mK}$$

$$P_{mL} = \frac{\delta Q}{\delta L} = 1.2 L^{-0.6} K^{0.5}$$

$$P_{mK} = \frac{\delta Q}{\delta K} = 1.5 L^{0.4} K^{-0.5}$$

$$L \cdot P_{mL} + K \cdot P_{mK} = L(1.2 L^{-0.6} K^{0.5}) + K(1.5 L^{0.4} K^{-0.5})$$

$$= 1.2 L^{0.4} K^{0.5} + 1.5 L^{0.4} K^{0.5}$$

$$= L^{0.4} K^{0.5} (1.2 + 1.5)$$

$$\begin{aligned}
&= 2.7 L^{0.4} K^{0.5} \\
&= 0.9 (3 L^{0.4} K^{0.5}) \\
&= 0.9 Q \dots\dots\dots(2)
\end{aligned}$$

من (1) و(2) نلاحظ أن طرفي المتطابقة متساويان وبالتالي دالة الإنتاج تستجيب لهذه المتطابقة.
التفسير الاقتصادي:

$$L \cdot P_{mL} + K \cdot P_{mK} = 0.9 Q$$

مكافأة عناصر الإنتاج (التكاليف) تستحوذ على 90% من الإنتاج و10% الباقية تعتبر فائض انتاج، مما يعني ان المؤسسة تحقق ربح.

على افتراض ان $L = 1$ و $K = 4$ فان:

الكمية المنتجة: $Q = 6$

مكافأة عوامل الإنتاج حسب انتاجياتها الحدية:

$$\begin{aligned}
P_{mL} &= 1.2 L^{-0.6} K^{0.5} = 1.2 (4)^{0.5} = 2.4 \\
P_{mK} &= 1.5 L^{0.4} K^{-0.5} = 1.5 (1)^{0.4} (4)^{-0.5} = 0.75
\end{aligned}$$

مدفوعات الأجور: $L \cdot P_{mL} = 2.4$

مدفوعات راس المال (أرباح ملاك راس المال): $K \cdot P_{mK} = 4(0.75) = 3$

اجمالي المدفوعات (التكاليف): $L \cdot P_{mL} + K \cdot P_{mK} = 2.4 + 3 = 5.4$

اجمالي المدفوعات لعناصر الإنتاج تشكل 90% من الناتج الكلي و10% الباقية تعتبر فائض انتاج (ربح للمؤسسة).

