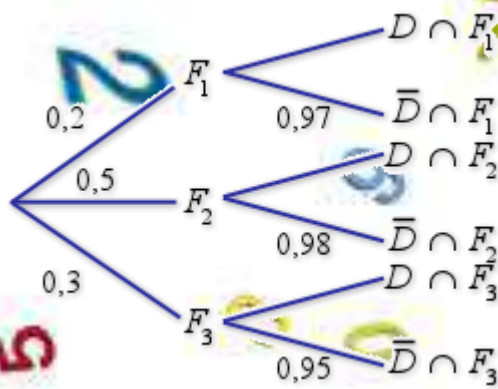


مدخل إلى حساب الاحتمالات

مطبوعة موجهة لطلبة سنوات الجذع المشترك

للدكتور صياغ أحمد رمزي

والدكتور نمر محمد الخطيب



مدخل للاحتتمالات

Introduction to Probability



يقدم هذا الكتاب مدخلاً للاحتتمالات حيث يعد مرجعاً مفيداً لطلاب الجامعة في الاقتصاد، وإدارة الأعمال، والعلوم الاجتماعية. والذين يعتبرون أن الاحتمالات من أكثر المواد صعوبة وأكثرها فائدة في نفس الوقت. وقد يعد هذا العمل مرجعاً مفيداً بهدف التغلب على هذه الصعوبة باستخدام والاعتماد على شرح النظرية الموضحة تماماً بأمثلة مصحوبة بحلول تفصيلية. فهو يركز الأكثر على التقنيات والمنهج الإحصائي وليس على نظرية الاحتمالات، والمصممة هنا كأداة للإحصاء وليس كموضوع الدراسة في حد ذاته. كما يعد الطلاب لسهولة فهم واستيعاب التحليل الإحصائي والاحتمالات والاقتصاد القياسي.

ويعتبر الكتاب متكاملًا من حيث أنه يستهل بتغطية شرح المبادئ أو الخلفية النظرية الاحتمالات، والتجارب العشوائية والحوادث ويومئ قواعد حساب الاحتمالات والطرق التركيبية في حساب الاحتمالات والاحتمال الكلي ونظرية بايز Bayes. ثم يتبع ذلك العديد من المواضيع المتعلقة بمفهوم المتغيرة العشوائية والتوزيع الاحتمالي (أو القانون الاحتمالي) والتطرق بشكل وافي إلى عدد من التوزيعات الاحتمالية الشهيرة. وذلك نظراً لأهمية هذا الموضوع في عملية فهم النظريات الإحصائية المطلوبة لدراسة الاقتصاد القياسي.

الدكتور: صياغ أحمد رمزي

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

جامعة ورقلة - الجزائر

الفهرس

4	مقدمة
5	I الاحتمال
5	1.I نشوء نظرية الاحتمالات في العصر الحديث وتطورها
6	2.I مفاهيم أساسية في حساب الاحتمالات:
9	3.I جبر الأحداث الابتدائية σ -algebra
10	4.I معنى الاحتمال وتعريفه
10	1.4.I المفهوم العملي والتقليدي للاحتمال:
12	2.4.I التعبير الهندسي عن الاحتمالات
14	3.4.I التعريف التجريدي الرياضي للاحتمال:
15	4.4.I بعض النظريات الأساسية على الاحتمال:
16	5.I التحليل التوافقي (أساليب العد)
19	6.I الاحتمال الشرطي Conditional probability
20	7.I نظرية بايز أو نظرية الأسباب Bayes' theorem
20	1.7.I قاعدة بايز: (Bayes' rule)
21	2.7.I النظرية الشاملة للاحتتمالات الكلية
22	3.7.I الأحداث المستقلة independent events
25	II المتغيرات العشوائية والتوزيع الاحتمالي Random Variable & Probability Distributions
25	1.II مفهوم وتعريف المتغير العشوائي Random Variable
26	2.II التوزيعات الاحتمالية Probability Distribution
27	1.2.II دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع Discrete Probability Distributions
28	2.2.II دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر Continues Probability Distributions
29	3.II دالة التوزيع التراكمية F Cumulative Distribution Function (x)
31	4.II التمثيل البياني لدوال التوزيع الاحتمالية
34	5.II التوقع الرياضي والتباين Mathematical Expectation and Variance
34	1.5.II التوقع التوقع الرياضي E(X) Mathematical Expectation
36	2.5.II التباين the Variance Var (X)
38	6.II المتغير المعياري Standardized Variable
39	III التوزيعات لاحتمالية
39	1.III التوزيعات لاحتمالية المتقطعة الأكثر استخداما
39	1.1.III توزيع برنولي Bernoulli Distribution
40	2.1.III توزيع ذي الحدين أو التوزيع الثنائي Binomial Distribution
42	3.1.III قانون بواسون Poisson Distribution Law
46	2.III التوزيعات لاحتمالية المتستمة الأكثر استخداما
46	1.2.III التوزيع الموحد أو المنتظم Uniform distribution
48	2.2.III قانون التوزيع الطبيعي Normal (or Laplace-Gauss) distribution
55	3.2.III التوزيع الأسّي Exponential Distribution
58	سلسلة التمارين
69	حلول التمارين
86	الملاحق
89	المراجع

مدخل للاحتتمالات

Introduction to Probability



مقدمة :

يعتبر علم الاحتمالات من أهم علوم الإحصاء وذلك لأن معظم النظريات والطرق الإحصائية بنيت من الأساس عليه. فتعتبر نظرية الاحتمالات الخلفية الرياضية للطرق الإحصائية لأنها همزة وصل بين الإحصاء الوصفي الذي يعالج مباشرة السلاسل والبيانات والتحليل الإحصائي الذي يعتبر المعالم الإحصائية كمؤشرات غير مباشرة لقيم حقيقية مقاسه بالمعينة. وعليه، فالنظرية الاحتمالات هي ذلك الفرع من الرياضيات الذي يهتم بدراسة ظواهر العشوائية (stochastic phenomena) وحالات عدم التأكد والذي يلعب دورا أساسيا في مسائل المعينة التقدير والتنبؤ.

كما يعرف حساب الاحتمالات أيضا على أنه النظرية الرياضية المبنية بديهيا التي تمكن من نمذجة الظواهر العشوائية وألا يقين (Modeling stochastic phenomena). فنظرية الاحتمالات هي فرع من فروع الرياضيات التي تتناول خصائص بعض التركيبات التي تستعمل في نمذجة الظواهر التي تتدخل فيها "الصدفة". باعتبارها نظرية رياضية مجردة، فهي تقوم على البديهيات وتتطور بشكل مستقل عن الواقع المادي باستثناء المفاهيم (الأحداث، المتغيرات ...) التي تشير إلى التجربة.

ولعلم الاحتمالات أثر كبير على حياتنا اليومية وذلك لأن كثير من القرارات التي تتخذ تبنى على توقعات مختلفة لحدوث بعض الأشياء أو عدم حدوثها فهو مقياس لحالة عدم اليقين لحدوث حدث معين حيث يرتبط حساب الاحتمالات بالتجارب العشوائية Random Experience والحوادث Events والمتغيرات العشوائية Random Variables. وقد ثبت تَوْفُقُ الاحتمالات في مجابهة المواقف المتعددة في مجالات الفيزياء النووية وفي الاقتصاد التطبيقي وفي مجالات

التخطيط ونظرية الألعاب والإدارة. كما ثبت أن احتمالات الأحداث المرتبط بتجربة مفروضة ذات وجود موضوعي مستقل عن الأفراد، وأن على الباحث اكتشاف احتمال حدث بالتجريب.

1 - الاحتمال:

1.1. نشوء نظرية الاحتمالات في العصر الحديث وتطورها

يتفق المؤرخون على أن جذور علم الاحتمال في العصر الحديث ترست منذ منتصف القرن السابع عشر. فخلال القرن 17 قدم Blaise PASCAL (1623-1662) أول تصاميم لحساب الاحتمالات وفي نفس الفترة نشر Christian de HUYGENS سنة 1657 أول مدقق لحساب البدائي الاحتمالات الموسوم بـ "تحول حكم عدم التأكد للصدفة والحظ لقوانين العقل والهندسة" كما دعم Leibnitz بعدها هذه التصاميم بمألفه "فن التوفيقات". وفي القرن 18 ظهرت أعمال Nicolas (Jacob) Bernouilli الذي صاغ قانون الأعداد الكبرى وبعدها بفترة أعمال Moivre الذي تم فيها أول صياغة للقانون الطبيعي الذي ننسبه للعالمين Laplace و Gauss. لكن البداية الحقيقية لنظرية الاحتمالات كانت بعد نشر (1749-1827) Pierre-Simon Laplace , مؤلفه " المدقق التحليلي للاحتتمالات" عام 1813 والذي قدم فيه عرضا مفصلا لأسس نظرية الاحتمالات أين برهن على قانون النهاية المركزية. وتبعه (1855-1855) Johann Carl Friedrich Gauss (1777) مكتشف القانون الطبيعي ومصمم طريقة المربعات الصغرى. فقد كانت هذه الفترة مثمرة العطاء ومؤسسة للتفكير في المسائل المباريات ومنهجية التفكير العقلي والحساب في حالات عدم التأكد. وفي نفس الحقبة ظهرت المدرسة الروسية مع Tchébitchev (1821-1894) الذي ادخل طريقة العزوم وتعميم القوانين وكذا أعمال Markov (1856-1922) الذي أسس العوامل العشوائية (stochastic process) كفرع هاماً لنظرية الاحتمالات و Liapounov الذي ألف الدوال المخصصة. كما لا نستهن بالمدرسة الأمريكية حيث نسجل Fisher و Wiener و Neumann , الذين اشتغلوا على النظريات الفيزيائية ونظرية المعلومة التي بسطت تصورا جديدا لنظرية الاحتمالات. لكن يرجع الفضل الكبير لصياغة حساب الاحتمالات الى Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1933)

2.1 . مفاهيم أساسية في حساب الاحتمالات:

المجموعة Set : نسمي مجموعة كل قائمة أشياء أو أعداد أو خليط منهما، وكل شيء من القائمة أو عدد منها هو عنصر من المجموعة. كما أنه يمكن تعريف المجموعة باستخدام خاصية مشتركة لجميع عناصرها بدلاً من سرد قائمة عناصرها.

التجربة Experience : نسمي تجربة كل عملية نتحصل من خلالها على قياس أو ملاحظة أو تسجيل ما، يتم عن طريق هذه العملية.

وتعرف التجربة العشوائية (Random experiment) بأنها عملية تجرى تحت ظروف معينة والتي لا يمكن التنبؤ بنتيجتها مسبقاً بشكل أكيد والتي تؤدي إلى نتيجة واحدة تنتمي إلى ما يسمى فضاء العينة أو الإمكانيات Sample Space / Univers of possibilities

فضاء العينة Sample Space : نعرف فضاء العينة على أنه مجموع كل النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ويرمز له (Ω) . وحسب الترميز المستخدم وتصور المسألة فإنه يمكن الحصول على عدة فضاءات عينة لتجربة واحدة.

-مثال 1 :

فضاء العينة لرمي نرد غير متحيز مرواحدة هو $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

-مثال 2 :

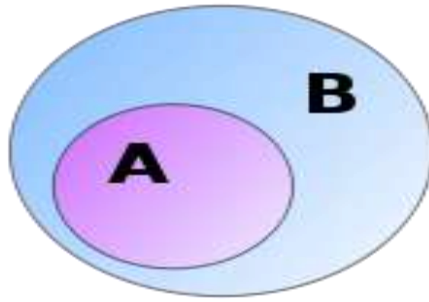
فضاء العينة عند رمي قطعة نقدية معدنية غير متحيزة مرة واحدة $\Omega = \{P, F\}$ وعند رمي القطعة مرتين $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$

الحدث Event : نسمي حدثاً كل مجموعة جزئية من فضاء العينة أو أي مجموعة من النتائج الممكنة. والحدث هو قضية منطقية أو خاصية مؤكدة أم لا من خلال نتيجة التجربة. وننسب لكل حادثة مجموعة تضم النتائج الممكنة التي تحقق القضية أو الخاصية.

مثال : إذا كان A حدث الحصول على الأرقام الفردية عند رمي حجر نرد غير متحيز مرة واحدة،

فإن $A = \{1, 3, 5\}$

التجربة والحدث هي مفاهيم لا يجب الخلط بينها. التجربة يتولد عنها أحداث (نتائج أو حالات) مختلفة. التجربة مفهوم مرن يتطلب أحيانا نظرة ذكية وخيال. من المهم اكتساب هذه المهارة في تحديد ما هي التجربة أو التجارب في مسألة ما لأن ذلك هو المفتاح لفهم وحل المسألة. وبما أن جميع الأحداث هي عبارة عن مجموعة، فأنها عادة ما تكون مكتوبة على أنها مجموعات والتي يمكن تمثيلها بيانيا باستخدام أشكال (الرسوم البيانية لأشكال 'مخطط فين' Venn diagrams) المبينة أسفل.



الشكل 1 - مخطط فين -
النتائج الممكنة لتجربة

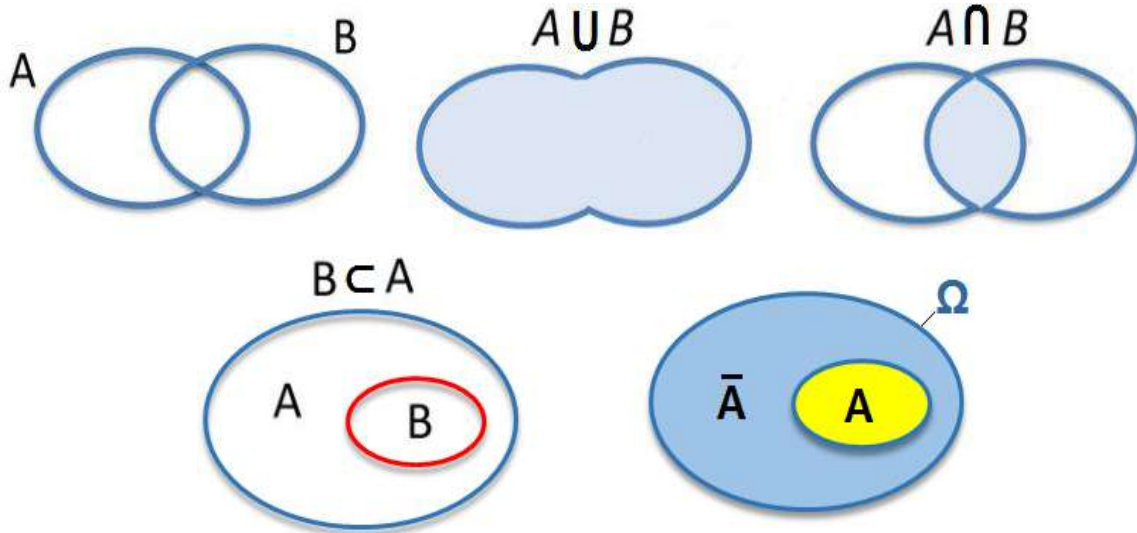
فإذا افترض أن Ω هي $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ مجموعة النتائج الممكنة لتجربة منتهية وكانت ℓ مجموعة أجزاء Ω . فإن كل عنصر من ℓ يدعى حدثاً (أو حادثة) مرتبطاً بالتجربة والذي يتمتع بالخصائص التالية:

- ♦ يدعى $\emptyset$ الحدث المستحيل (*impossible event*) وهو المجموعة الفارغة $\emptyset$ أي بدون أي عنصر وبدون أي نتيجة؛
- ♦ يدعى Ω الحدث المؤكد (*Certain event*) أو فضاء العينة Univers of possibilities، وهي المجموعة التي تحتوي على كل النتائج الممكنة للتجربة (مجموعة الأحداث الابتدائية)؛
- ♦ الحدث الأولي أو البسيط (*Elementary Event*) هو كل مجموعة جزئية من ℓ وحيدة العنصر والذي يمثل أيضا كل عنصر من فضاء العينة Ω ويرمز له غالبا بـ: e أو ω ؛

بشكل عام، من خلال البنود التالية تستخدم نظرية المجموعات للتعبير عن الأحداث العشوائية A و B في الفضاء العينة Ω :

- ♦ اتحاد حدثان $A \cup B$: مجموعة النتائج الممكنة الموجودة في A أو B أو كليهما؛
- ♦ تقاطع حدثان $A \cap B$: مجموعة النتائج الممكنة الموجودة في A و B في آن واحد؛

- ♦ يدعى $\bar{A}$ الحدث المكمل (*Complementary events*) للحدث A هو مجموعة النتائج الموجودة في فضاء العينة Ω وغير موجودة في A ومنه فإن اتحادهم يساوي فضاء العينة Ω بمعنى أن الحدث $\bar{A}$ متمم (مضاد) للحدث A فإن: $\Omega = A \cup \bar{A}$ ؛
- ♦ حدثين A و B **حدثان متنافيان** (*Mutually Exclusive Events*) حين يستحيل تحققهما في نفس الوقت، ونقول أيضا على أنهم متعارضين أو متضادين وحينها فإن $A \cap B = \emptyset$ ؛
- ♦ $\bar{\emptyset} = \Omega$ $\bar{\Omega} = \emptyset$ $\bar{\bar{A}} = A$ $\bar{A} \cap A = \emptyset$ $\bar{A} \cup A = \Omega$



الشكل 2. - بعض العمليات حول المجموعات للتعبير عن الأحداث

الجدول 1. - الترميز الرياضي للعمليات في نظرية المجموعات

الترميز الرياضي	المعنى
$\omega \in A$	ω هو عنصر من A
$A \cap B$	A تقاطع B
$A \cup B$	A اتحاد B
$A \subset B$	A محتوئ في المجموعة B
$\bar{A}$	متمم أو مكمل A

- ♦ كما يمكن توظيف بعض العمليات حول المجموعات الجزئية A و B و C من Ω ، كما يلي:

$$A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A \quad \text{-القوانين التبادلية Commutative}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{-القوانين التجميعية Associative}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{-القوانين التوزيعية Distributive :}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ و } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} : (\text{De Morgan's Laws}) \text{ -قوانين ديمورغان}$$

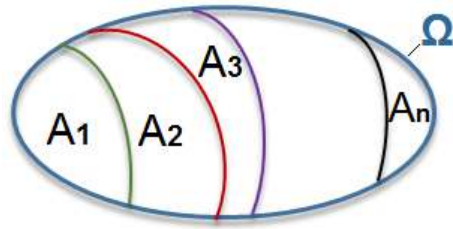
♦ **الحدثان المستقلان (Independent events)** حين لا يتأثر أي منهم بالآخر (وقوع أحدهم لا يؤثر أو لا يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الآخر)؛

♦ **نظام الأحداث الشاملة exhaustive system events** : نقول على أن سلسلة الحوادث $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ تشكل نظام أحداث شاملة حين تشكل الحوادث A_i مجموعة جزئية Ω أي أن :

$$1. \quad \emptyset \neq A_i \Leftarrow \forall A_i$$

$$2. \quad \forall (i \neq j), \quad (A_i \cap A_j) = \emptyset \text{ :كل حوادث النظام متنافية بالمتى}$$

$$3. \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega \text{ يشكل اتحاد حوادث النظام الفضاء الشامل أي}$$



الشكل.3 - نظام الشامل للأحداث

3.1. جبر الأحداث الابتدائية σ -algebra

لنفترض أن مجموع الحوادث تكون الفئة ℓ من أجزاء Ω حيث نستطيع تعريف الفئة ℓ بالمسلمات الثلاث:

- لكل حدث A ننسب إليه مكمله $\overline{A}$ من Ω ، إذاً $A \in \ell \Leftarrow \overline{A} \in \ell$ حيث إذا $\overline{A}$ يتحقق

- لكل مجموعة منتهية من الحوادث $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ من ℓ فإن $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \ell$

- نعرف الحدث الأكيد Ω حيث $\Omega \in \ell$

كما نستطيع استنتاج أن:

- الحدث المستحيل هو $\emptyset$ حيث $\emptyset \in \ell$

- لكل الحوادث A و B فإنه إذا $A, B \in \ell \Leftarrow A \cap B \in \ell; A \cup B \in \ell$

- لكل مجموعة منتهية من الحوادث $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ من ℓ فإن $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \ell$

-إذا كان فضاء العينة Ω يحتوي على n عنصر $(\text{card}(\Omega)=n)$ ، جبر الاحداث σ -algebra تتكون حينها من $2^{\text{card}(\Omega)} = 2^n$ عنصر.

تعرف كل هذه الخصائص على أن الفئة ℓ تشكل جبر σ -الأحداث (σ -algebra) أو عشيرة الحوادث.

وعليه تعتبر ℓ جبر- σ لفضاء العينة التي نسي كل عنصر من عناصرها حدثا. ولكي نستطيع أن نقول أن ℓ تشكل جبر- σ الأحداث، يقتضي بالتقديم أنها تحوي Ω ، بحيث أن مكملية أي حدث تشكل حدثا أيضا، واجتماع أي تسلسل أحداث هو حدث أيضا.

أي باختصار كي تشكل ℓ جبر- σ الأحداث، يقتضي أن:

$$\begin{aligned} &-\Omega \in \ell \\ &-\forall A \in \ell \Rightarrow \bar{A} \in \ell \\ &-\forall A_i, i=1, \dots, n \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \in \ell \end{aligned}$$

4.1 . معنى الاحتمال وتعريفه

1.4.1. المفهوم العملي والتقليدي للاحتمال:

يعرف الاحتمال على أنه دراسة التجارب العشوائية حيث يقيس فرص وقوع حدث ما. أي أن الهدف في نهاية المطاف هو أن نقرن كل حدث معرف على فضاء العينة للتجربة العشوائية بقيمة إحتمال الذي يمثل مقياسا عدديا يرمز له بالرمز $P(A)$ ويقيس فرصة وقوع الحادثة ويكون محصورا في المجال بين 0 و 1.

هنالك مدرستان تجتهدان لتفسير معنى الاحتمال. وتستعمل كلمة الاحتمال Probability للدلالة بصورة كمية على درجة اليقين على حوادث معينة، أو على النزعة التي تبديها الحوادث للظهور عند تكرار تجارب معينة بنفس الشروط.

أ - المدرسة الذاتية أو مدرسة بايز Bayse's:

والتي يعتبر مناصروها ان الاحتمال يمثل مقياس لدرجة القناعة بصحة وقوع الحادثة وذلك بعد موازنة الأسباب التي تؤدي إلى حدوثها.

ب- المدرسة الموضوعية: التي تعتبر الطريقة الكلاسيكية لقياس الاحتمال والتي ترى أن للاحتتمال وجوداً موضوعياً مستقلاً عن الباحث والذي عليه اكتشافه بالتجريب. وتفترض هذه المدرسة أن احتمال حادثة A مرتبطة بتجربة مفروضة يمكن تمثيله بنسبة تعبر على قيمة كسر عدد المرات التي تتحقق فيها الحادثة A على عدد مرات تكرار التجربة، وعليه فإن حساب احتمال مجرد مسألة عد أين يستعمل التحليل التوفيقي غالباً في هذا النطاق.

نظرية

لنفترض أن كل نتيجة في فضاء العينة المحدود $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ لها نفس فرص الوقوع، وعله فإن احتمال أي حدث A هو عدد النتائج المرتبطة في A مقسوماً على n .

بمعنى آخر إذا كان عدد النتائج الممكنة لتجربة ما هو n وكانت جميعها لها نفس الفرصة في الظهور وكان من بينها m نتيجة يمكن أن تظهر بها حادثة معينة، فإن احتمال وقوع هذه الحادثة هو: $\frac{n}{m}$ أي أن احتمال وقوع الحادثة A يرمز له بالرمز $P(A)$ ويساوي:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{n}{m}$$

حيث أن:

N_A - عدد عناصر الحادثة A = عدد الطرق التي يمكن أن تظهر بها A (عدد الحالات الملائمة أي التي يتحقق فيها الحدث A)؛

N - عدد عناصر فضاء العينة Ω = عدد الطرق التي يمكن أن تظهر بها Ω (عدد الحالات الممكنة أي الكلي للنواتج المتساوية الفرص في الوقوع).

وعموماً يمكن بسهولة أن تطبق هذه القاعدة باستخدام نظرية المجموعات كأساس للترميز اعتباراً أن الأحداث هي مجموعات حيث يمكن الحصول على صياغة أكثر دقة في مجال الاحتمالات وعليه فإن في حالة تساوي احتمال على Ω يكون لدينا من أجل كل حادثة A

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{عناصر عدد } A}{\text{عناصر عدد } \Omega}$$

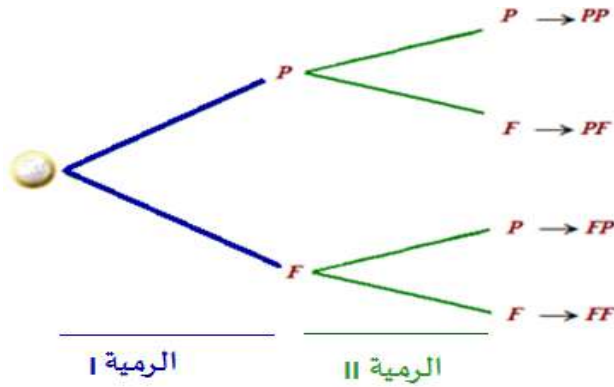
مثال:

نعتبر تجربة إلقاء قطعة النقود مرتين و A : حدث ظهور الصورة F ، يمكن أن نعتبر فضاء العينة $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ و $A = \{FF, PF, FP\}$ فاحتمال ظهور الصورة F يساوي

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{4} = 0,75$$

2.4.1. التعبير الهندسي عن الاحتمالات

يستحسن أن يتم حل مسائل الاحتمالات إستعمال أشكال هندسية توضح عناصر المسألة (الأحداث) والعلاقات بينها يصفة مبسطة. ويستخدم لهذا الغرض شجرة الاحتمال. تبين شجرة الاحتمال الأحداث المتنافية التي تنتج عن التجربة الواحدة أو المكررة وذلك من خلال أغصان تتفرع من أصل كما هو مبين في الشكلين أدناه.



الشكل 4 - فضاء العينة لرمي قطعة نقدية مرتين باعتماد شجرة الاحتمال

النتائج	اللون	الحجم
بيضاء، صغيرة	بيضاء	صغيرة
حمراء، صغيرة	حمراء	
بيضاء، متوسطة	بيضاء	متوسطة
حمراء، متوسطة	حمراء	
بيضاء، كبيرة	بيضاء	كبيرة
حمراء، كبيرة	حمراء	

الشكل 5 - فضاء العينة لسحب كرة بيضاء أو حمراء من مختلف الأحجام باعتماد شجرة الاحتمال

لاحظ: من أجل التوصل إلى تعبير واضح لقواعد الحساب الاحتمالي يتم تصريح البنود التالية:

- احتمال حدوث الحدث A هو رقم حيث $0 \leq P(A) \leq 1$
- إذا كان وقوع الحدث مستحيلا، فإن احتماله هو 0،
- إذا كان الحدث مؤكداً الوقوع، أي لا بد أن يقع، فإن احتماله هو 1،
- وإذا استخدمنا $P(\bar{A})$ لتمثيل احتمال ترجيح عدم وقوع الحدث A فإن،

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

وفي سياق تطور الاحتمال مع مرور الزمن وتقدم العلم ظهرت عدة تعاريف للاحتتمال منها ما هو بسيط ويعتمد على الإدراك الحسي ومنها ما يعتمد على التجربة وفكرة التكرار النسبي للحدث خلال تكرار التجربة عدداً كبيراً من المرات تحت نفس الشروط. وقد ساد في تقييم احتمال الحدث مقاربتين اساسيتين هما:

= **المقاربة الكلاسيكية:** التي تعتبر تساوي فرص وقوع حدث بعدد من الطرق المختلفة من مجموع عدد من الكيفيات ممكنة في Ω ؛

مثال :

ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي عند رمي قطعة نرد ؟.

الجواب : العدد الكلي للحالات الممكنة هو 6: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. وهناك 3 حالات ملائمة للحصول على عدد زوجي (2، 4 و6). وبافتراض أن كل الحالات الممكنة لها نفس الاحتمال فإن احتمال الحصول على عدد زوجي هو $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

تنبيه: لا يمكن استخدام هذه العلاقة إذا لم تكن احتمالات الحالات متساوية..

= **المقاربة التكرارية:** التي تركز على نظرية الأعداد الكبرى وتعتبر أن القيام بتجربة واحدة ليس كافي لحساب احتمال حدث ولذا يستلزم تكرار التجربة بعدد كبير من المرات لحساب الاحتمال الذي يمثل نهاية الكسر (عدد حالات ظهور الحدث\عدد التجارب) ويسمى أيضا الاحتمال التجريبي.

مثال:

إذا رمي نرد ذو ستة وجوه، مئة مرة وإذا كانت عدد مرات ظهور كل وجه من وجوهه كما يلي:

الوجه	1	2	3	4	5	6
تكرار الظهور	12	15	20	18	15	20

فمن الواضح أن احتمال ظهور الوجه 4 هو $\frac{18}{100}$ ، أي أن احتمال الحادثة (الوجه 4) هو 0,18 واحتمال ظهور الوجه 1 هو 0,12، وهكذا.. أما إذا كان الحدث A هو ظهور وجه زوجي فإن $P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{15+18+20}{100} = \frac{53}{100} = 0,53$ وإن احتمال ظهور وجه فردي هو 0,47.

والملاحظ، أن لكلتا المقاربتين انسداد وغموض فللمقاربة الكلاسيكية تركز على تصور كمالي مطلق للتجربة الذي ليس محققا بفعل عدم وجود التساوي التام (فيزيائيا أو في الأنظمة) وكذا في حالة Ω غير محدود. وبالنسبة للمقاربة التكرارية فالتكرار الكبير جدا ليس محققا دائما ومن هنا يظهر تعريف الاحتمال كنهاية لتكرار. ومن ناحية تطبيقية لا يمكن دائما

الحصول على احتمال حدث لأن هذه العملية تحتاج عدد غير منتهى من الملاحظات الشيء الغير متاح غالبا.

وللخروج من محددات المدارس والمقاربات في تعريف الاحتمال وارتكازا على توسع البحث الرياضي نحو الجانب المنطقي والذي مس بعدا فلسفيا منطقيا للبحث في نظرية الاحتمال، في بداية القرن العشرين. ارتئي الرياضيين للاتفاق على مقارنة بالمسلمات الرياضية لتعريف الاحتمال.

3.4.1. التعريف التجريدي الرياضي للاحتتمال:

بديهيات كولموغوروف ونظرية الاحتمال الأساسية

(Kolmogorov Axioms Of Probability)

ترتكز النظرية الحديثة للاحتتمالات على البديهيات التالية:

تعريف 1:

ويعرف الاحتمال على $(\Omega, \mathcal{F})$ أو قانون احتمالي على أنه أية دالة تطبيق P الذي منطلقها الصف $\mathcal{F}$ من الأحداث ومستقرها المجال الحقيقي $[0,1]$ وتتمتع بتحقيق البديهيات التالية:

1. لكل حدث A من الصف $\mathcal{F}$ للأحداث ننسب إليه احتمال $0 \leq P(A) \leq 1$ ؛

2. احتمال الحدث المؤكد $P(\Omega) = 1$ ؛

3. لأي مجموعة منتهية من الأحداث $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ والمتنافية بالتبادل فإن

$$P(\cup A_i) = \sum P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) \dots + P(A_n)$$

تعريف 2: (الفضاء الاحتمالي Probability space)

تدعى الثلاثية $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضاء الاحتمال الموافق للتجربة. اين يجسد الفضاء الاحتمالي نموذجا رياضيا لتجربة عشوائية ما. ويتكون من الثلاثية $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ، حيث يمثل Ω فضاء العينة أي مجموعة الأحداث الابتدائية ويمثل $\mathcal{F}$ جبر- σ الأحداث الابتدائية (عشيرة الحوادث σ -algebra) فيما يمثل P قياس احتمالي probability measure على $\mathcal{F}$.

ومن المهم أن نلاحظ أن P تصوغ دالة معرفة على $\mathcal{F}$ وليس على فضاء العينة Ω .

ونعرف القياس الاحتمالي $P : \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ ، على أنه دالة معرفة على الفئة $\mathcal{F}$ حيث:

- لأي مجموعة منتهية من الأحداث المتنافية بالتبادل $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{A}$
- فإن $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$
- احتمال الحدث المؤكد $P(\Omega) = 1$

4.4.1. بعض النظريات الأساسية على الاحتمال:

استناداً على البديهيات السابقة يمكن أن نستنتج النظريات التالية:

$$(1) \text{ لكل حدث مستحيل } P(\emptyset) = 0$$

$$(2) \text{ إذا كان } \bar{A} \text{ مكمل للحدث } A \text{ فإن } P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$(3) - \text{ إذا كان } A \text{ و } B \text{ حدثين وإذا كان } A \subset B \text{ فإن } P(A) \leq P(B)$$

$$(4) \text{ إذا كان } A \text{ و } B \text{ حدثين فإن: (بديهية الانفصال Disjunctive Axiom)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

والمسماة علاقة بوانكاريه¹ Poincaré وعامة لأي مجموعة $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ من الأحداث فإن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right)$$

$$(5) \text{ إذا كانت الأحداث } A, B \text{ تمثل أحداثاً متنافية فإن:}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ لأن } (A \cap B) = \emptyset$$

$$(6) \text{ لأي حدثين } A \text{ و } B \text{ فإن: } P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$(7) \text{ لأي مجموعة منتهية من الأحداث } \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \text{ فإن: } P(\cup A_i) \leq \sum P(A_i)$$

$$(8) \text{ إذا كانت } A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \text{ وكانت الأحداث } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ أحداثاً متنافية}$$

$$\text{فإن: } P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

$$(9) \text{ لأي مجموعة من الأحداث } \{A_1, A_2, \dots\} \text{ حيث } A_i \downarrow \varphi \text{ فإن}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i) = 0 \text{ (استمرار تسلسلي رتيبي monotone sequential continuity)}$$

$$(10) \text{ نظرية الاحتمالات الكلية (Theorem of total probabilities):}$$

ليكن نظام شامل من الأحداث B_i فإنه:

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) \quad : \quad \forall A$$

¹ Henri Poincaré, (1854 – 1912) & Abraham de Moivre, (1667 – 1754).

5.1. التحليل التوافقي (أساليب العد)

Combinatorial Analysis (Enumeration Methods)

وهي أساليب تعتمد على بعض مبادئ الجبر الرياضي مفيدة في تحديد عدد النتائج المرتبطة بأحداث معينة لتجارب عشوائية. يعد التمثيل التوافقي من الطرق التي تستطيع تحديد عدد النتائج الممكنة لتجربة ما بغير طرق العد البسيطة.

العاملية أو مضروب n (Factorial n)

نسمى مضروب n (أو n عاملي) ويرمز له بـ $n!$ ، حاصل ضرب الأعداد الطبيعية من 1 إلى n ويعرف بالصيغة:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

وهو عدد الطرق التي يمكن أن نرتبها n عنصر من الأشياء
خصائص $n!$:

$$0! = 1 \quad \blacksquare$$

$$n! = [1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)] \times n = [(n-1)!] \times n \quad \blacksquare$$

التبديلات Permutations

نسمي تبديلات n عنصر، كل سلسلة أو كل كيفية مرتبة لتلك n عنصر. وتختلف التبديلات سوى بترتيب العناصر المكونة لها (الترتيب مهم). وتحسب عدد التبديلات سوى بالعاملية $n!$ ، أي:

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$$

ملاحظة: إذا كان من بين n عنصر من المجموعة يوجد مجموعتين من $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ عنصر متشابه حيث $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n = n$ عنصر مختلف. يكون عدد

$$P_{n,k_1,k_2} = \frac{n!}{k_1! \times k_2! \times k_3! \times \dots \times k_n!}$$

مثال:

كم عدد يمكننا تشكيله من الأرقام:	في مأدبة عشاء بكم طريقة مختلفة يمكننا
أ- 1، 9، 8، 3	ترتيب جلوس خمسة أزواج (couples) حول
ب- 1، 4، 4، 4، 6، 9	مائدة مستديرة مع عدم فرض أي قيد للجلوس
الحل: $P_{4=4} = 24$ و $P_{7,3,2} = \frac{7!}{3! \times 2!} = 420$	الحل: $10!$

الترتيبات Arrangements

نسمي ترتيبات p حسب كيفية من بين n عنصر، جميع الكيفيات المرتبة لتلك n عنصر حسب p كيفية. وتختلف الترتيبات بترتيب أو\وطبيعة العناصر المكونة لها (الترتيب مهم).

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)!$$

من خصائص الترتيبات أن: $A_n^n = n!$

مثال:

كيف يمكننا اختيار 4 عمال من بين 6 مترشحين لشغل 4 مناصب مختلفة في مؤسسة:

$$\text{الحل: } A_6^4 = \frac{6!}{2!} = 360$$

التوفيقات Combinaisons

نسمي «التوافيق» في مجموعة من الأشياء بأنه «أي مجموعة جزئية بصرف النظر عن الترتيب الذي تتخذ عناصر هذه المجموعة الجزئية» وهي عدد الطرق التي يمكن فيها اخذ p عنصر من الأشياء من بين مجموعة تضم n عنصر من الأشياء دون مراعاة الترتيب. نصيغ عدد التوافيق بـ:

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

حيث:

C : عدد التوافيق، أي مجموع الكيفيات التي يمكن أن ننتقي بها أفراد المجموعة دون مراعاة الترتيب،

n : عدد أفراد المجموعة التي يراد ترتيبها.

p : يرمز إلى كيفية اخذ أفراد المجموعة.

مثال:

عدد الطرق التي يمكن أن نركب بها ثنائيات من 4 كتب هي 6 طرق: AB, AC, AD, BC, BD, CD أي:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \times (4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{12}{2} = 6$$

خصائص التوافيق:

- $C_n^p = C_n^{n-p}$ عدد الكيفيات إختيار p عنصر من بين n يساوي عدد كيفيات لعدم إختيار $n-p$ عنصر من بين تلك n عنصر. تسمى التوفيقتين بالتبادل المميز.

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} \quad \text{و} \quad C_n^n = C_n^0 = 1$$

- دستور ثنائي الحد أو النظرية الثنائية:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \times x^k y^{n-k} =$$

$$(x + y)^n = y^n + (n)xy^{n-1} + \left(\frac{n(n-1)}{2!}\right)x^2y^{n-2} + \dots + (n)x^{n-1}y + x^n$$

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$$

مثال تطبيق استعمال التوافيق في حساب الاحتمالات :

يتكون مجلس إدارة شركة ما من 12 عضواً، من بينهم 09 رجال و 03 نساء. ولنفترض ان نريد تكوين لجنة من 04 أعضاء.

أ. ما احتمال أن تحتوي اللجنة على امرأة واحدة فقط؟

ب. إذا افترضنا أن الأشخاص يتم تعيينهم حسب ترتيب القرعة: رئيس ونائب وكاتب وأمين المال. ما احتمال أن تحتوي اللجنة على رجلين على الأقل؟

الحل

أ-احتمال أن تحتوي اللجنة على امرأة واحدة فقط: يتم السحب هنا دون تكرار ودون ترتيبهم ونستخرج عدد عناصر مجموعة الأساس أي $|\Omega|$ للحالات الممكنة للحصول على لجنة رباعية الاعضاء من خلال:

$$\text{لجنة ممكنة} = \frac{12!}{4! \times (8)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{(4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 8!} = \frac{11880}{24} = 495$$

لنسمي F الحدث الذي يمثل احتواء اللجنة على امرأة واحدة فقط، فإحتمال F يساوي:

$$P(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{C_3^1 \times C_9^3}{C_{12}^4} = \frac{252}{495} = 0,5091$$

ب-إذا افترضنا أن 4 أشخاص يتم تعيينهم حسب ترتيب رئيس ونائب وكاتب وأمين المال: نلاحظ أن في السحب الترتيب مهم مع عدم التكرار وعليه نستخرج عدد عناصر مجموعة الأساس أي $|\Omega|$ للحالات

$$\text{الممكنة كالتالي: } |\Omega| = A_{12}^4 = \frac{12!}{(8)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8!} = 11880$$

لنسمي M الحدث الذي يمثل احتواء اللجنة على رجلين على الأقل وعليه احتمال أن تحتوي اللجنة على رجلين على الأقل يساوي:

$$P(M) = \frac{|M|}{|\Omega|} = \frac{(A_3^0 \times A_9^4) + (A_3^1 \times A_9^3) + (A_3^2 \times A_9^2)}{A_{12}^4} = \frac{4968}{11880} = 0,4181$$

6.1. الاحتمال الشرطي Conditional probability

أحيانا إذا أجريت تجربة بعلم أن حدثاً معيناً قد وقع فقد يؤثر وقوع هذا الحدث عن نتيجة حدثاً آخر شأن ذلك أن تتغير الصورة الاحتمالية وأن تتغير بالتالي الأحكام الاحتمالية الأخرى. إن معرفة وقوع حدث من الأحداث المتعلقة بتجربة مفروضة من شأنها أن تغير احتمالات الأحداث الأخرى المتعلقة بالتجربة ذاتها والتي هي أحداث غير مستقلة (مشروطة)، فإن الاحتمال المشروط حدث ان يفترض أنهما مرتبطان بالتجربة والتي من خلالها وقوع أحدهما يؤثر في وقوع الآخر.

تعريف:

نسمي الاحتمال الشرطي أو الاحتمال المشروط للحدث B عند شرط وقوع A كل احتمال وقوع الحدث B مع العلم (بفرض) أن الحدث A قد وقع، الكسر المرموز له بـ: $P(B/A)$

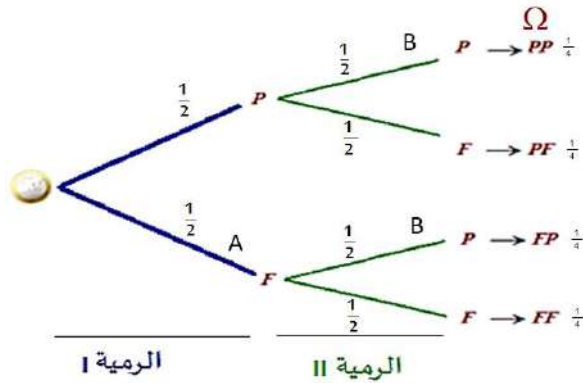
$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{حيث:}$$

ونقول على ان الحادثتين تابعتان حيث A حدث غير مستحيل ($P(A) > 0$).

مثال:

نعتبر تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين. احسب احتمال ظهور الكتابة P في الرمية الثانية إذا ظهرت الصورة F في الرمية الأولى.

الحل :



المطلوب هو حساب احتمال $P(B/A)$ ؟ يمكن

أن نعتبر فضاء العينة التالي:

$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ نعرف الحدثين،

A : ظهور F في الرمية الأولى I

B : ظهور P في الرمية الثانية II

$\{FP\} = A \cap B$ ، $\{PP, FP\} = B$ ، $\{FP, FF\} = A$

$$P(A) = \frac{2}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{2}{4} = 0,5 = 50\%$$

يكون احتمال $P(B/A)$:

خصائص الاحتمال المشروط:

- لكل حدثين A و B فإن:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B) \quad (\text{دستور الاحتمال المركب})$$

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) \quad -$$

مثال:

يمكن لمريض أن يكون في حالة A أو لا. يقوم المريض بتحليل يبين إيجابيته أم لا. حيث يتم إعطاء الاحتمالات في الجدول التالي:

تحليل سلبي (-)	تحليل إيجابي (+)	
0,002	0,010	الحالة A
0,987	0,001	بحصه جيدة (سليم)

لاحظ أن الحالة A نادرة جدًا ، حيث تمس 12 شخصًا فقط من بين كل 1000 شخص. وأيضًا ، يكون التحليل الإيجابي عند المريض المصاب بالحالة بعشرة أضعاف أكثر عرضة مقارنة بالمريض بدون الحالة.

نحصل على الاحتمالات الشرطية التالية: $P(A) = 12/1000$

$$P(A \wedge +) = 10 \times P(\text{سليم} \wedge +)$$

$$P(A/+)=0,010/0,011=10/11=0,909$$

$$P(-/\text{سليم})=0,987/0,988=987/988=0,999$$

$$P(+/A)=0,010/0,012=10/12=0,833$$

$$P(-/\text{سليم})=0,987/0,988=987/988=0,999$$

7.1. نظرية بايز أو نظرية الأسباب Bayes' theorem

1.7.1. قاعدة بايز (Bayes' rule):

نظرية 1 - نفترض أن $P(B) > 0$. وعليه :

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)} \quad (1) \dots$$

برهان:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{لاحظ أن}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{و}$$

$$P(A \cap B) = P(B/A)P(A) \quad \text{بإعادة ترتيب الصيغة الثانية :}$$

¹ Thomas Bayes (1702 - 1761)

وعليه فإن النظرية (1) تتبع بعد تبديل.

لنتأكد من أن قاعدة بايز تعمل في المثال الطبي المذكور أعلاه.

لدينا: $P(A)=12/1000$ $P(+)=0,011=11/1000$ $P(A/+)=10/11$

$$P(A/+) = \frac{P(+/A)P(A)}{P(+)} = \frac{\frac{10}{11} \cdot \frac{12}{1000}}{\frac{11}{1000}} = \frac{10}{11}$$

استخدام قاعدة بايز نحصل على:

قاعدة بايز مهمة في مجموعة من المسائل المتعلقة بنظرية اللعب، والمالية، والاقتصاد الكلي.

2.7.1. النظرية الشاملة للاحتتمالات الكلية

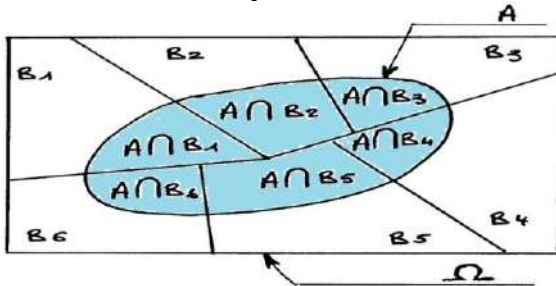
ليكن النظام الشامل من الأحداث $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ في فضاء العينة Ω فلأى حدث A فإن:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(A/B_i) \times P(B_i)$$

$$P(A) = P(A/B_1) \times P(B_1) + \dots + P(A/B_n) \times P(B_n)$$

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup (A \cap B_4) \cup (A \cap B_5) \cup (A \cap B_6)$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset; \bigcup_i B_i = \Omega$$



الشكل 6 - شكل توضيحي لفضاء عينة من 6 أجزاء (نظام الاحداث كامل)

نظرية 2 - الصيغة الثانية لنظرية بايز: لكل سلسلة $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ من الأحداث

المتنافية والشاملة في فضاء العينة Ω

$$(\Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \dots \cup B_n \text{ و } \emptyset = B_j \cap B_i \iff \forall i \neq j)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(A/B_i) \times P(B_i)$$

وبتعميم الصيغة (1) لنظرية بايز نصل للصيغة الشاملة (2) حيث لكل حدث B_k فإن:

$$(2) \dots P(B_k/A) = \frac{P(A/B_k)P(B_k)}{P(A)} = \frac{P(A/B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A/B_i) \times P(B_i)}$$

تسمى هذه النظرية نظرية الاحتمال السببي لأنها تمكن من حساب احتمال أن يكون حدث ما (B_k) هو المسبب لوقوع حدث آخر (A).

مثال :

في بحث على طلبة كلية الطب في مادة التشريح وجدَّ أنَّ 20% من الطلبة والطالبات ممتازون وأنَّ 70% متوسطون وأنَّ الباقون ضعفاء، ووجدَّ أنَّ نسبة الطالبات في هذه المجموعات الثلاث هي 50%، 60%، 30% على الترتيب.

فإذا اختير عشوائياً شخصاً من بينهم ووجدَّ أنه طالبة فاحسب احتمال أن تكون هذه الطالبة متوسطة في مادة التشريح.

الحل : لنفرض الأحداث التالية:

A حدث أن الفرد المختار عشوائياً طالبة، B_1 و B_2 و B_3 على التوالي حدث أن الطالب المختار ممتاز و متوسط و ضعيف.

$k = 2$ فإنَّ :

- احتمال أن الشخص المختار طالبة ذات درجة ممتاز: $P(A/B_1)=0,5$
- احتمال أن الشخص المختار طالبة ذات درجة متوسط: $P(A/B_2)=0,6$
- احتمال أن الشخص المختار طالبة ذات درجة ضعيف: $P(A/B_3)=0,3$

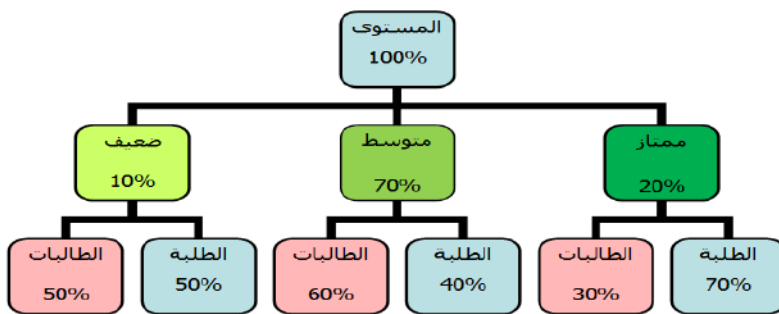
- $P(B_1)=0,2$: احتمال أن يكون الطالب ممتاز

- $P(B_2)=0,7$: احتمال أن يكون الطالب متوسط

- إذا يكون احتمال أن يكون الطالب ضعيف هو: $P(B_3)=0,1$

$$P(B_k/A) = \frac{P(A/B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A/B_i) \times P(B_i)}$$

$$P(B_2/A) = \frac{P(A/B_2)P(B_2)}{\sum_i P(A/B_i) \times P(B_i)} = \frac{0.6 \times 0.7}{(0.2 \times 0.5) + (0.7 \times 0.6) + (0.1 \times 0.3)} = 0.7636$$



شكل 7. شكل توضيحي لتصوير

وصياغة المسألة

3.7.1. الأحداث المستقلة Independent events

نقول أن الأحداث A و B تمثل أحداثاً مستقلة، إذا كان: $P(A/B) = P(A)$ ، ويعني هذا أن حدوث الحدث A لا يتأثر بحدوث أو عدم حدوث الحدث B . وعليه فإن:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

وبتحقق هذه المعادلة فإننا نقول أن الحدثين A و B هما حدثان مستقلان. كما نقول أيضا أن إذا كان الحدث A مستقل على الحدث B فيكون أيضا الحدث B مستقل على الحدث A .
وبتعميم المعادلة لأي مجموعة منتهية من الحوادث المستقلة $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ فإن

$$P(\cap A_i) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n) = \prod_i P(A_i)$$

ملاحظة: يجب عدم الخلط بين مفهومي التنافي واستقلالية الاحداث، فإذا كان حدثين A و B متنافيين فإن $(A \cap B) = \emptyset$ ومنه $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ، في حين إذا كان A و B مستقلين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

الجدول 2- جدول ملخص الاحتمالات

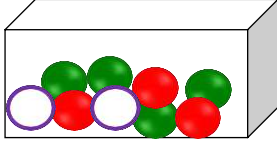
الاحتمال	الحوادث
$P(A) \in [0,1]$	A
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	$\bar{A}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ إذا كانت الحوادث A و B متنافية $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	A أو B $A \cup B$
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = P(B) \times P(A/B)$ إذا كانت الحوادث A و B مستقلة $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	A و B $A \cap B$
$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A/B) \times P(B)}{P(A)}$	B/A

الجدول 3- جدول ملخص ربط تعبير الحوادث بالاحتمالات

نوع الحادثة	التعبير	القانون
الحوادث المتتمة	تتكون نواتج حادثة من جمتمع نواتج فضاء العينو التي ليست من نواتج الحادثة الأخرى.	لأي حادثة A ، $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
الاحتمال المشروط	إعطاء معلومات إضافية عن احتمال حادثة ما.	يكون احتمال الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A : $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
الحدثان غير المستقلين	احتمال وقوع إحدى الحادثتين يؤثر في احتمال وقوع الأخرى.	إذا كانت A و B حادثتين غير مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$
الحدثان المستقلتان	احتمال وقوع الحادثة الأولى لا يؤثر في احتمال وقوع الحادثة الثانية.	إذا كانت A و B حادثتين مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
الحوادث غير المتنافية	حوادث توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A و B حادثتين متنافيتين، فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
الحوادث المتنافية	حوادث لا توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A و B حادثتين متنافيتين، فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

مثال 1:

صندوق يحوي 9 كريات غير متمايزة في اللمس : 2 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء و 4 كرات خضراء .
نسحب 3 كرات في آن واحد من هذا الصندوق .



(1) عين بهذه الصيغة عدد طرق سحب 3 كرات.

(2) أحسب أتممال الءواءء الءالفة :

A "سحب كرة بفاء على الأقل".

B "لا ءوءء أفة كرة بفاء من بفا الكراء الءلاء المسءوءة".

الءل:

(1) عدد طرق سحب 3 كراء من هذا الكفا هو : $C_9^3 = 84$

(2.أ) A " (1 بفاء و 2 غير بفاء) أو (2 بفاء و 1 غير بفاء) " .

عدد الءالاء الملاءمة للءاءء A هو : $(C_2^1 \times C_7^2) + (C_2^2 \times C_7^1) = 49$.

$$P(A) = \frac{49}{84} = \frac{7}{12} \quad \text{إذن :}$$

(2.ب) B " (لا ءوءء أة كرة بفاء) " معناه سحب 3 كراء من 7 غير البفاء .

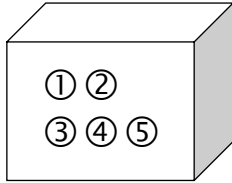
عدد الءالاء الملاءمة للءاءء B هو : $C_7^3 = 35$. إذن : $P(B) = \frac{35}{84} = \frac{5}{12}$

ملاءظة :

الءاءءة B هف ءاءءة معاكسة للءاءءة A ، إذن : $P(B) = 1 - P(A) = \frac{5}{12}$

مثال 2:

صندوق يحوي 5 كراء غير متمايزة فف اللمس مرقمة من 1 إلى 5 ، نسحب على الءوالف كرففن ءون
إرجاع الكرفة المسءوءة ءءف فهاة الءجرة.



عفا عدد طرق سحب كرففن فهاة الصفة.

الءل:

لءفنا 5 طرق لسحب الكرفة الأولى و 4 طرق لسحب الكرفة الءالفة

(الكرفة المسءوءة الأولى لا ءعاا إلى الصندوق)

. عدد الطرق الممكنة لسحب كرففن من هذا الصندوق هف : $5 \times 4 = 20$

. كذلك عدد طرق سحب كرففن على الءوالف ءون إرجاع من هذا الصندوق هو عدد

ءرففباء لعنصرفن من مءموعة ذات 5 عناصر : $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$

II- المتغيرات العشوائية والتوزيع الاحتمالي Random Variable & Probability Distributions

1.II. مفهوم وتعريف المتغير العشوائي Random Variable

يعتبر المتغير العشوائي النتيجة العددية لتجربة فهو بذلك التمثيل بمتغير عددي الغير محدد مسبقا لمختلف الحوادث، و بالتالي يمكن أن ننسب لأي حادثة تصور لمتغير وتقرير وقوع الحدث أم لا بمقياس عددي ينسب لهذا المتغير. وتستخدم المتغيرات العشوائية لتمثيل الظواهر المختلفة من أجل دراستها والتوقع بشأنها.

الأمثلة على ذلك:

- مجموع النقاط التي تعرضها رمية عدد من قطع النرد
- مبلغ الشراء خلال زيارة المتجر
- مدة الانتظار في قاعة علاج

التعريف الرياضي للمتغير العشوائي

ليكن أننا حصلنا في تجربة عشوائية على فضاء العينة التالي $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ نعرف المتغير العشوائي X على أنه يمثل دالة عددية معرفّة على فضاء العينة Ω كما يلي :

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{حيث :}$$

$$\forall i=1,2,\dots,n, \forall \omega_i \in \Omega, \exists c \in \mathbb{R} : X(\omega_i) = c$$

فالمتغير العشوائي هو دالة رياضية تنسب لكل حدث ω من فضاء العينة Ω ، عدداً مناسباً من الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. بحيث تكون الصورة العاكسة لأي مجال من $\mathbb{R}$ حدثاً في Ω . أي أنه بصيغة أخرى إذا كان Ω الفضاء عيّنة لتجربة عشوائية ما، فإن أي دالة X تخصص عدداً حقيقياً $X(\omega)$ حقيقي واحد وواحد فقط لكل عنصر ω من عناصر Ω تدعى متغيراً عشوائياً Random Variable (أو متغير تصادفي stochastic variable). وبمعنى آخر فإن $X(\omega)$ هو العدد الحقيقي الذي خصصته الدالة X ليرافق العنصر ω من فضاء العينة Ω .

يمكن تقسيم المتغيرات العشوائية حسب قيمها إلى نوعين رئيسين:

1. المتغيرات العشوائية المنفصلة أو المتقطعة (Discrete random variable) التي يمكن أن

تأخذ قيماً محددة ومعلومة قابلة للعد تنتمي إلى مجموعة منتهية، أو غير منتهية (عادة ما تكون قيم الأعداد صحيحة غير كسرية) ، وبالتالي يكون المتغير X من الشكل:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$$

مثال:

إذا إفترضنا أن المتغير العشوائي X يمثل مجموع الرقمين الناتجين من جراء تجربة إلقاء حجري النرد، نجد أن القيم التي يمكن أن يأخذها هذا المتغير العشوائي ستكون كالتالي:

$$X = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

ويرافق هذه القيم احتمالات مختلفة يتم حسابها بمبدئ حساب الاحتمالات أي عدد الحالات التي يكون فيها المتغير بقيمة معينة على عدد الحالات الكلية.

2. المتغيرات العشوائية المستمرة أو المتصلة (Continuous random variable) حين تأخذ

عدداً لانهائياً من القيم الغير محددة ولا يمكن عدّها والتي تكون محصورة بين حدي فترة معينة يمكن أن تختلف تبعا درجة الدقة المطلوبة. بمعنى أن المتغير يأخذ جميع القيم التي تقع في مجال تغيّره، أي المتغير X يكون من الشكل: $X = \{x : a \leq x \leq b; a, b \in \mathbb{R}\}$

2.11. التوزيعات الاحتمالية Probability Distribution

نعتبر في مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي لأي ظاهرة عشوائية أن لها توزيع احتمالي يصفها. حيث يتم من خلال هذا التوزيع تحديد العلاقة بين قيم المتغير العشوائي والاحتمالات المرافقة للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي إن كان متقطعا أو للمجالات التي يمكن أن يقع فيها المتغير إن كان مستمرا.

وعليه يتم تعريف التوزيع الاحتمالي (أو القانون الاحتمالي) لمتغير عشوائي من خلال تحديد القيم الممكنة للمتغير والاحتمالات المقابلة له. يكون هذا إما من خلال جدول (جدول التوزيع الاحتمالي) أو دالة، تسمى دالة الكتلة أو كثافة الاحتمالية. والتي تشترط أن تكون موجبة دوماً وأن يكون مجموع الاحتمالات مساويا للواحد.

ويعرف التوزيع الاحتمالي بدلالة دالة الكتلة الاحتمالية probability mass function والتي غالبا ما تدل على الاحتمال $P(X = x)$ إذا كان المتغير متقطع أو منفصلاً ، كما أنه يطلق على الدالة المرافقة للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر أو المتصل بدلالة دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ function density probability.

1.2.ii. دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع Discrete Probability Distributions

يعتبر تعريفاً لتوزيع احتمالي بدلالة دالة الكتلة الاحتمالية الممثلة للمتغير العشوائي المنقطع X ، كل دالة $P(X)$ التي تأخذ قيم الاحتمالات $P(X = x_1), P(X = x_2), \dots, P(X = x_k)$ لقيم المتغير $X = x_1, x_2, \dots, x_k$ على الترتيب، حيث يشترط:

« يكون الاحتمال المرافق لأي قيمة للمتغير العشوائي المنقطع X : $0 \leq P(X = x) \leq 1$ »
 « يكون مجموع الاحتمالات لجميع القيم الممكنة الحدوث مساوية 1، أي:

$$\sum_{x \in X} P(X = x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n) = 1$$

حيث ترمز P الى دالة الاحتمال للمتغير X والتي تمثل قيمة الاحتمال، بينما ترمز x_i للقيمة التي يأخذها المتغير العشوائي X .

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$P(X = x_3)$	...	$P(X = x_n)$

مثال: في تجربة بسيطة كتجربة رمي قطعة نقدية مرتين، يمكن لتجربتنا أن تنتهي لأي نتيجة من فضاء العينة التالي: $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. يمكن أن نعين المتغير العشوائي X التي يمثل عدد مرات الحصول على الكتابة F . في هذه الحالة القيم الممكنة للمتغير X هي: 0، 1، 2، ونلاحظ أن X يمثل دالة عددية معرفّة على فضاء العينة Ω أي $X: \Omega \rightarrow \{0, 1, 2\}$. أين كل عنصر من Ω يولد قيمة للمتغير X . الاحتمالات الملحقه بقيم المتغير يمكن حسابها وتدوينها في جدول التوزيع الاحتمالي كما يلي: مجموع احتمالاتها يساوي 1، كما يبينه التالي:

2	1	0	x_i	المتغير
1/4	1/2	1/4	$P(X = x_i)$	الاحتمال

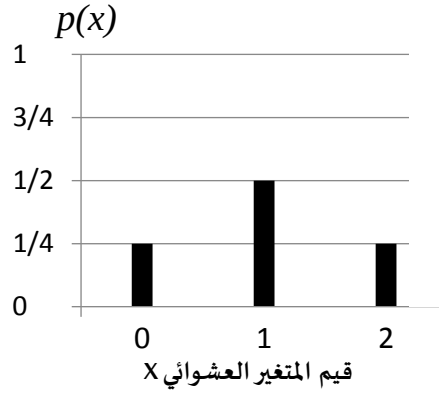
$$\sum_{x=0}^2 P(X = x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

فهذا يعتبر تعريفاً لتوزيع احتمالي للمتغير X ، لعدد مرات ظهور الصورة في رميتين لقطعة نقدية.

غالبا ما يكون من المفيد تمثيل بيانيا لدالة الكتلة الاحتمالية لمتغير عشوائي متقطع X وهذا بتقديمها في شكل رسم بياني يكون منخلا لأعمدة متوازية على المحور الافقي الممثل لمحور قيم المتغير X ونخطط فيه قيم الاحتمالات $P(x)$ على المحور العمودي.

على سبيل المثال، نمثل بيانيا دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X المعروف على تجربة إلقاء قطعة نقدية مرتين:

$$P(X = 2) = \frac{1}{4} ; P(X = 1) = \frac{2}{4} ; P(X = 0) = \frac{1}{4}$$



الشكل 8 - التمثيل البياني لدالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع

2.2.2. دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر Continuous Probability Distributions

دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر (المتصل) X هي الدالة f المعرفة بـ:

$$f(x) \geq 0 \quad -1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1 \quad -2$$

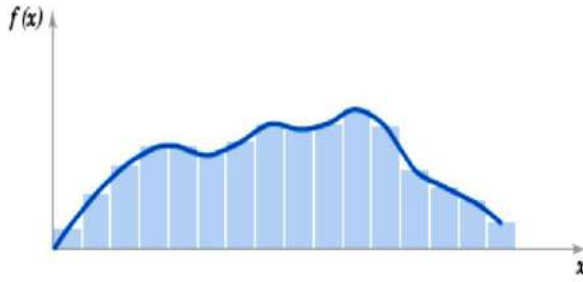
$$\forall a < b \in R, \quad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad -3$$

ولهذا فإنه يمكن التعبير عن التوزيعات المستمرة المطلقة بوساطة دالة الكثافة الاحتمالية أو دالة الاحتمال، وهي عبارة عن دالة قابلة للتكامل، موجبة حتماً و معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية وعليه فدالة الكثافة الاحتمالية هي إذاً الدالة الممثلة لأي توزيع احتمالي عن طريق التكامل. فإذا كان المتغير X متغيراً عشوائياً فإن التوزيع الاحتمالي الموافق له ينسب لكل مجال $[a, b]$ للمتغير X احتمالاً: بمعنى أن احتمال أن يأخذ المتغير X قيمة ضمن هذا المجال.

كذلك لكل x_1 و x_2 قيم لـ X متغير عشوائي مستمر فإن:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2)$$

وعلى نفس المنوال يمكن تمثيل بيانياً دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي مستمر X وهذا بتقديمها في شكل رسم بياني يمثل الدالة f ممثلة بمنحنى متصل.



الشكل 9 - المدرج التقريبي
لدالة الكثافة الاحتمالية

3.11. دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ Cumulative Distribution Function

إن دالة التوزيع $F(x)$ تحدد احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ أي قيمة أقل من أو تساوي x . أي تمثل احتمال مجال من أصغر قيمة للمتغير إلى نقطة ما. فإن وظيفة التوزيع هي القيمة المتراكمة لدالة الاحتمال. لذلك، تعرّف دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ - وتسمى أيضا "الدالة التجميعية" المستنتجة من دالة الكتلة الاحتمالية أو الكثافة الاحتمالية حسب طبيعة المتغير العشوائي كما يلي:

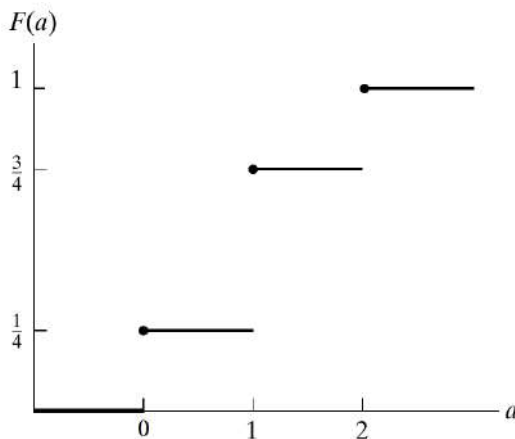
بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{X \leq x} P(X = x)$$

يمكننا تمثيل بياني لدالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي المتقطع X حيث تأخذ شكلا سلميا، وغير متناقصة وتكون وأكبر قيمة ممكنة لها هي 1.

على سبيل المثال في التجربة السابقة لرمي قطعة نقدية مرتين نتحصل على الشكل 11:

المتغير	X	0	1	2
كثافة الاحتمال	$P(X=x)$	1/4	1/2	1/4
دالة التوزيع	$F(a)=P(X \leq a)$	1/4	3/4	1



الشكل 10- التمثيل البياني لدالة التوزيع
التراكمية للمتغيرة العشوائية المتقطعة.

ونقول عن توزيع احتمالي يعود لمتغير عشوائي مستمر أنه التوزيع $F(x)$ المعروف بـ:

$$\forall -\infty < x < \infty, \quad F(x) = P(X \leq x) = P([-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

لاحظ أن إشارة التكامل هنا تقابل إشارة المجموع في حالة المتغير العشوائي المتقطع.

ملاحظة: يشار في بعض الأحيان إلى بعض المصطلحات الشائعة الإضافية. حيث غالبا ما تسمى دالة التوزيع $F(x)$ دالة الكثافة التراكمية، ونسعى دالة الكتلة $P(X=x)$ أو الكثافة $f(x)$ بدالة الاحتمال.

يشترط أن تتمتع دالة التوزيع $F(x)$ بالخصائص التالية:

تكون الدالة غير تناقصية $\forall x \leq y \dots F(x) \leq F(y)$

$$F(a) = P(X \leq a) = \begin{cases} 0 & -\infty \leq a < x_1 \\ P(X = x_1) & x_1 \leq a < x_2 \\ P(X = x_1) + P(X = x_2) & x_2 \leq a < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n) = 1 & x_n \leq a < +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

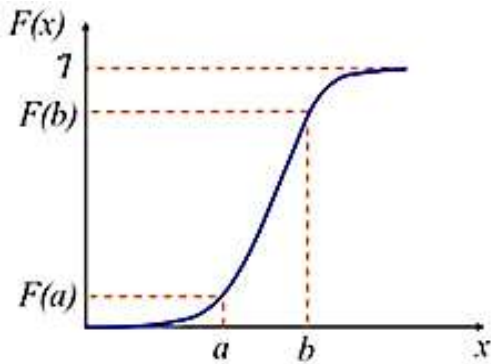
$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

يمكن استنتاج دالة الكثافة من خلال اشتقاق دالة التوزيع من خلال القاعدة الرياضية

العامة للاينيز *Leibnitz rule* أي $f(x)=F'(x)$

$$F'(x) = \frac{d \int_{-\infty}^x f(t)dt}{dx} = f(x) \Rightarrow \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

بإمكان القيام بحساب الاحتمالات بين قيمتين للمتغير X عن طريق دالة الكثافة ودالة التوزيع الاحتمالية:



$$P(X \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx;$$

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a < X < b) \\ &= \int_a^b f(x)dx \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

الشكل 11-احتمال فترة

صيغ العمليات الحسابية حول للتوزيعات الاحتمالية

تفيدة هذه الصيغ في حساب احتمالات:

$$P(x = a) = P(x \leq a) - P(x \leq a - 1)$$

$$P(x < a) = P(x \leq a - 1)$$

$$P(x > a) = 1 - P(x \leq a)$$

$$P(x \geq a) = 1 - P(x \leq a - 1)$$

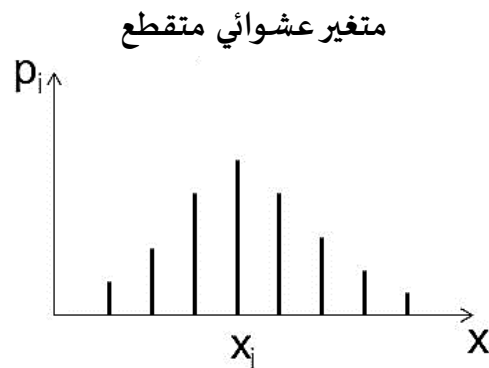
$$P(a < x < b) = P(x \leq b - 1) - P(x \leq a)$$

$$P(a \leq x \leq b) = P(x \leq b) - P(x \leq a - 1)$$

4. II. التمثيل البياني لدوال التوزيع الاحتمالية

يمكننا الحصول على تمثيل بياني للدوال الاحتمالية (دالة الكتلة والكثافة الاحتمالية) وكذا دوال التوزيعات التراكمية للمتغيرات العشوائية. حيث تبين الرسوم التالية الاشكال التي تأخذها هذه الدوال:

الشكل 12 - مقارنة أشكال الدوال الاحتمالية المستمرة والمتقطعة

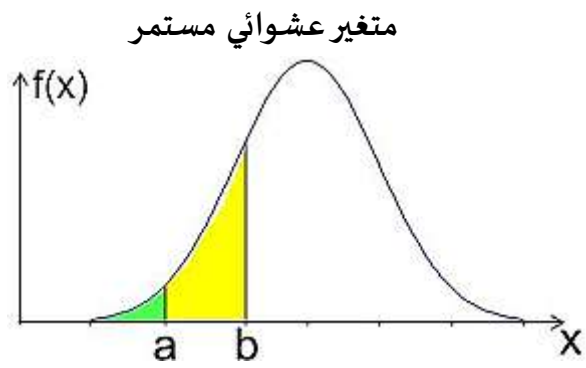


الكتلة الاحتمالية لمتغير عشوائي متقطع

$$\mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

$$x_i \rightarrow P(X = x_i) = p_i$$

$$\sum P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n p_i = 1$$



الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي مستمر

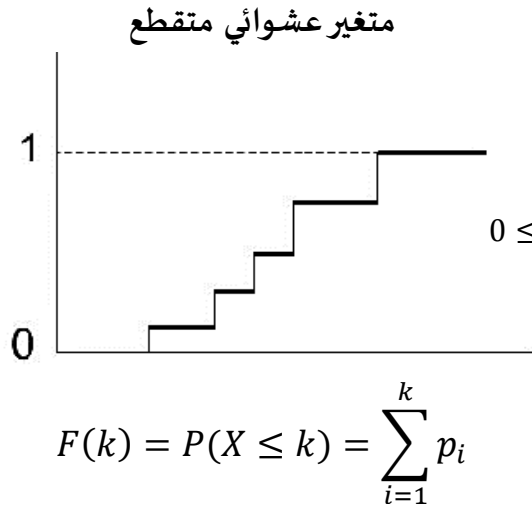
دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1$$

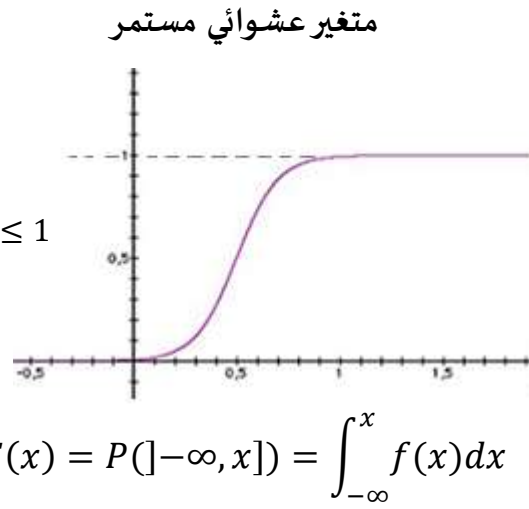
$$P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a) = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

الشكل 13 - مقارنة أشكال الدوال التوزيع التراكمية المستمرة والمتقطعة

$$F(x) = P(X \leq x)$$



$$0 \leq F(x) \leq 1$$



مثال لقانون الاحتمال للمتغير العشوائي 2:

صندوق يحوي 5 كريات غير متميزة في اللمس مرقمة من 1 إلى 5 ، نسحب على التوالي كرتين دون إرجاع الكرة المسحوبة حتى نهاية التجربة، وليكن X المتغير العشوائي الممثل لأكبر قيمة في السحبتين .

(1) عين مجموعة القيم الممكنة لـ X .

(2) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

الحل:

بما أن الكرة المسحوبة الأولى لا تعاد إلى الصندوق فلدينا 5 طرق لسحب الكرة الأولى و 4 طرق لسحب الكرة الثانية، وبالتالي عدد الطرق الممكنة لسحب كرتين على التوالي دون إرجاع من هذا الصندوق هي :

$$A_5^2 = 5 \times 4 = 20$$

(1) $X = 2$ هي أصغر قيمة للمتغير العشوائي وذلك عند سحب الكرتين التي تحمل الأرقام 1 و 2.

$X = 5$ هي أكبر قيمة للمتغير العشوائي وذلك عند سحب الكريات التي تحمل الأرقام

1 و 5 أو 2 و 5 أو 3 و 5 أو 4 و 5.

بمناقشة الحالات الأخرى نجد مجموعة قيم الممكنة لـ X هي: {2,3,4,5}

(2) قانون احتمال المتغير العشوائي X

_حساب $P(X = 2)$: يكون عند سحب كرتين تحمل الأرقام 1 و 2 . لدينا 2 طرق لسحب الكرة الأولى (الكرة المسحوبة الأولى لا تعاد إلى الصندوق) و طريقة واحدة لسحب الكرة الثانية ومنه عدد

$$P(X = 2) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \text{ ومنه : } (A_2^1 \times A_1^1 = 2 \times 1 = 2)$$

_حساب $P(X = 3)$: يكون عند سحب كرتين تحمل الأرقام 1 و 3 أو 2 و 3 . عدد الطرق الملائمة

$$P(X = 3) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \text{ ومنه : } (2 \times A_2^1 \times A_1^1 = 4 \text{ أو } 2 \times (2 \times 1) = 4)$$

_ حساب $P(X = 4)$: يكون عند سحب كرتين تحمل الأرقام 1 و 4 أو 2 و 4 أو 3 و 4 . عدد الطرق

$$P(X = 4) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \text{ : ومنه } (3 \times A_2^1 \times A_1^1 = 6 \text{ أو } 3 \times (2 \times 1) = 8)$$

_ حساب $P(X = 5)$: يكون عند سحب كرتين تحمل الأرقام 1 و 5 أو 2 و 5 أو 3 و 5 أو 4 و 5 . عدد

$$P(X = 5) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \text{ : ومنه } (4 \times A_2^1 \times A_1^1 = 8 \text{ أو } 4 \times (2 \times 1) = 8)$$

نلخص قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X في الجدول التالي:

5	4	3	2	X_i
$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	P_i

مثال لدالة التوزيع الاحتمالية لمتغير مستمر

لتكن الدالة $f(x)$ المتعلقة بالمتغير العشوائي X والمعرفة في المجال $[0,1]$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

المطلوب إيجاد قيمة الثابت λ التي تحقق الشرط لدالة الكثافة الاحتمالية في الدالة $f(x)$

وبعد تثبيت هذه القيمة قم بحساب الإحتمالات $P(0 \leq X \leq 0,5)$ و $P(0,9 \leq X \leq 1)$

الحل:

لكي تصبح $f(x)$ دالة كثافة احتمالية يجب أن تحقق الدالة $f(x)$ الشرطين:

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1 \text{ و}$$

وعليه فقيمة الثابت λ الذي يجعل من $f(x)$ دالة كثافة احتمالية هي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda x^2 \cdot dx = \lambda \int_0^1 x^2 dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \lambda \left[\frac{1^3}{3} - 0 \right] = \frac{\lambda}{3} = 1 \dots \Rightarrow \lambda = 3$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 \cdot x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases} \text{ ومنه فالدالة تكون معرفة بـ:}$$

$$P(a \leq X \leq b) = P([a, b]) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b 3x^2 dx \text{ : نعلم أن:}$$

$$P(0 \leq X \leq 0,5) = \int_0^{0,5} f(x) dx = \int_0^{0,5} 3 \cdot x^2 \cdot dx = 3 \int_0^{0,5} x^2 dx = 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{0,5} = 3 \left[\frac{0,5^3}{3} - 0 \right] = \frac{3}{64} = 0,04688$$

$$P(0,9 \leq X \leq 1) = \int_{0,9}^1 f(x) dx = \int_{0,9}^1 3 \cdot x^2 \cdot dx = 3 \int_{0,9}^1 x^2 dx = 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{0,9}^1 = 3 \left[\frac{1^3}{3} - \frac{0,9^3}{3} \right] = 0,25793$$

5.11. التوقع الرياضي والتباين Mathematical Expectation and Variance

في العديد من الحالات لا يكفي حساب احتمال تحقق أحداث معينة بل يمكن أن تصادفنا وضعيات التي نحتاج فيها المفاضلة بين خيارات متاحة ولهذا نحتاج معرفة وتوقع وبطريقة دقيقة وموضوعية أحداث معينة؛ فبالإضافة للخواص المقترنة بالمتغير العشوائي وتوزيع الاحتمالي، تتوفر الكثير من المقاييس الإحصائية المهمة المستخدمة في العمليات الإحصائية والتي تلعب دوراً حساساً في كثير من النظريات الإحصائية، حيث أنها تعطي تصوراً عن شكل المتغير العشوائي أو توزيعه. نذكر منها القيمة المتوقعة والتباين والانحراف المعياري للمتغيرات العشوائية المتقطعة والمستمرة على حد سواء.

1.5.11. التوقع الرياضي Mathematical Expectation E(X)

يعرف التوقع الرياضي Mathematical Expectation أو القيمة المتوقعة expected value أو الأمل الرياضي لمتغير عشوائي X ، نرمز له بواسطة $E(X)$ أو μ ، كالتالي:

إذا كان X متغير عشوائي متقطع ذات كتلة احتمال $P(x)$ ، فإن

$$\mu = E(X) = x_1P(X = x_1) + \dots + x_nP(X = x_n) = \sum_{i=1}^n x_iP(X = x_i)$$

ونلاحظ، ببساطة أن قيمة التوقع الرياضي تمثل مقياس النزعة المركزية وخصوصاً الوسط الحسابي لقيم المتغير X مرجحة باحتمالاتها $P(x)$.

ويعرف التوقع الرياضي لمتغير عشوائي مستمر ذات دالة كثافة احتمالية $f(x)$ كما يلي:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$$

مثال:

كمثال لحساب التوقع الرياضي

* لمتغير عشوائي متقطع في تجربة رمي قطعة نقدية مرتين نتحصل:

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	1/4	1/2	1/4
$x_i \times P(X=x_i)$	0	1/2	1/2

التوقع الرياضي:

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= \sum_{i=1}^3 x_iP(X = x_i) = x_1P(X = x_1) + x_2P(X = x_2) + x_3P(X = x_3) \\ &= \left(0 \times \frac{1}{4}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2}\right) + \left(2 \times \frac{1}{4}\right) = 1 \end{aligned}$$

* ليكن X متغير عشوائي مستمر ذات دالة كثافة احتمالية $f(x)$ معرفة كما يلي. أحسب $E(Y)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{if } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

وعليه يكون التوقع الرياضي $E(X)$ على النحو التالي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 \cdot dx + \int_0^2 x \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x\right) dx + \int_2^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx = 0 + \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + 0 = \frac{4}{3}$$

خصائص التوقع الرياضي

$$1. \text{ لأي قيمة } c \text{ ثابتة فإن: } E(c) = c \quad \text{و} \quad E(c \cdot X) = c \cdot E(X)$$

$$2. E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$3. \text{ إذا كانت المتغيرين } X \text{ و } Y \text{ مستقلين: } E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

$$4. \text{ توقع دالة}$$

ليكن $y = g(x)$ متغير عشوائي تابع للمتغير X ذات كثافة احتمالية $P(X)$ فإن:

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) P(X = x_i)$$

وإذا كان X متغير مستمر ذات دالة الكثافة $f(x)$ فإن:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot dx$$

مثال:

لتكن الدالة $g(x)$ التي تعرف لكل متغير عشوائي X مربعه، أي: $\forall x, \Rightarrow g(x) = x^2$ فتوقع الدالة $g(x)$ هو:

$$E[g(x)] = E[X^2] = \sum_i x_i^2 P(X = x_i) = x_1^2 P(X = x_1) + x_2^2 P(X = x_2) + \dots$$

يستخدم توقع دالة عند حساب عدد من المقاييس مثل العزوم المركزية والعزوم المرتبطة بالأصل والتي هي عبارة عن توقعات دوال. يدخل العزم في إنتاج بعض المؤشرات مثل التباين والتوقع الرياضي، معامل التماثل α_3 (skewness) ومعامل التفلطح α_4 (Kurtosis).

يعرف العزم المركزي من الدرجة r لمتغير عشوائي X كما يلي:

$$\mu_r = E((X - \mu)^r), \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu'_r = E(X^r), \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad \text{و يعرف العزم المرتبط بالأصل كما يلي:}$$

2.5.ii. التباين Var (X) the Variance

يعرف التباين لمتغير عشوائي X ويرمز له بـ $\text{Var}(X)$ أو $V(X)$ كما يلي:

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E[(X - \mu)^2]$$

وهذا يعني :

في حالة المتغير العشوائي المتقطع ذات كتلة احتمال $P(x)$:

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 P(x)$$

في حالة المتغير العشوائي المستمر ذات دالة كثافة احتمالية $f(x)$:

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - \mu^2$$

ويمكن تبسيط صيغة $V(X)$ لكلتي أشكال المتغير العشوائي X لتصبح بالصورة البديلة المختصرة التالية:

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 P(x) = \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) P(x)$$

$$V(X) = \sum_x x^2 P(x) - 2\mu \sum_x x P(x) + \mu^2 \sum_x P(x) = E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$V(X) = E[X^2] - \mu^2$$

أي ليصبح التباين على النحو التالي:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - \mu^2$$

وفي نفس السياق يمكن أيضا استخدام شكل يشتق من التباين يعبر عنه بالانحراف المعياري σ standard deviation الذي يعتبر الجذر التربيعي الموجب للتباين وهذا من خلال القاعدة

$$\sigma = \sqrt{V(X)} \Rightarrow \sigma^2 = V(X) \quad \text{التالية:}$$

للمثال السابق في تجربة رمي قطعة نقدية مرتين نتحصل على التباين والانحراف المعياري

كما يلي:

2	1	0	X
1/4	1/2	1/4	$P(X=x)$
1/2	1/2	0	$x_i \times P(X=x_i)$
4	1	0	X^2
1	1/2	0	$x_i^2 \times P(X=x_i)$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P(X = x_i) = (0) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow (E(X))^2 = \mu^2 = 1$$

$$E(X^2) = \sum_i x_i^2 P(X = x_i) = 0 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

وعليه يكون التباين مساويا لـ: $\frac{1}{2}$

خصائص التباين

1. $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$
2. لأي قيمة c ثابتة فإن: $V(c) = 0$ و $V(c \cdot X) = c^2 \cdot V(X)$
3. الكمية $E[(X - a)^2]$ تكون أقل ما يمكن حينما: $\mu = E(X) = a$
4. إذا كان X و Y متغيران عشوائيان مستقلان عن بعضهما. فإن:
5. $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ و $\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

مثال

- كيس به 12 كرية منها 5 بيضاء . نسحب من هذا الكيس 3 كريات في آن واحد ونعتبر أن سحب كرية بيضاء يعطي ربح قدره α دينارا وأن سحب كرية غير بيضاء يعطي خسارة قدرها 100 دينار.
- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب الربح المحصل عليه .
- (1) عين بدلالة α قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي والتباين.
 - (2) عين قيمة α بحيث تكون اللعبة عادلة .
 - (3) نفرض $\alpha = 140$ أن ، أحسب احتمال الحادثة $(X > 100)$.

الحل

- (1) مجموعة قيم X هي: $\{-300; \alpha - 200; 2\alpha - 100; 3\alpha\}$

$$P(X = \alpha - 200) = \frac{C_5^1 \times C_7^2}{C_{12}^3} = \frac{21}{44} ; \quad P(X = -300) = \frac{C_7^3}{C_{12}^3} = \frac{7}{44}$$

$$P(X = 3\alpha) = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{22} ; \quad P(X = 2\alpha - 100) = \frac{C_5^2 \times C_7^1}{C_{12}^3} = \frac{7}{22}$$

قانون الاحتمال :

x_i	-300	$\alpha - 200$	$2\alpha - 100$	3α	المجموع
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	1
$x_i \times P(X = x_i)$	$\frac{7}{44}(-300)$	$\frac{21}{44}(\alpha - 200)$	$\frac{7}{22}(2\alpha - 100)$	$\frac{1}{22}(3\alpha)$	
$x_i^2 \times P(X = x_i)$	$\frac{7}{44}(90000)$	$\frac{21}{44}(\alpha - 200)^2$	$\frac{7}{22}(2\alpha - 100)^2$	$\frac{1}{22}(3\alpha)^2$	

$$E(X) = \frac{7}{44}(-300) + \frac{21}{44}(\alpha - 200) + \frac{7}{22}(2\alpha - 100) + \frac{1}{22}(3\alpha) = \boxed{\frac{5\alpha - 700}{4}} : \text{الأمل الرياضي}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - \mu^2 \quad \text{التباين :}$$

$$\mu = E(X) = \frac{5\alpha - 700}{4} \Rightarrow (E(X))^2 = \mu^2 = \left(\frac{5\alpha - 700}{4}\right)^2 = \frac{(5\alpha - 700)^2}{16}$$

$$E(X^2) = \sum_i x_i^2 P(X = x_i) = \frac{7}{44}(90000) + \frac{21}{44}(\alpha - 200)^2 + \frac{7}{22}(2\alpha - 100)^2 + \frac{1}{22}(3\alpha)^2$$

$$= \frac{95\alpha^2}{44} - \frac{3500\alpha}{11} + \frac{402500}{11}$$

وعليه يكون التباين مساويا لـ:

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{95\alpha^2}{44} - \frac{3500\alpha}{11} + \frac{402500}{11} - \frac{(5\alpha - 700)^2}{16}$$

$$= \left(\frac{95}{44} - \frac{25}{16}\right)\alpha^2 - \left(\frac{3500}{11} + \frac{875}{2}\right)\alpha + \left(\frac{402500}{11} + 30625\right) = V(X)$$

$$= \frac{105}{176}\alpha^2 - \frac{16625}{22}\alpha + \frac{739375}{11}$$

(2) تكون اللعبة عادلة إذا كان: $E(X) = 10$ أي: $5\alpha - 700 = 0$ معناه: $\boxed{\alpha = 140}$.

(3) من أجل $\alpha = 140$ نجد:

x_i	-300	-60	180	420	المجموع
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	1

$$P(X > 100) = P(X = 180) + P(X = 420) = \frac{7}{22} + \frac{1}{22} = \boxed{\frac{4}{11}}$$

6.11 المتغير المعياري Standardized Variable

يمكن أن ننسب بأي متغير عشوائي X متغير معياري (ويدعى أيضا المتغير المركزي) ويرمز له Z . وغالبا ما يستعمل المتغير المعياري من أجل المقارنة لأن ليس له وحدة قياس وإنما هو تعبر عن كل قيم X من خلال المسافة بين x والتوقع μ محسوبة لس بالوحدة الأصلية وإنما بالانحرافات المعيارية.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

نستخرج التوقع والتباين المتغير المعياري من خلال خصائص التوقع والتباين، وعليه:

$$E(Z) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X - \mu) = \frac{1}{\sigma}[E(X) - E(\mu)] = 0$$

$$V(Z) = E[(Z - E(Z))^2] = E[(Z - 0)^2] = E(Z^2) = E\left(\frac{(X - \mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}E(X - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

مثال

يتدرب عاملان أحمد وعمر من أجل المشاركة في ماراثون عيد العمال 1 ماي. يشترط يوم المسابقة أن يكون وزن المترشح لا يتجاوز المجال $\mu \pm 1.5\sigma$. إذا كان الوزن المتوسط بالكغ هو $\mu = 70$ والانحراف المعياري هو 5 كغ. هل سيقبل العاملان أحمد وعمر إذا كان وزنهما: 77 كغ، و 80 كغ؟

الجواب:

مجال القبول هو: $\mu \pm 1.5\sigma$ أين الوزن المتوسط بالكغ هو $\mu = 70$ والانحراف المعياري σ هو 5 كغ
 $70 + 1.5(5) \leq \text{الوزن المقبول} \leq 70 - 1.5(5) \Rightarrow \mu + 1.5\sigma \leq \text{الوزن المقبول} \leq \mu - 1.5\sigma$
 $77.5 \leq \text{الوزن المقبول} \leq 62.5$

مجال القبول من 62.5 كغ إلى 77.5 كغ، لذلك فسيرفض عمر و يقبل أحمد.

III. التوزيعات الاحتمالية

بعد التطرق لمفهوم المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي النتائج عن تجربة عشوائية. ولتبسيط الواقع دعت الحاجة الى ايجاد نماذج رياضية احتمالية ملائمة للظواهر العشوائية الاساسية تقوم بمرافقة احتمال قيم المتغيرات العشوائية، وهذه النماذج الرياضية الاحتمالية يطلق عليها التوزيع أو القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي. ومن أكثر هذه التوزيعات شيوعا واستخداما في العديد من المسائل التطبيقية: توزيع برنولي والتوزيع الثنائي وتوزيع بواسون بالنسبة للتوزيعات الاحتمالية المتقطعة.

يمكننا من خلال معرفة هذه القوانين الاحتمالية الشهيرة وبالإطلاع لخصائصها الأساسية، وتطبيقاتها من معرفة متى وكيف يمكن استخدامها وصياغة الواقع في صورة رياضية لحل العديد من المسائل في العديد من المجالات.

1.III. التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الأكثر استخداما

1.1.III. توزيع برنولي Bernoulli¹ Distribution

يعين توزيع برنولي من خلال تجربة وحيدة المحاولة والتي تحتل نتيجتين (حدثين) متنافيتين A و $\bar{A}$. نسمي A نجاح (success) و $\bar{A}$ فشل (failure).

أين يمثل p احتمال وقوع حدث A (احتمال النجاح success) وبالتالي $q = 1 - p$ يمثل احتمال الحدث المعاكس $\bar{A}$ (احتمال الفشل failure). في محاولة.

يعين توزيع برنولي كما يلي :

¹ Jakob Bernoulli (1654-1705)

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	p	q

ويكتب كما يلي: $X \sim \beta(1; p)$

أين نعتبر المتغير العشوائي X الذي يأخذ القيمة 1 عند تحقق الحدث A و 0 في الحالة المعاكسة لعدم حدوثه.

$$P(X = x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ 1 - p & x = 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{أي بصيغة أخرى:}$$

خصائص توزيع برنولي

التوقع الرياضي: بما أن $\mu = E(X) = \sum x_i P_i = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$

$$\mu = E(X) = p$$

التباين: بما أن $V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = (1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q) - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$

$$V(X) = pq$$

2.1.III. توزيع ذي الحدين أو التوزيع الثنائي Binomial Distribution

يمثل p احتمال وقوع حدث ما في محاولات برنولي، وبالتالي $(q = 1 - p)$ يمثل احتمال عدم حدوث الحدث في أي محاولة وحيدة. يعرف التوزيع الثنائي تكرار لعدد n محدد من المرات لتجربة برنولية مع استقلالية التجارب عن بعضها أي احتمال النجاح في التجربة ثابت.

ويكتب كما يلي: $X \sim \beta(n; p)$

وعليه يمكن استنتاج صيغة قانون التوزيع الثنائي إذا كررنا تجربة برنولي n مرة فإن (X) عدد مرات النجاح تأخذ القيم $X = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ، فإحتمال حدوث الحدث بالضبط X مرة في n محاولة (لأي X مرة نجاح هناك $n-X$ مرة فشل) يعطى كالآتي:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x q^{n-x}$$

لاحظ: يعتبر التوزيع البرنولي حالة خاصة في توزيع ذي الحدين عندما $n = 1$

شروط استخدام التوزيع الثنائي

1 تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات

2 احتمال النجاح في التجربة ثابت (التجارب مستقلة)

خصائص التوزيع الثنائي (توزيع ذي الحدين).

يمكن اعتبار X مجموع متغيرات مستقلة برنولية $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ لها نفس المعلم p وبالتالي

التوقع الرياضي: بما أن

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_i + \dots + X_n) = \sum E(X_i) = \sum p = np$$

$$\mu = E(X) = np$$

التباين: بما أن

$$V(X) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_i + \dots + X_n),$$

$$V(X) = \sum V(X_i) = \sum pq \Rightarrow V(X) = npq$$

$$V(X) = npq = np(1-p)$$

وتسمى دالة الاحتمال المتقطعة توزيع ذا الحدين أو توزيع ثنائي. حيث $x=1, 2, \dots, n$ والتي تتبع الحدود المتتالية في مفكوك ذي الحدين.

$$(q + p)^n = q^n + \binom{n}{1} q^{n-1}p + \binom{n}{2} q^{n-2}p^2 + \dots + p^n = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

مثال 1:

أحسب عند رمي قطعة نقدية متوازنة 4 مرات احتمال الحصول على :

ولا مرة صورة، مرة واحدة، مرتين، 3 مرات، 4 مرات .

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$$

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{0!(4-0)!} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot \frac{1}{16} = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot \frac{1}{16} = \frac{4 \times 3}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot \frac{1}{16} = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{4!}{4!(0)!} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

مثال 2:

نسحب بالإرجاع 3 كريات من صندوق يحتوي 5 كريات منها 3 حمراء .
أحسب احتمال الحصول على كرتين حمراء.

الحل:

تعتبر هذه التجربة تكرار ثلاث مرات لتجربة برنولية ذات منفذين ومستقلة عن بعضها حيث نعرف النجاح فيها بسحب كرة حمراء وعليه

$$p = \frac{3}{5} \text{ احتمال سحب كرة حمراء :}$$

$$q = 1 - p = \frac{2}{5} \text{ احتمال سحب كرة غير حمراء :}$$

إذاً تتبع التجربة توزيع ذي الحدين أين $n=3$ وبالتالي:

$$X \sim \beta\left(3; \frac{3}{5}\right)$$

وعليه احتمال الحصول على كرتين حمراء يساوي:

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{3-2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \frac{9}{25} \cdot \frac{2}{5} = \frac{54}{125}$$

في عيادة متخصصة، احتمال أن يتوفى المريض المصاب بمرض القلب إثر نوبة قلبية هو 0.04 (4 من 100 يموتون من النوبة). لنفترض أن لدينا 5 مرضى يعانون من مرض القلب ، ما هو احتمال بقاء الجميع على قيد الحياة؟

إجرائياً سوف نسمي النجاح النوبة القلبية القاتلة ($p=0.04$). لدينا عدد $= 5$ مرضى ونريد معرفة احتمال بقائهم أحياء، أو بعبارة أخرى ، أن لا أحد منهم يصاب بالنوبة القاتلة (0 نجاح).

في هذا المثال ، تكون النتائج المحتملة هي نجاحات 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 (حالات وفاة). نظراً لأن احتمال الوفاة منخفضة جداً ، فإن الاستجابة الأكثر احتمالاً هي 0 (جميع المرضى على قيد الحياة).
فصيغة قانون ذي الحدين تقدم احتمالات الحصول على x نجاح من بين n .

$$P(0 \text{ success}) = \frac{5!}{0!(5-0)!} \times (0,04)^0 \cdot (1 - 0,04)^{5-0}$$

$$P(0 \text{ success}) = \frac{5!}{5!} \times (1) \cdot (0,96)^5 = (1)(1)(0,8154) = 0,8154$$

هناك احتمال 81.54 % أن يبقى جميع المرضى على قيد الحياة حينما احتمال أن يموت أي واحد منهم هو 4% .

3.1.III. قانون بواسون Poisson¹ Distribution Law

عند تكرار تجربة برنولية بصفة كبير جداً أو لانهائي من المرات. فالمتغير X الذي يمثل عدد النجاحات تتبع التوزيع الثنائي، لكن قد يصعب حساب الاحتمال باستعمال صيغة هذا

¹ Siméon-Denis Poisson (1781-1840)

التوزيع عندما تكون n كبيرة. وعليه عندما تتكرر التجربة باستمرار؛ يصبح عدد مرات تكرار التجربة مقاسا بالزمن (لأن في لحظة زمنية ما يكون احتمال تحقق الحدث صغيرا جدا). وعليه نحتاج في هذه الحالة إلى إيجاد صيغة عامة تعادل صيغة التوزيع الثنائي عندما n يؤول إلى ∞ . وعليه يعتبر توزيع بواسون أحد أنواع التوزيعات الاحتمالية المناسب للمتغيرات العشوائية المتقطعة والتي غالبا ما تستعمل عند وصف عدد الأحداث التي تقع في فترة زمنية محددة.

ويكتب كما يلي:

$$X \sim P(\lambda)$$

وإحتمال حدوث الحدث x في وحدة زمن واحدة يعطى كالآتي:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

حيث الثابت $\lambda > 0$ يمثل معدل النجاح خلال فترة معينة (بحيث يقابل $\lambda = np$ في توزيع ذي الحدين)؛

حساب احتمال عدد من الأحداث في t وحدة زمن.

من أجل عدد أو مقدار t من وحدات الزمن نعوض λ بـ λt فنجد:

$$P_t(X = x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

خصائص توزيع قانون بواسون

التوقع الرياضي: $\mu = E(x) = \lambda$

التباين: $\sigma^2 = V(x) = \lambda$

الاستخدام العملي لتوزيع بواسون

لفترة طويلة ظل توزيع بواسون مستعملا لتمثيل الأحداث النادرة فقط ، لكنه ونظرا للابحاث الحديثة أصبح اليوم يستعمل في شتى المجالات؛ منها مراقبة الجودة ، ظواهر الانتظار، الاتصالات (عدد المكالمات في وحدة زمن)، في الفيزياء النووية لدراسة ودراسة الاشعاع وفي البيولوجيا الدقيقة ومراقبة تكاثر البكتيريا، كما يستخدم في وحتى في علم الأحوال الجوية؛ كما يستخدم توزيع بواسون في مجال التسيير، وبشكل خاص عند دراسة "ظواهر الانتظار" المنتسبة لنظرية صفوف الانتظار و"ظواهر الوصول" والتي نذكر أمثلة منها: عدد الحالات

الاستعجالية التي تصل إلى مستشفى، عدد الزبائن الذين يصلون إلى متجر في وحدة زمن، عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتفي، عدد الشاحنات التي تصل إلى المربأ ما عدد السفن التي تصل إلى ميناء في وحدة زمن.

مثال:

بينت دراسة أن عدد حوادث العمل في مصنع يتبع توزيع بواسون بمعدل حادثتين يومياً.

1. أوجد احتمال أن لا يحدث أي حادث في يوم معين،
2. أوجد احتمال أن يسجل حادث على الأقل في يوم

الحل:

عدد حوادث العمل في المصنع يتمثل في متغير عشوائي X يتبع توزيع بواسون :

$$P(X = x) = \frac{(\lambda)^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad \lambda = 2 \Rightarrow P(X = x) = \frac{(2)^x e^{-2}}{x!}$$

1. احتمال أن لا يحدث ولا حادث في اليوم $P(X = 0) = \frac{(2)^0 e^{-2}}{0!} = e^{-2}$
2. احتمال أن يسجل على الأقل حادث في اليوم $P(X \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - e^{-2}$

استخدام توزيع بواسون بدلا من التوزيع الثنائي

❖ من أهم ما يتميز به توزيع بواسون هي إمكانيةه من تقريب حساب الاحتمالات المرافقة لمتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين وذلك في حالة عدد لمحاولات $n > 100$ وكون احتمال النجاح صغير جداً $p < 0,05$. وفي مثل هذه الحالات ويهدف تسهيل العمليات الحسابية يمكن استخدام توزيع بواسون بدلا عن توزيع ذي الحدين وهذا بعد تقدير معلمة λ توزيع بواسون والتي تساوي توقع توزيع ذي الحدين: $\lambda = E(X) = np$.

مثال

تقوم شركة أدوية بإنتاج صنف من الادوية الخطيرة وعليه تشتط الشركة في مراقبة جودة منتوجها أن يكون عدد العبوات المعيبة والتي يكون فيها تركيز الدواء أكثر من المسموح به أقل من 5 عبوات من بين كل 1000 عبوة.

فإذا كان احتمال ان تنتج الآلة عبوة معيبة يساوي 0,0002 وتم إختيار عينة من 1000 عبوة تم إنتاجها، فكم احتمال أن تقبل العينة؟

الحل:

بما أن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد العبوات المعيبة ، وتمثل العينة من 1000 عبوة عدد المحاولات المستقلة، وفي كل محاولة يحتمل حدوث أحد الحدثين: إما أن تكون العبوة صالحة أو معيبة مع احتمال أن تكون العبوة أو محاولة معيبة ثابت. لذلك المتغير العشوائي يتبع توزيع ذي الحدين:

$$X \sim \beta(1000; 0,0002)$$

حساب احتمال أن تقبل العينة ، أي احتمال أن يكون عدد العبوات المعيبة أقل من 5 من بين 1000 عبوة ، يوجد كما يلي:

$$P(X < 5) = P(X = 4) + P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)$$

يلاحظ هنا صعوبة إجراء العمليات الحسابية لتعقدها، وعليه لتفادي هذا الاشكال يمكننا استخدام توزيع بواسون حيث أن $n > 100$ و $p < 0,05$. وفي هذه الحالة نقول أن المتغير العشوائي X يتبع توزيع بواسون بمعلمة يتم تحديدها من خلال:

$$\lambda = np = 1000(0,0002) = 0,2$$

ومنه يتم إيجاد الاحتمال المطلوب السابق كما يلي:

$$P(X < 5) = \sum_{x=0}^4 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{(0,2)^0 e^{-0,2}}{0!} + \frac{(0,2)^1 e^{-0,2}}{1!} + \frac{(0,2)^2 e^{-0,2}}{2!} + \frac{(0,2)^3 e^{-0,2}}{3!} + \frac{(0,2)^4 e^{-0,2}}{4!}$$

$$P(X < 5) = \frac{(0,2)^0 e^{-0,2}}{0!} \left(1 + \frac{(0,2)^1}{1!} + \frac{(0,2)^2}{2!} + \frac{(0,2)^3}{3!} + \frac{(0,2)^4}{4!} \right) = 0,8187308(1,2214)$$

$$= 0,9999978$$

يلاحظ من هذا المثال أنه تم الحصول على نفس النتائج باستخدام كل من توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون مع أن الجهد والعمليات الحسابية المطلوبة أسهل وأقل باستخدام توزيع بواسون.

❖ يؤول التوزيع الثنائي إلى التوزيع بواسون عندما $n \rightarrow \infty$ والمتوسط ثابت. عمليا يعطي

توزيع بواسون نتائج قريبة من التوزيع الثنائي حين:

$$nq < 5 \quad \text{أو} \quad np < 5 \quad \text{و} \quad n \geq 30$$

وكشرط لاستعمال قانون بواسون بدلا من القانون الثنائي نستخدم أحيانا القاعدة التالية:

$$n \geq 25 \quad \text{و} \quad p \leq 0,1$$

مثال:

نأخذ عشوائيا 10 وحدات من انتاج آلة نسبة انتاجها التالف 10 % . أحسب احتمال أن يكون هناك وحدتان تالفتان.

الحل:

$$P(X = 2) = C_2^{10} (0,1^2) (0,9^8) = 0,1937$$

باستعمال توزيع بواسون: نحسب أولا قيمة المعلمة λ (معلمة قانون بواسون):

$$\lambda = \mu = np = 10 \times 0,1 = 1$$

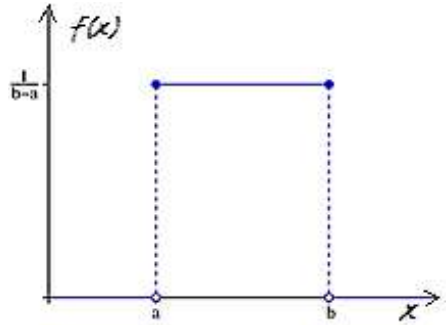
$$P(X = x) = \frac{(\lambda)^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad \lambda = 1 \Rightarrow P(X = 2) = \frac{(1)^2 e^{-1}}{2!} = \frac{1}{2e} = 0,1839$$

2.III. التوزيعات لاحتتمالية المستمرة الأكثر استخداما

1.2.III. التوزيع الموحد أو المنتظم Uniform distribution

يعرّف التوزيع الموحد المستمر على أنّه توزيع احتمالي يُمكن لكل متغير عشوائي تابع له بأن يستطيع الحصول على قيم محصورة في فترة مستمرة لعدددين الصحيحين، بحيث يكون الاحتمال متساوياً بحصول المتغير على قيم محتواة في هذه الفترة. يستخدم التوزيع الموحد لوصف الحالة التي من المرجح أن تحدث فيها جميع النتائج المحتملة للتجربة العشوائية. والفضل الكبير للتوزيع المنتظم هو أنه من السهولة التعامل به رياضياً. يتم إعطاء يتم التعبير بالكثافة الاحتمالية بالطريقة التالية:

$$X \sim U(a; b)$$

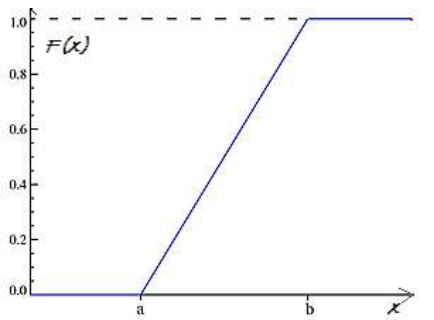


الشكل 14. شكل دالة الكثافة

$$P(X = x) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in [a; b] \\ 0 & , x \notin [a; b] \end{cases}$$

بحيث أنّ a هي القيمة الصغرى و b هي القيمة العظمى في الفترة.

دالة التوزيع التراكمية المقابلة لهذا التوزيع هي:



الشكل 15. شكل دالة التوزيع التراكمية

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 1 & , x > b \end{cases}$$

خصائص التوزيع الموحد أو المنتظم

التوقع الرياضي: $\mu = E(x) = \frac{a+b}{2}$

التباين: $\sigma^2 = V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$

لكل مجال $[c; d]$ محتوى في الفترة $[a; b]$ و X متغير عشوائي وفقاً للقانون الموحد حول الفترة $[a; b]$ ، وعليه:

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a}$$

مثال:

تصل حافلات نقل المسافرين للمحطة على التتابع كل 20 دقيقة بدءاً من الساعة 6 صباحاً، فتصل أحدها عند الساعة 6 صباحاً وتصل أخرى عند الساعة 6 سا 20 د وأخرى عند 6 سا 40 دقيقة وهكذا، فإذا علمت بوصول أحد الركاب لتلك المحطة خلال أول 40 دقيقة عمل لتلك الحافلات والتي يخضع وقت الوصول فيها للتوزيع المنتظم المستمر. فالمطلوب تحديد احتمال ما يلي:

1. انتظار الشخص الواصل أقل من خمس دقائق فيصعد فيها.
2. انتظار الشخص الواصل أكثر من 15 دقيقة لتصل الحافلة فيصعد فيها.

الحل

ليكن X يمثل متغير وقت الوصول خلال أول 40 دقيقة بالمعالم $a = 0, b = 40$ فتكون دالة كثافة الاحتمال التي تمثل X بالشكل:

$$X \sim U(0; 40) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{40} & , x \in [0; 40] \\ 0 & , x \notin [0; 40] \end{cases}$$

1. إن حادثة انتظار الشخص أقل من 5 دقائق لتصل الحافلة تعني وصول الشخص إما بين الدقيقة 15 و 20 فتصل أول حافلة فيصعد فيها، أو أن يصل الشخص بين الدقيقة 35 و 40 فتصل ثاني حافلة ليصعد فيها، فيكون الاحتمال المطلوب عبارة عن:

$$P = P(15 < X < 20) + P(35 < X < 40) = \int_{15}^{20} \frac{1}{40} dx + \int_{35}^{40} \frac{1}{40} dx = \frac{5}{40} + \frac{5}{40} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

2. إن حادثة انتظار الشخص أكثر من 15 دقيقة لتصل الحافلة فيصعد فيها H ، تعني وصول الشخص إما في أول 5 دقائق أو ما بين الدقيقة 20 و 25 فيكون الاحتمال المطلوب عبارة عن:

$$P = P(0 < X < 5) + P(20 < X < 25) = \int_0^5 \frac{1}{40} dx + \int_{20}^{25} \frac{1}{40} dx = \frac{5}{40} + \frac{5}{40} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

2.2.III. قانون التوزيع الطبيعي Normal (or Laplace-Gauss¹) distribution

يعد التوزيع الطبيعي أو توزيع لابلاس قوس من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة والأكثر استخداماً لما له من خصائص تقارب العديد من الظواهر الطبيعية بشكل جيد وتنطبق على نطاق واسع في شتى العلوم والمجالات المختلفة المرتبطة بالظواهر الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية.

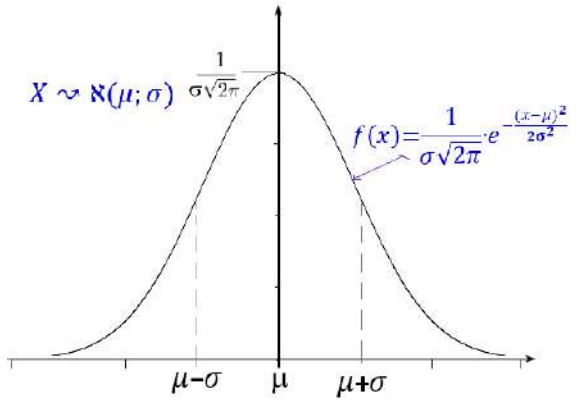
تعريف وصيغة القانون الطبيعي:

نرمز لكل متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بالكتابة التالية:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$$

وعليه نعرف القانون الاحتمالي للتوزيع الطبيعي بـ:

تعريف: إذا كان X متغير عشوائي مستمر يتبع توزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 , تعرف دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير العشوائي كالتالي:



الشكل 16. شكل التوزيع الطبيعي

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

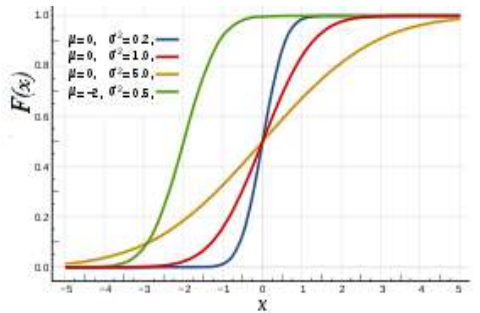
حيث يمثل:

μ التوقع الرياضي،

σ الانحراف المعياري،

$e=2,71828...$ ، $\pi=3,14159...$

وتكتب دالة التوزيع التجميعية للتوزيع الطبيعي كما يلي:



الشكل 17. شكل دالة التوزيع الطبيعي

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

¹ Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) & Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

التوزيع الطبيعي المعياري أو القياسي Standard Normal Distribution

عادةً ما يليق التعامل بالتوزيع الطبيعي المعياري الذي يستعين بطريقة غير مباشرة بمجهول واحد Z بدلاً من استخدام مباشرة 3 مجاهيل X و μ و σ في حالة الاعتماد على دالة التوزيع الطبيعي للقيام بحساب التكامل حين حساب الاحتمال لمتغير X .

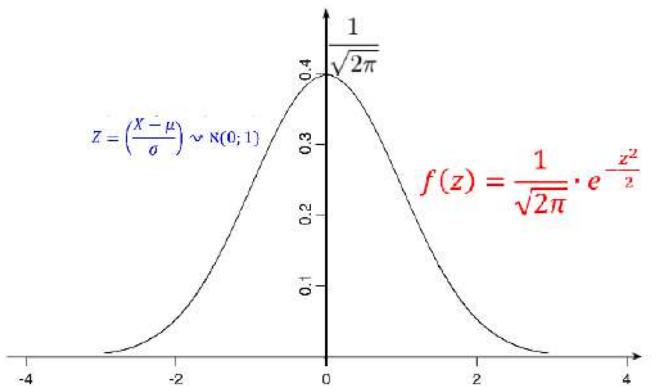
حيث يسمح تحويل أي متغير طبيعي X إلى متغير معياري Z وذلك بالكتابة كما يلي:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

ونكتب إذا

$$Z = \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right) \sim N(0; 1) \Leftrightarrow X \sim N(\mu; \sigma)$$

وبالنظر إلى العلاقة الخطية بين المتغيرين X و Z ، فإن Z تتبع نفس توزيع X أي التوزيع الطبيعي لكن بمتوسط $\mu=0$ وتباين $\sigma^2=1$ حيث تكون دالة التوزيع الطبيعي المعياري من الشكل التالي:



$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

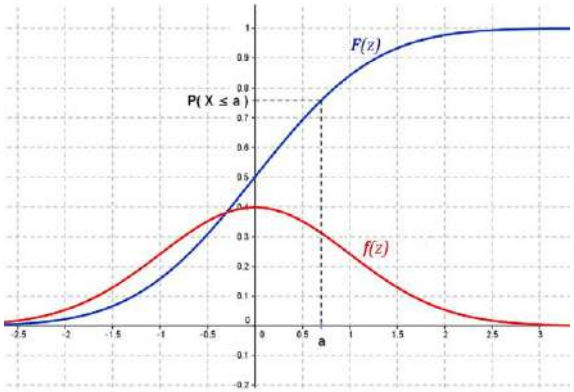
حيث يمثل:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

و $e=2,71828...$ ، $\pi=3,14159...$

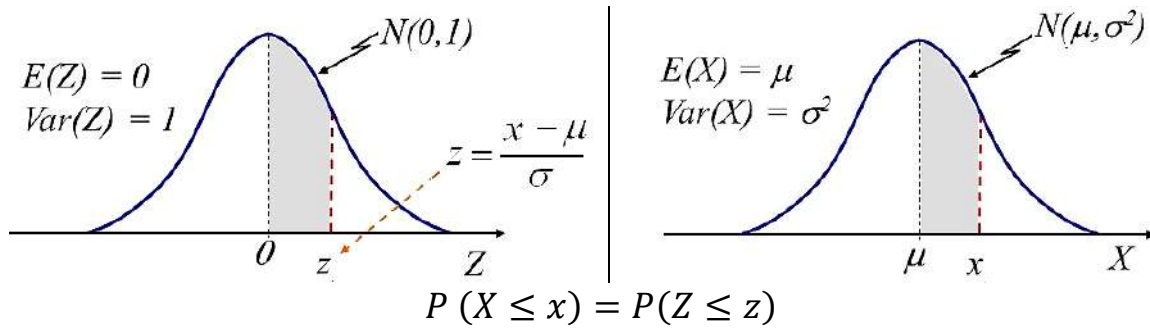
الشكل 18 - دالة الكثافة للتوزيع الطبيعي المعياري

وتكتب دالة التوزيع التجميعية للتوزيع الطبيعي المعياري كما يلي:



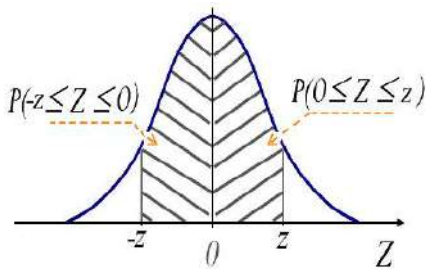
$$F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

الشكل 19 - المنحنى دالة التوزيع المعياري



الشكل 20 - أشكال التحويل بين التوزيع الطبيعي والتوزيع المعياري

يستخدم المتغير المعياري $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ لتكوين الجداول الإحصائية للاحتتمالات والتي تمكن من إيجاد الصور القياسية $P(0 < Z < z)$ أو $F(Z < z)$ ومن ثمة حساب قيم الاحتمالات أو الحصول على فترات المتغير العشوائي. وعليه يتم حساب الاحتمالات (المساحات) تحت المنحنى باستخدام المتغير المعياري Z ومنها الرجوع بالتحويل إلى المتغير X المدروس وهذا بمراعات صيغ العمليات في حساب الاحتمالات فمن أجل أي قيمة للمتغير المعياري $Z > 0$ لدينا:



ومن أجل القيم Z السالبة وبما أن دالة الكثافة متماثلة نستطيع استعمال العلاقات التالية.

$$P(0 \leq Z \leq z) = P(-z \leq Z \leq 0) \\ = \frac{P(-z \leq Z \leq z)}{2}$$

$$P(Z \geq z) = P(Z \leq -z) = 1 - P(Z \leq z)$$

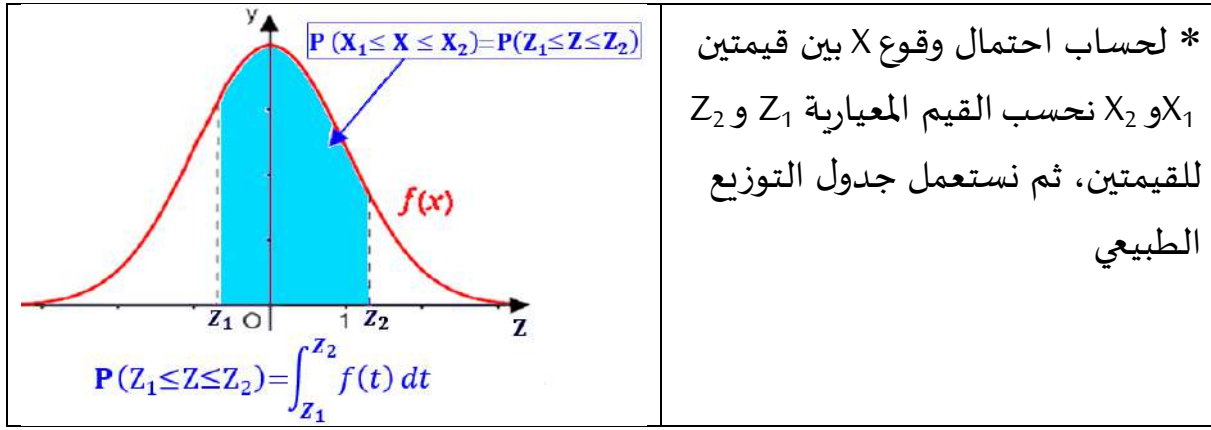
الشكل 21 - تماثل التوزيع الطبيعي المعياري في حساب الاحتمالات

خصائص توزيع القانون الطبيعي

التباين $V(X)$	التوقع الرياضي $E(X)$	
σ^2	μ	$X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$
1	0	$Z = \left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) \sim \mathcal{N}(0; 1)$

* التوزيع الطبيعي هو أفضل وأكثر التوزيعات الاحتمالية المتصلة استخداماً ويمكن السبب في ذلك لأن أغلب متغيرات الثياس مثل الطول والوزن والسعة والحجم تتبعه. وكذلك حسب النتيجة الرياضية لنظرية النهاية المركزية أنه التقريب المناسب لمعظم التوزيعات.

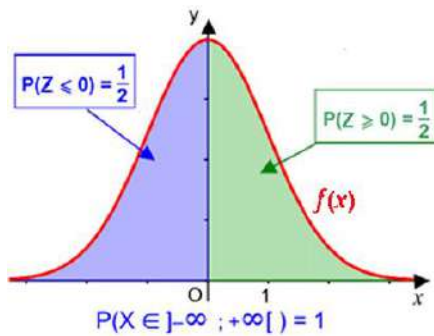
* للحصول على قيمة احتمال أن تقع X بين نقطتين X_1 و X_2 . فإن الاجراء العادي هو الحصول على تكامل الدالة بين X_1 و X_2 ، وهذا يتم باستعمال طريقة التكامل العددي.



* بما أن المتغير العشوائي مستمر:

$$\forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow P(X = k) = 0$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$



$$P(X \in [\mu; +\infty[) = P(X \geq \mu) = P(Z \geq 0) = \frac{1}{2}$$

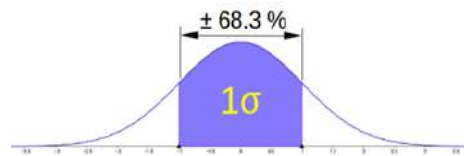
$$P(X \in]-\infty; \mu]) = P(X \leq \mu) = P(Z \leq 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(X \in]-\infty; +\infty[) = P(-\infty \leq X \leq +\infty) = 1$$

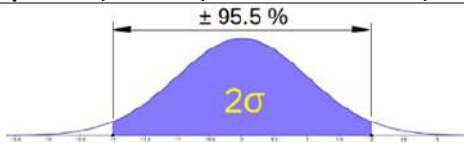
$$P(X < \mu) = P(X \geq \mu) = P(Z < 0) = P(Z \geq 0) = 0.5 = 50\%$$

الشكل 22 - تماثل المساحة للتوزيع المعياري

* يمكن تقديم بعض الاحتمالات التي تقع فيها بعض الفترات والقيم المتوفرة في الجداول الإحصائية المعلومة ، نذكر أهمها:

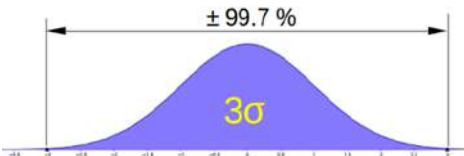


$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(-1 \leq Z \leq +1) = 0.683 = 68.3\%$$



$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(-2 \leq Z \leq +2) = 0.955 = 95.5\%$$

$$P(\mu - 1.96 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1.96 \cdot \sigma) = P(-1.96 \leq Z \leq +1.96) = 0.95 = 95\%$$



$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P(-3 \leq Z \leq +3) = 0.997 = 99.7\%$$

الشكل 23 - مقادير احتمالات للتوزيع الطبيعي

مميزات منحنى التوزيع الطبيعي

- ناقوسي الشكل ذو قمة واحدة ويمتد طرفاه من $-\infty$ إلى $+\infty$
- منتظم حول المتوسط يعني يتمثل المنحنى حول المتوسط أي أن المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال
- المساحة تحت المنحنى = 1

أمثلة لحساب الاحتمال:

مثال 1

ليكن المتغير X الذي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu=5$ وتباين $\sigma^2=100$ ؛

1. أحسب احتمال : $P(X < 6,2)$ ؟
2. أحسب احتمال : $P(2,9 < X < 7,1)$ ؟

الحل

المتغير X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu=5$ وتباين $\sigma^2=100$ ، أي: $\mu=5$ و $\sigma=10$ وعليه

$$X \sim \mathcal{N}(5; 10)$$

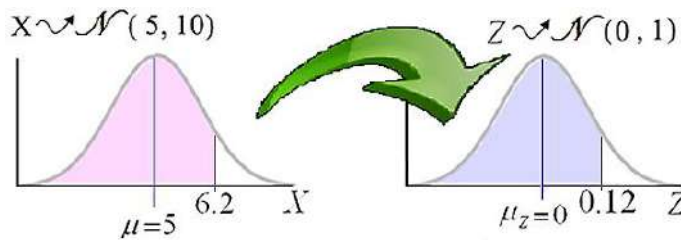
بما أننا لا نستطيع حساب هذا الاحتمال مباشرة، نقوم بالتحويل X إلى المتغير المعياري Z :

$$Z = \left(\frac{X - 5}{10} \right) \sim \mathcal{N}(0; 1) \Leftrightarrow X \sim \mathcal{N}(5; 10)$$

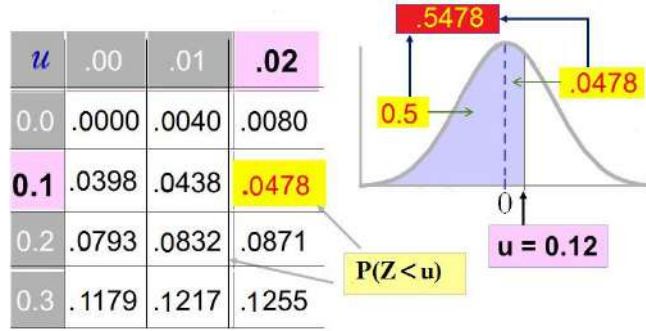
1. وعليه حساب $P(X < 6,2)$

$$Z = \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right) = \left(\frac{6,2 - 5}{10} \right) = 0,12$$

يعود إلى إيجاد القيمة المعيارية ومن ثمة حساب احتمالها لأن : $P(X < 6,2) = P\left(\frac{X-5}{10} < \frac{6,2-5}{10}\right) = P(Z < 0,12)$



وبسهولة نجد قيم $P(Z < u)$ التي تمثل احتمال المتغير المعياري Z في الجداول الاحتمالي المعياري $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$



وعليه : $P(X < 6,2) = P(Z < 0,12) = 0.5 + 0.0478 = 0.5478$

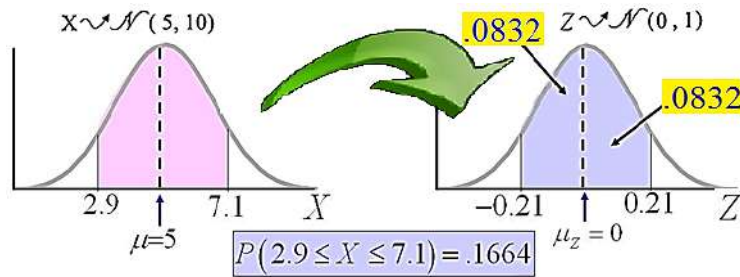
2. حساب إحتمال : $P(2,9 < X < 7,1)$

يستلزم إيجاد القيم المعيارية للقيمتين $X_1=2,9$ و $X_2=7,1$

$$Z_2 = \left(\frac{X_2 - \mu}{\sigma} \right) = \left(\frac{7,1 - 5}{10} \right) = 0,21 \quad Z_1 = \left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma} \right) = \left(\frac{2,9 - 5}{10} \right) = -0,21$$

ومن ثمة حساب الإحتمال لأن :

$$P(2,9 < X < 7,1) = P\left(\frac{2,1-5}{10} < \frac{X-5}{10} < \frac{7,1-5}{10} \right) = P(-0,21 < Z < 0,21)$$



وعليه نتحصل على قيمة الاحتمال من جدول التوزيع المعياري باستخدام تماثل المنحنى :

$$\begin{aligned} P(2,9 < X < 7,1) &= P(-0,21 < Z < 0,21) = \\ &= P(0 < Z < 0,21) + P(-0,21 < Z < 0) = 0.0832 + 0.0832 = 0.1664 \end{aligned}$$

مثال 2

إذا كانت الأجور اليومية للعمال في قطاع البناء تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 800 دج وإنحراف معياري 150 .

وكان المتغير X الذي يمثل الأجر اليومي لأي عامل من قطاع البناء ، وإذا تم إختيار عامل عشوائياً من هذا قطاع، فأوجد ما يلي:

1. احتمال أن يكون أجر العامل أكثر من : 950 دج
2. احتمال أن يكون أجر العامل أقل من 1200 دج
3. احتمال أن يكون أجر العامل بين 770 و 850 دج

الحل

متغير عشوائي X يتبع القانون الطبيعي أي

$$X \sim \mathcal{N}(800; 150^2)$$

1. لإيجاد احتمال أن يكون أجر العامل الذي تم إختياره عشوائياً أكثر من 950 دج ، يتطلب هذا مسبقاً تحويل قيمة المتغير إلى قيمته المعيارية للتمكن من حساب الاحتمال:

$$Z = \left(\frac{X - 800}{150} \right) \sim \mathcal{N}(0; 1) \Leftrightarrow X \sim \mathcal{N}(800; 150^2)$$

$$P(X > 950) = P\left(\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) > \left(\frac{950 - \mu}{\sigma}\right)\right) = P\left(\frac{X - 800}{150} > \frac{950 - 800}{150}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1)$$

وبالرجوع للقيمة الجدولية لإحتمال $P(Z < 1)$ في جدول التوزيع الطبيعي نجد أن: $P(Z < 1) = 0,8413$

$$\text{وعليه فإن } P(X > 950) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

أي 15,87% من العمال يمكن أن يكون أجرهم أكثر من 950 دج

2. على نفس المنوال يمكن إيجاد احتمال أن يكون أجر العامل أقل من 1200 دج ، كما يلي:

$$P(X < 1200) = P\left(\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) < \left(\frac{1200 - \mu}{\sigma}\right)\right) = P\left(\frac{X - 800}{150} < \frac{1200 - 800}{150}\right) = P(Z < 2,6) = 0,9962$$

أي 99,62% من العمال يمكن أن يكون أجرهم أقل من 1200 دج

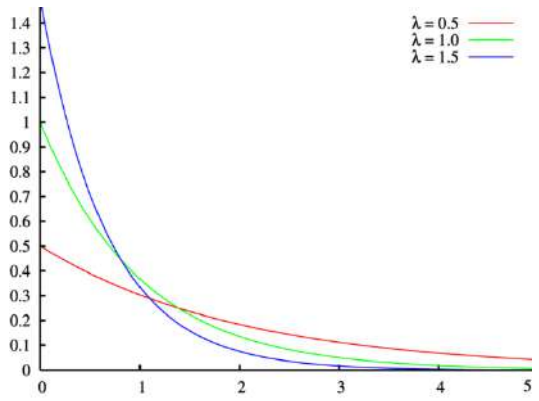
3. لإيجاد احتمال أن يكون أجر العامل بين 770 و 850 دج هو:

$$\begin{aligned} P(770 < X < 850) &= P\left(\frac{770 - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{850 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{770 - 800}{150} < \frac{X - 800}{150} < \frac{850 - 800}{150}\right) \\ &= P\left(\frac{-30}{150} < Z < \frac{50}{150}\right) = P(-0,20 < Z < 0,33) = P(0 < Z < 0,33) + P(-0,20 < Z < 0) \\ &= P(770 < X < 850) = P(0 < Z < 0,33) + P(-0,20 < Z < 0) = P(0 < Z < 0,33) + P(0 < Z < 0,20) \\ P(770 < X < 850) &= 0,1293 + 0,0793 = 0,2086 \end{aligned}$$

أي 20,86% من العمال يكون أجرهم يتراوح بين 770 و 850 دج

3.2.III. التوزيع الأسّي Exponential Distribution

يقوم القانون الأسّي بنمذجة مدة حياة ظاهرة بدون ذاكرة ، أو التي لا تخضع للتقادم أو التآكل: فإحتمال أن تستمر هذه الظاهرة على الأقل $s + t$ مع العلم أنها قد استمرت t مسبقا سيكون هو نفسه احتمال استمرارها s ابتداء من التشغيل الأولي. وبعبارة أخرى ، فيما أن هذه الظاهرة استمرت لـ t من ساعات لا يغير في متوسط عمرها المتوقع ابتداء من الزمن t . وبشكل مصاغ ، إذا X هو المتغير العشوائي الذي يحدد حياة هذه الظاهرة، بتوقع رياضي $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ ، نقول أن X يتبع قانون الأسّي $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ للمعلمة $\lambda = \frac{1}{E(X)}$ (أو عامل المقياس) ، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية f معرفة في المجال $[0; +\infty[$ بالشكل:



$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

الشكل 24 – شكل دالة الكثافة للقانون الأسّي

ونعرف أيضا دالة التوزيع التراكمية للقانون الأسّي

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

كما يسمح القانون الاسي من نمذجة الظواهر المتعلقة بحياة مكونات إلكترونية، الوقت المنقضي بين المكالمات الهاتفية المتلقية ، أو الوقت المنقضي بين حادثي شارك فيهما فرد معين.

خصائص التوزيع الأسّي

التوقع الرياضي: $\mu = E(x) = \frac{1}{\lambda}$

التباين: $\sigma^2 = V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$

خصائص التوزيع الأسّي

- لأي عدد a حقيقي موجب، $\int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = \left| -e^{-\lambda x} \right|_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$

ومنه $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f(x) dx = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 f(t) dt + \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y f(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 0 dt + \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \lambda e^{-\lambda t} dt = 0 + \lim_{y \rightarrow +\infty} [-e^{-\lambda t}]_0^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} [-e^{-\lambda y} + e^0] = 0 + 1 = 1$$

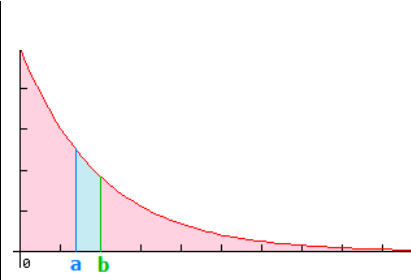
هذا ما يعني أن المساحة الواقعة تحت منحنى f في المجال $[0; +\infty[$ تساوي 1.

- ليكن X متغير عشوائي يتبع القانون الأسّي $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ أي بالمعلمة λ وليكن a و b عددين حقيقيين غير سالبين، فإنه نستطيع تقديم الصيغ التالية:

$$P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = \left| -e^{-\lambda x} \right|_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$$

$$P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a}$$

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\ &= \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = \left| -e^{-\lambda x} \right|_a^b \\ &= e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \end{aligned}$$



الشكل 25 - مساحة الاحتمال

- فقدان الذاكرة : خاصية هامة للتوزيع الأسّي هي فقدان الذاكرة أو نقص الذاكرة. تتم ترجمة هذه الخاصية حسابيًا بواسطة المعادلة التالية:

$$\forall s, t \geq 0 \quad P_{T>t}(T > s + t) = P(T > s)$$

فإحتمال أن ظاهرة تستمر $s + t$ ساعات على الأقل مع العلم أنها استمرت t ساعات من قبل سيكون هو نفسه احتمال انها تستمر s ساعات من تشغيلها الأولي.

تعتبر هذه الخاصية على أن مدة حياة ظاهرة لا تتقدم في العمر مستقلة عن اللحظة التي تقاس بها هذه المدة.

يستخدم القانون الأسّي على نطاق واسع في الموثوقية (fiability)، ولتمثيل مدة حياة الدوائر الإلكترونية. وغالبًا ما يطلق على التوقع الرياضي $\frac{1}{\lambda}$ الممثل لمتوسط الوقت بين الفشل (MTBF : Mean Time Between Faillure) والمعلمة λ معدل الفشل لأن $h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \lambda$

مثال

ظهر أنه مدة الانتظار المعبر عنها بالدقائق في أحد شبابيك البنك هو متغير عشوائي T يتبع القانون الأسّي بالمعلمة λ . ونعلم أيضًا أن احتمال أن أحد الزبائن ينتظر أقل من 8 دقائق يساوي 0.7.

أ. احسب قيمة تقريبية $1/1000$ لـ λ

ب. احسب احتمال أن ينتظر الزبون ما بين 15 و 20 دقيقة

الحل

$$0,7 = 1 - e^{-\lambda 8} \Leftrightarrow P(T \leq 8) = 0,7 \quad \text{أ. لدينا :}$$

$$\lambda = \frac{\ln(0,3)}{-8} \approx 0,1505 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda 8} = 0,3 \quad \text{ومنه :}$$

ب. احتمال أن ينتظر الزبون ما بين 15 و 20 :

$$P(15 \leq T \leq 20) = e^{-0,1505 \times 15} - e^{-0,1505 \times 20} \approx 0,055$$

سلسلة التمارين

الحوادث وحساب الاحتمال

التمرين 1

- المطلوب تحديد فضاءات عينة لكل تجربة من التجارب التالية:
- (1) -اختيار شخص عشوائيا وسؤاله هل يعجبه نوع جديد من السيارات؟
 - (2) -إلقاء قطعتين نقود مرتين وملاحظة الجهات التي ستظهر؟

التمرين 2

ليكن لدينا 4 مصابيح مرقمة من 1 إلى 4 من بينها اثنان غير صالح هما : 1 و 2. ونسحب اثنان عشوائيا

- (1) حدد فضاء عينة للتجربة وحدد عدد عناصره
 - (2) أعط قوائم الأحداث التالية:
- A الحصول على مصابيح سليمة،
 B الحصول على مصباح واحد عاطل،
 C الحصول على مصباحين معطلين،
 D الحصول على مصباح واحد معطل على الأقل

التمرين 3

نعتبر تجربة سحب رقم من علبة تحتوي على الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6 وملاحظة أي رقم سيظهر ونعتبر الأحداث التالية: A ظهور رقم أكبر من 3 ، B ظهور رقم أصغر من 6، C ظهور رقم زوجي.

- (1) حدد فضاء عينة للتجربة وعدد عناصره
- (2) أعط قوائم الأحداث التالية: A و B و C
- (3) أعط قوائم الأحداث التالية:

$$A \cup B \quad A \cap B \cap C \quad B \cap C \quad A \cap C \quad A \cap B$$

$$A \cup B \cup C \quad B \cup C \quad A \cup C$$

- (4) أعط قوائم الأحداث التالية:

$$\bar{A} \cap \bar{B}; \overline{A \cup B}; \bar{B}; \bar{A}$$

التمرين 4

إذا كان (Ω, P) فضاء احتمال ، $A \subset \Omega$ الحدث $\bar{A}$ هو الحدث المكمل A .

$$\frac{P(A)}{P(\bar{A})} = \frac{3}{5} \text{ إذا كان } P(A)$$

التمرين 5

إذا كان (Ω, P) فضاء احتمال ، $A, E \subset \Omega$ ، حيث أن: $P(\bar{A} \cup \bar{E}) = 1$ بين أن A ، E حدثان متنافيان.

التمرين 6

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة كانت احتمالات ظهور الأعداد الفردية متساوية واحتمالات الأعداد ظهور الزوجية متساوية، كما أن احتمال ظهور عدد زوجي ضعف احتمال ظهور العدد الفردي، أوجد احتمال ظهور العدد 3 أو العدد 4

التمرين 7

إذا كان a و e حدثين متنافيين ، وكان احتمال وقوع a ثلاثة أمثال احتمال وقوع e وكان احتمال وقوع أحدهم على الأقل يساوي 0.8 فأوجد احتمال عدم وقوع a .

التمرين 8

إذا كان (Ω, P) فضاء احتمال ، a و e حوادث ، حيث أن:

$$P(a) = 0,6 \text{ و } P(e) = 0,45 \text{ و } P(a \cap e) = 0,25$$

أحسب كل من:

$$P(a \cup e) \quad (1)$$

$$P(\bar{a} \cap \bar{e}) \quad (2)$$

التمرين 9

جد نشر $(x+2)^3$ و نشر $(2x+3)^4$ ، حيث x عدد حقيقي

التمرين 10

في امتحان مسابقة ما يعرض على الممتحنين اختيار ثلاث (03) مواضيع مختارة من البرنامج التعليمي الذي يشمل 150 موضوع. ليكن ممتحن قد راجع مسبقا 30 موضوع من البرنامج التعليمي. ما هو احتمال أن يستطيع هذا الممتحن الإجابة على الأقل على موضوع واحد من بين الثلاث مواضيع المطروحة.

التمرين 11

رشتت مدرسة 16 طالبا من مستوى الاولى و 12 طالبا من مستوى الثانية، للتنافس على 5 جوائز؛ نظراً لتفاوتهم الدراسي. إذا تم إختبار 5 منهم بشكل عشوائي، فما إحتمال أن تكون التشكيلة نحو 3 طلاب من المستوى الاول و 2 من مستوى الثانية؟

الإحتمال الشرطي ونظرية بايز

التمرين 12

نسحب مسمارين اثنين من علبة تحتوي على 10 مسمارين من بينها 3 معيبة. احسب احتمال أن يكون المسماران سليمين إذا كان السحب:

(1) بإرجاع المسحوب إلى العلبة،

(2) بدون إرجاع المسحوب

التمرين 13

إذا كان (Ω, P) فضاء احتمال ، $A, B \subset \Omega$ حيث أن:

$$P(A) = 0,5 \quad \text{و} \quad P(B) = 0,4 \quad \text{و} \quad P(B/A) = 0,6$$

أحسب كل من $P(A \cup B)$; $P(A/B)$

التمرين 14

في ورشتي عمل A و B من نفس المصنع ننتج يوميا على التوالي 1000 و 800 قطعة من نفس الطراز. 2٪ من الأجزاء التي تنتجها الورشة A، و 3٪ من الأجزاء التي تنتجها الورشة B معيبة. أ) أكمل الجدول التالي يصف الإنتاج اليومي.

المجموع	عدد الأجزاء المعيبة	عدد الأجزاء الصالحة	المجموع
عدد الأجزاء التي تنتجها الورشة A			
عدد الأجزاء التي تنتجها الورشة B			
المجموع			1800

ب) في يوم معين، نحسب عشوائيا قطعة من بين 1800 قطعة منتجة. وليكن

A "تم اختيار قطعة من الورشة A"

B "القطعة المختارة تأتي من الورشة B".

D "القطعة المختارة معيبة".

N "القطعة ليست معيبة".

استعانة بالجدول أعلاه حدد(ي) بشكل كسري الاحتمالات التالية:

$$P(D), P(A \cap D), P(N), P(B \cap N), P(A/D), P(B/N)$$

التمرين 15

في متجر لأجهزة الكهرو منزلية نهتم بسلوك الزبون المحتمل لشراء تلفاز ومذياع. ولتسهيل تصور الاشكال يمكن افتراض الحدثين التاليين: الحدث T : "الزبون يشتري جهاز تلفاز". والحدث M : "الزبون يشتري مذياع". ولدينا المعطيات التالية:

$$P(T) = 0.6 \text{ احتمال أن يشتري زبون جهاز تلفاز هو}$$

$$P(M/T) = 0.4 \text{ احتمال أن يشتري زبون مذياع علما أنه قد اشترى جهاز تلفاز هو}$$

$$P(M/\bar{T}) = 0.2 \text{ احتمال أن يشتري زبون مذياع علما أنه لم يشتري جهاز تلفاز هو}$$

$$1- \text{ ما هو احتمال أن يشتري جهاز تلفاز ومذياع؟ } P(T \cap M)$$

$$2- \text{ ما هو احتمال أن يشتري مذياع؟ } P(M)$$

$$3- \text{ إذا اشترى الزبون مذياع، ما هو احتمال أن يشتري جهاز تلفاز؟ } P(T/M)$$

التمرين 16

في مدرسة يوجد 2000 تلميذ:

40% من التلاميذ هم بنات

15% من البنات هم في النظام الداخلي

61% من مجموع التلاميذ هم بالنظام الخارجي حيث نعد من بينهم من البنين 780 تلميذ (ذكور).

مع العلم أن نصف التلاميذ الذين ينتمون للنظام نصف داخلي هم بنات.

أ) أكمل الجدول التالي حسب ما سبق من المعطيات.

المجموع	خارجيين	نصف داخليين	داخليين	
				البنات
				البنين
2000				المجموع

ب) لنختار عشوائيا تلميذ من هذه المدرسة. ونسجل الحوادث:

I : "التلميذ داخلي"

F : "التلميذ هو بنت"

E : "التلميذ خارجي"

G : "التلميذ هو ولد"

مستعينا بالجدول أعلاه حدد(ي) الاحتمالات التالية: $P(I/F)$ و $P(F)$

1. أحسب احتمال $P(F/I)$ وقارنه مع $P(F)$. ولنقل أن F و I مستقلين

2. تحقق من أن $P(F \cap I) = P(F) \times P(I)$ وأن $P(I) = P(I/F)$

3. حدد الاحتمالات التالية: $P(E)$ و $P(G)$

4. أحسب احتمال $P(G \cap E)$. هل الحوادث G و E مستقلة؟

التمرين 17

يحتوي صندوق الاقتراع على 10 أوراق ، من 3 أنواع لا يمكن تمييزها: 4 منها تحمل علامة "نعم" ، 3 تحمل علامة "لا" و 3 تشير إلى أوراق بيضاء. نقوم بسحب ورقتين أقتراع من الصندوق الاقتراع في وقت واحد .

ما هو احتمال الحصول على سحب لورقتين من نوع مختلف؟

التمرين 18

في مدرسة ثانوية تضم 1000 تلميذ ، تم تطعيم 350 تلميذ ضد الأنفلونزا في بداية العام الدراسي. أثروباء الإنفلونزا في المدرسة خلال فصل الشتاء ، حيث 10٪ من التلاميذ أصيبوا بالمرض. وقد كان 2٪ من الطلاب الذين تم تلقيحهم من المصابين بالأنفلونزا.

1. أكمل الجدول التالي ، دون تحليل الأجوبة:

المجموع	عدد التلاميذ الذين قاموا بالتطعيم	عدد التلاميذ الغير مطعمين	المجموع
عدد التلاميذ الذين أصيبوا بالأنفلونزا			
عدد التلاميذ الذين لم يصابوا بالأنفلونزا			
المجموع	350		1000

2. في فصل الربيع ، يتم اختيار بشكل عشوائي تلميذ واحد من المدرسة الثانوية. ويتم اعتبار الأحداث التالية:

A: "تم تطعيم التلميذ" ;

B: "التلميذ أصيب بالأنفلونزا".

أ. قم بتعريف بجملة تصيغ في كل حالة كل من الأحداث التالية: $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$,

ب. احسب احتمال كل حدث من الأحداث: $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$,

3. احسب الاحتمالات الشرطية: $P(A/B)$ و $P(B/A)$

التمرين 19

نفرض أن 4 مصانع $A - B - C - D$ ينتجون نفس النوع من الآلات تتقاسم السوق على النحو:

- i. 15 % من المصنع A بنسبة خلل تساوي 5 %
- ii. 20 % من المصنع B بنسبة خلل تساوي 4 %
- iii. 30 % من المصنع C بنسبة خلل تساوي 3 %
- iv. 35 % من المصنع D بنسبة خلل تساوي 2 %

لنفترض أن نختار آلة عشوائيا ونسمي الحدث « E » الآلة بها خلل.

- 1 - ما هو احتمال أن تكون من المصنع A وبها خلل؟
- 2 - بين أن 0,0315 هو احتمال E ؟
- 3 - علما أن هذه الآلة بها خلل ما هو احتمال أن تكون من المصنع B ؟
- 4 - علما أن الآلة بها خلل ما هو احتمال أن تكون من المصنع C أو D ؟

التمرين 20

ثلاثة موظفين في إحدى الشركات يقومون بنسخ تقارير الشركة مستخدمين جهاز الحاسب، فإذا كانت نسبة التقارير التي ينسخها الموظف الأول 40%، والثاني 35% والثالث ينسخ باقي التقارير. وكانت نسبة التقارير الخالية من الأخطاء من عمل الموظفين الثلاثة هي على الترتيب: 70%، 80%، 90%

اختر أحد تقارير الشركة عشوائياً فوجد بلا أخطاء فما احتمال أن يكون الموظف الأول هو الذي نسخه.

المتغير العشوائي ، التوزيع الاحتمالي ، التوقع الرياضي والتباين

التمرين 21

يقوم مورد بتزويد نوعان من الأسلاك الكهربائية C_1 و C_2 في كل تزويد يقوم به يحتوي على 20 % من النوع C_1 و 80 % من النوع C_2 إشكالية التمرين منقسمة لجزيئين منفصلين:

جزء أ: نسحب عشوائيا 4 أسلاك من تزويد 50 سلك قام به المورد

- 1 - حدد احتمال الحادثة $E =$ "الاسلاك الاربعة من نوع C_1 "

2 - حدد إحتمال الحادثة $F = \text{"سلك واحد من نوع C1 و 3 أسلاك من نوع C2"}$

3 - حدد إحتمال الحادثة $G = \text{"سلك واحد على الأقل من نوع C1"}$

جزء ب: لنسحب سلك واحد من حصة قد تم تزويدها ونسجل نوعه ثم نرجعه للحصة. ولنعيد n مرة هذه التجربة ونرمز ب X عدد الاسلاك المتحصل عليها من نوع C1 . لنفترض أن $n=4$.

4 - ما هو إحتمال الحصول على 2 أسلاك من نوع C1

5 - ما هو إحتمال الحصول على الأقل سلك واحد من نوع C1

6 - أحسب التوقع الرياضي $E(X)$ ؟

التمرين 22

يمثل متغير عشوائي S عدد الطلاب الذين يتوقع التحاقهم بجامعة UT السنة المقبلة، حيث:

$$P(S=48.500)=0,3 ; \quad P(S=50.000)=0,5 ; \quad P(S=53.000)=0,2$$

(1) احسب الأمل الرياضي $E(S)$ وتباين $V(S)$ للمتغير S

تقدر التكلفة C لعملية الإواء والخدمات الاجتماعية بـ: $C=5000 + 1,2xS + 150 \ln(S)$

(2) احسب الأمل الرياضي $E(C)$ للمتغير C

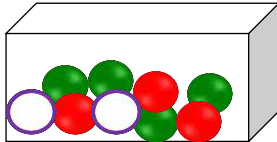
التمرين 23

أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الالوجه (Faces) عند رمي ثلاثة (03) قطع نقدية. اوجد التوقع الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$

التمرين 24

صندوق يحوي 9 كريات غير متمايزة في اللمس : 2 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء و 4 كرات خضراء . نسحب 3 كرات في آن واحد من هذا الصندوق .

وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء الموجودة في هذا السحب .



(أ) عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X .

(ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

التمرين 25

تحتوي حاوية على ثلاث (3) كريات صفراء وكرتين (2) زرقاء اللون وكرة واحدة (1) حمراء وأربع (4) كريات خضراء. نعلم أن جميع الكريات متشابهة الحجم. إذا حاولنا سحب كرة من الحاوية.

1- أوجد احتمال الحوادث التالية:

J = "سحب كرة صفراء"

B = "سحب كرة زرقاء"

R = "سحب كرة حمراء"

V = "سحب كرة خضراء"

2- حسب اللون المأخوذ ننسب قيمة نقدية على النحو التالي:

- اللون الأحمر (R) = قيمة 10 دج

- اللون الأخضر (V) = قيمة 2 دج

- اللون الأصفر (I) أو الأزرق (B) = قيمة 3 دج

ليكن X المتغير العشوائي الذي ينسب لكل كرة مسحوبة الربح المحقق (القيمة النقدية)

أ- أستنتج من السؤال 1 : $P(X=2)$ و $P(X=3)$ و $P(X=10)$

ب- أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ و تباين $V(X)$ المتغير X

3- إذا افترضنا أننا نبقى نربح القيم : 10 دج للون الأحمر و 2 دج للون الأخضر لكن

بالنسبة للون الأصفر نربح 3 دج وبالنسبة للون الأزرق نربح m دج أين m يمثل

عدد حقيقي موجب.

اوجد العدد m لكي نتحصل على متوسط الربح (الأمل الرياضي) يساوي 4,5 دج.

التمرين 26

لتكن الدالة المعرفة في المجال $[0,1]$ المتعلقة بالمتغير العشوائي X المعرفة بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

(1) اوجد المعامل λ لكي تصعب الدالة f دالة كثافة احتمالية

(2) اوجد قيمة التباين $V(X)$

(3) احسب الإحتمالات $P(0 \leq X \leq 0,5) = P([0; 0,5])$ و $P(0,9 \leq X \leq 1) = P([0,9; 1])$

التمرين 27

لتكن الدالة $f(x)$ المتعلقة بالمتغير العشوائي المستمر X والمعروفة في المجال $]0,3[$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9} \cdot x^2 & \text{if } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

أوجد دالة التوزيع للمتغير المذكور

قوانين التوزيعات الاحتمالية

التمرين 28

لنفرض أن مدة صلاحية أجهزة إلكترونية تتبع ظاهرة عشوائية ممثلة بالكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000} e^{-x/1000} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1 - تأكد من أن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية ؟

2 - اوجد $E(X)$ التوقع الرياضي ؟

3 - ما هو احتمال أن تتراوح مدة الحيات بين 100 و 1000 ساعة ؟

التمرين 29

تبين من السنوات السابقة أن احتمال وجود سنة جافة 0.25. بناء على ذلك أراد الباحثين في مجال البيئة دراسة احتمالات الجفاف في السنوات الثلاثة القادمة. فيما يلي أحسب احتمال حدوث الجفاف في سنة واحدة من الثلاثة سنوات.

التمرين 30

في تجربة نرمي 12 مرة قطعة نقدية متوازنة

1- ما هو احتمال الحصول على الصورة (Pile) خمس (5) مرات

2- ما هو احتمال الحصول على الصورة (Pile) مرة واحدة على الأقل.

التمرين 31

يود أحد البنوك دراسة خدماته تجاه عملائه. فإذا كان الإيداع اليومي للعملاء يتبع التوزيع

الطبيعي بمتوسط 500 € وانحراف معياري 100 € فما هو الاحتمال أن:

1 - يقل الإيداع النقدي عن 700 € .

- 2 - أن يزيد الإيداع النقدي عن 700 €
- 3 - يقل الإيداع النقدي عن 300 € .
- 4 - أن يتراوح الإيداع اليومي بين 300 و 700 €

حلول التمارين

حل التمرين 1

فضاء العينة للتجارب:

$$\Omega = \{0,1\} \quad (1)$$

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\} \quad (2)$$

حل التمرين 2

(1) Ω فضاء العينة

$$\Omega = \{\{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{2; 3\}, \{2; 4\}, \{3; 4\}\}$$

$$\text{Card}(\Omega) = 6$$

$$A = \{\{3; 4\}\} \quad (2)$$

$$B = \{\{1; 3\}, \{1; 4\}, \{2; 3\}, \{2; 4\}\}$$

$$C = \{\{1; 2\}\}$$

$$D = \{\{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{2; 3\}, \{2; 4\}\}$$

حل التمرين 3

$$\text{Card}(\Omega) = 6 \quad \Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \quad (1)$$

(2)

$$C = \{2,4,6\} \quad B = \{1,2,3,4,5\} \quad A = \{4,5,6\}$$

(3)

$A \cap B \cap C = \{4\}$	$B \cap C = \{2,4\}$	$A \cap C = \{4,6\}$	$A \cap B = \{4,5\}$
$A \cup B \cup C = \Omega$	$B \cup C = \Omega$	$A \cup C = \{2,4,5,6\}$	$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$

(4)

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{ \} = \emptyset \quad \overline{A \cup B} = \{ \} = \emptyset \quad \bar{B} = \{6\} \quad \bar{A} = \{1,2,3\}$$

حل التمرين 4

بالتطبيق نتحصل على

$$\frac{P(A)}{P(\bar{A})} = \frac{3}{5} = \frac{P(A)}{1-P(A)} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5P(A) = 3(1-P(A)) \Rightarrow 8P(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{8} = 0,375$$

حل التمرين 5

لإثبات A, E متنافيان يجب إثبات أن $\emptyset = A \cap E$ أي إثبات $P(A \cap E) = 0$
 $P(\overline{A \cup E}) = P(\overline{A \cap E}) = 1 - P(A \cap E) = 1 \Rightarrow P(A \cap E) = 0$
 إذن الحدثان A و E متنافيان.

حل التمرين 6

ليكن a حدث ظهور عدد زوجي ، e حدث ظهور عدد فردي
 فيكون $P(a) = 2P(e)$ و $P(e) = \alpha$ ونعلم ايضاً أن:
 $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$
 أي: $0,11 = \alpha \Leftarrow 1 = 9\alpha$ وعليه $1 = \alpha + 2\alpha + \alpha + 2\alpha + \alpha + 2\alpha$
 وبما أن الحدثان a و e متنافيان فإن $P(3 \cap 4) = 0$ وعليه فإن
 $P(3 \cup 4) = P(3) + P(4) = \alpha + 2\alpha = 3\alpha = 3 \times 0,11 = 0,33$

حل التمرين 7

الحدثان متنافيان فاحتمال وقوعهم معاً يساوي الصفر ($a \cap e = \emptyset$) يعني
 $P(a \cap e) = 0$ وبما أن: $P(a \cup e) = P(a) + P(e)$
 $0,8 = P(a) + \frac{P(a)}{3} \Rightarrow 4 \times P(a) = 2,4 \Rightarrow P(a) = 0,6 \Rightarrow P(\bar{a}) = 1 - P(a) = 1 - 0,6 = 0,4$

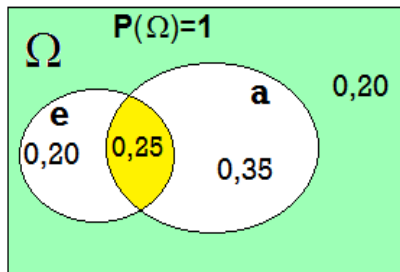
حل التمرين 8

$$P(a \cup e) = P(a) + P(e) - P(a \cap e) = 0,6 + 0,45 - 0,25 = 0,8 \quad (1)$$

$$P(\bar{a} \cap \bar{e}) = P(\overline{a \cup e}) = 1 - P(a \cup e) = 1 - 0,8 = 0,2 \quad (2)$$

يمكننا التوصل للحل باستخدام شكل فن كما يلي:

القيم في الشكل هي:



0,25 للتقاطع بين a و e

ويكون الباقي من e جهة اليسار $0,20 = 0,25 - 0,45$

وكذلك الجزء المتبقي من a يمين $0,35 = 0,25 - 0,6$

والجزء الأخضر $0,20 = (0,20 + 0,25 + 0,35) - 1$

ويكون: $P(a \cup e) = 0,20 + 0,25 + 0,35 = 0,8$

الجزء الأخضر $P(\bar{a} \cap \bar{e}) = 0,20$

حل التمرين 9

من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\begin{aligned}(x+2)^3 &= \sum_{p=0}^3 C_3^p x^{3-p} \times 2^p = C_3^0 x^3 + C_3^1 x^2 \times 2^1 + C_3^2 x^1 \times 2^2 + C_3^3 \times 2^3 \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \\ (2x+3)^4 &= C_4^0 (2x)^4 + C_4^1 (2x)^3 \times 3^1 + C_4^2 (2x)^2 \times 3^2 + C_4^3 (2x)^1 \times 3^3 + C_4^4 \times 3^4 \\ &= 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81\end{aligned}$$

حل التمرين 10

بما أن X مغير يدل علي عدد الإجابات النجاجة في الامتحان

الإجابة على الأقل على موضوع واحد من بين الثلاث مواضيع هي الحادثة A فالمتممة لهذه الحادثة $\bar{A}$ هي عدم الإجابة على أية موضوع

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \dots \Rightarrow \dots P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) \quad \text{وبما أن}$$

لكن: عدم الإجابة على أية موضوع يرجع لحساب : $P(X < 1)$ أي $P(X=0)$ لان المتغير متقطع

$$P(X=0) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

$$P(\bar{A}) = P(X=0) = \frac{C_0^{30} \times C_3^{120}}{C_3^{150}} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_0^{30} \times C_3^{120}}{C_3^{150}}$$

حل التمرين 11

عدد طرق اختيار 3 طلاب من المستوى الأول هو C_{16}^3

تحديد عدد مرات النجاح S .

عدد طرق اختيار 2 طلاب من المستوى الثاني هو C_{12}^2

استعمل التوافيق ومبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد النجاحات S .

$$s = C_{16}^3 \times C_{12}^2 = \frac{16!}{13! \times 3!} \times \frac{12!}{10! \times 2!} = 36960$$

تحديد عدد النواتج الممكنة (عدد عناصر فضاء العينة) $S+F$ وهو عدد طرق إختيار 5 طلاب من بين 28 طالبًا.

$$s + f = C_{28}^5 = \frac{28!}{23! \times 5!} = 98280$$

حساب الاحتمال النجاح

$$P(\text{فوز 3 من الاول و 2 من الثاني}) = \frac{S}{S+F} = \frac{36960}{98280} = 0.37606838$$

إحتمال فوز 3 طلاب من الاول و 2 من الثاني هو تقريبا 0.38 أو 38 %

حل التمرين 12

نعتبر الاحداث التالية:

A المسمار المسحوب الأول سليم، B المسمار المسحوب الثاني سليم

فيكون المطلوب هو احتمال $A \cap B$

(1) إذا كان السحب بإرجاع فإن الحدثين A و B مستقلان ومنه:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = 0,49 = 49\%$$

(2) إذا كان السحب بدون إرجاع فإن الحدثين A و B مرتبطان ومنه:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \approx 0,4667 \cong 46,67\%$$

حل التمرين 13

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{- بما أن :}$$

$$P(B/A) = 0,6 = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = 0,5 \times 0,6 = 0,3 \quad \text{لكن :}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,3 = 0,6 \quad \text{- إذا :}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75 \quad \text{- وأن :}$$

حل التمرين 14

المجموع	عدد الأجزاء الصالحة	عدد الأجزاء المعيبة	
1000	980	20	عدد الأجزاء التي تنتجها الورشة A
800	776	24	عدد الأجزاء التي تنتجها الورشة B
1800	1756	44	المجموع

ب

$$P(B \cap N) = 776/1800$$

$$P(D) = 44/1800$$

$$P(A/D) = 20 / 44$$

$$P(A \cap D) = 20/1800$$

$$P(B/N) = 776/1756$$

$$P(N) = 1756/1800$$

حل التمرين 15

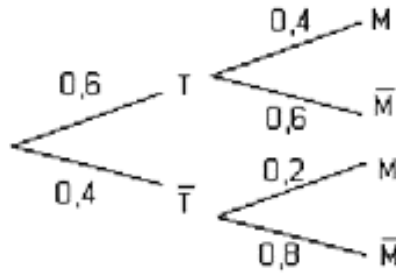
نرمز الحدث T : "الزبون يشتري جهاز تلفاز". والحدث M : "الزبون يشتري مذياع".
المعطيات :

$$P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0.6 = 0.4 \quad \text{إذا} \quad P(T) = 0.6$$

$$P(\bar{M}/T) = 1 - P(M/T) = 1 - 0.4 = 0.6 \quad \text{إذا} \quad P(M/T) = 0.4$$

$$P(\bar{M}/\bar{T}) = 1 - P(M/\bar{T}) = 1 - 0.2 = 0.8 \quad \text{إذا} \quad P(M/\bar{T}) = 0.2$$

الذي نستطيع تمثيله بالشجرة الاحتمالية:



1. بتطبيق صيغة تعريف الاحتمال الشرطي نتحصل على احتمال أن يشتري جهاز تلفاز ومذياع:

$$P(M/T) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} \Leftrightarrow P(T \cap M) = P(T) \times P(M/T) = 0.6 \times 0.4 = 0.24$$

2. نجد احتمال أن يشتري مذياع بتطبيق صيغة الاحتمالات الكلية:

$$P(M) = P(T \cap M) + P(\bar{T} \cap M) = P(T) \times P(M/T) + P(\bar{T}) \times P(M/\bar{T})$$

$$P(M) = 0.6 \times 0.4 + 0.4 \times 0.2 = 0.32$$

3. احتمال أن يشتري جهاز تلفاز شرط انه اشترى مذياع يكون:

$$P(T/M) = \frac{P(M \cap T)}{P(M)} = \frac{0.6 \times 0.4}{0.32} = 0.75$$

حل التمرين 16

(أ) إكمال الجدول:

المجموع	خارجيين	نصف داخليين	داخليين	
800	440	240	120	البنات
1200	780	240	180	البنين
2000	1220	480	300	المجموع

$$2\,000 \times 40\% = 2\,000 \times 0.4 = 800$$

عدد البنات

$$800 \times 15 \% = 800 \times 0,15 = 120$$

عدد البنات الداخليين

$$2\ 000 \times 61 \% = 2\ 000 \times 0,61 = 1\ 220$$

عدد الخارجيين

$$1\ 220 - 780 = 440$$

عدد البنات الخارجيين

$$800 - 560 = 240$$

عدد البنات النصف داخليين

$$P(F) = \frac{800}{1200} = 0.4 ; \quad P(I/F) = \frac{120}{800} = 0.15 ; \quad P(F/I) = \frac{120}{300} = 0.4 \text{ ب.}$$

$$P(F/I) = P(F) \text{ ولدينا:}$$

$$P(F \cap I) = \frac{120}{2000} = 0.06 ; \quad P(I) = \frac{300}{2000} = 0.15 ; \quad P(F) \times P(I) = 0.4 \times 0.15 = 0.06 = P(F \cap I)$$

$$P(I) = 0.15 = P(I/F) \text{ ولدينا أيضا:}$$

$$P(G) = \frac{1200}{2000} = 0.6 ; \quad P(E) = \frac{1220}{2000} = 0.61 ; \quad P(F \cap I) = \frac{780}{2000} = 0.39$$

$$P(G) \times P(E) = 0.6 \times 0.61 = 0.366 ; \Rightarrow P(G) \times P(E) \neq P(G \cap E)$$

حل التمرين 17

يحتوي فضاء العينة على مجموعة التوفيقات لعنصرين 02 من بين 10 عناصر، أي C_{10}^2 حالة

ليكن الحدث A: "الحصول على سحب لورقتين مختلفتين"

هناك 03 إمكانيات للحصول على الحدث A: (1 ورقة "نعم" وورقة "لا" 2 ورقة "نعم" وورقة بيضاء 3 ورقة "لا" وورقة بيضاء)

إذا نستطيع تعداد عدد الحالات الملائمة لوقوع الحدث A ب: $C_4^1 C_3^1 + C_4^1 C_3^1 + C_3^1 C_3^1$ وعليه

$$P(A) = \frac{C_4^1 C_3^1 + C_4^1 C_3^1 + C_3^1 C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{33}{45} = \frac{11}{15}$$

حل التمرين 18

1. إستكمال الجدول

المجموع	عدد التلاميذ الذين قاموا بالتطعيم	عدد التلاميذ الذين لم يطعموا	
100	93	7	عدد التلاميذ الذين أصيبوا بالأنفلونزا
900	557	343	عدد التلاميذ الذين لم يصابوا بالأنفلونزا
1000	650	350	المجموع

2. في فصل الربيع ، يتم اختيار بشكل عشوائي تلميذ واحد من المدرسة الثانوية. ويتم اعتبار الأحداث التالية:

A: "تم تطعيم التلميذ" ؛

B: "التلميذ أصيب بالأنفلونزا".

أ. تعاريف الأحداث

A التلميذ قام بالتطعيم

$A \cap B$ التلميذ قام بالتطعيم وقد أصيب بالأنفلونزا

$\bar{A} \cap B$ التلميذ لم يقيم بالتطعيم وقد أصيب بالأنفلونزا

ب. احساب احتمال الأحداث:

$$P(A) = 350/1000 = 0,35$$

$$P(A \cap B) = 7/1000 = 0,007$$

$$P(\bar{A} \cap B) = 93/1000 = 0,093$$

3. احسب الاحتمالات الشرطية

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,007}{0,35} = 0,02$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,007}{0,1} = 0,07$$

حل التمرين 19

1 - احتمال أن تكون من المصنع A وبها خلل

- بما أن : $P(A) = 0,15$ و $P(E/A) = 5\% = 0,05$

إحتمال أن تكون من المصنع A وبها خلل هو $P(A \cap E)$ ونعلم أن : $P(E/A) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)}$

وعليه $P(A \cap E) = P(A) \times P(E/A) = 0,15 \times 0,05 = 0,0075$

2- احتمال E

بما أن :

$$P(A) = 0,15 \dots P(B) = 0,20 \dots P(C) = 0,30 \dots P(D) = 0,35$$

$$(E/A) = 5\% = 0,05 \dots P(E/B) = 4\% = 0,04 \dots P(E/C) = 3\% = 0,03 \dots P(E/D) = 2\% = 0,02$$

وبالتالي:

$$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E) + P(D \cap E)$$

$$P(E) = P(A) \times P(E/A) + P(B) \times P(E/B) + P(C) \times P(E/C) + P(D) \times P(E/D)$$

$$P(E) = 0,15 \times 0,05 + 0,20 \times 0,04 + 0,30 \times 0,03 + 0,35 \times 0,02$$

$$P(E) = 0,0315$$

3 – الآلة بها خلل إحتمال أن تكون من المصنع B

$$P(B/E) = \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{P(B) \times P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{0,2 \times 0,04}{0,0315} = 0,254$$

4 – الآلة بها خلل إحتمال أن تكون من المصنع C أو D

$$P((C \cup D)/E) = \frac{P((C \cup D) \cap E)}{P(E)} = \frac{P((C \cap E) \cup (D \cap E))}{P(E)} = \frac{P(C \cap E) + P(D \cap E) - P((C \cap E) \cap (D \cap E))}{0,0315}$$

وبما أن : $P((C \cap E) \cap (D \cap E)) = 0$ لأنهما حادثتين متعارضتين فإن:

$$= \frac{P(C \cap E) + P(D \cap E) - 0}{0,0315} = \frac{0,30 \times 0,03 + 0,35 \times 0,02}{0,0315} = 0,508$$

حل التمرين 20

بفرض أن E حدث أن التقرير المختار بلا خطأ

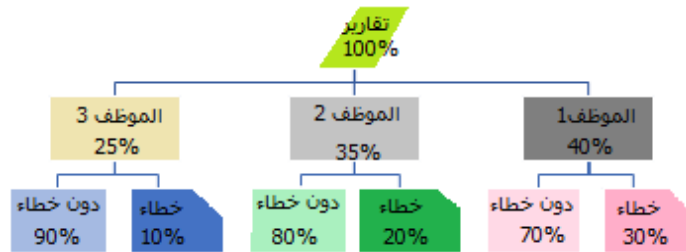
احتمال أن يكون التقرير نسخه الموظف الأول $P(A_1) = 0,4 \times$

احتمال أن يكون التقرير نسخه الموظف الثاني $P(A_2) = 0,35 \times$

$\times$ إذاً يكون احتمال أن يكون التقرير نسخه الموظف الثالث هو : $P(A_3) = 0,25$

نستطيع تمثيل ما يلي:

$P(E/A_1) = 0,7$ احتمال أن يكون التقرير بلا خطأ وقد تم نسخه الموظف الأول
 $P(E/A_2) = 0,8$ احتمال أن يكون التقرير بلا خطأ وقد تم نسخه الموظف الثاني:
 $P(E/A_3) = 0,9$ احتمال أن يكون التقرير بلا خطأ وقد تم نسخه الموظف الثالث:



فإذا اختير أحد تقارير الشركة عشوائياً فوجد بلا أخطاء فيكون احتمال أن يكون الموظف الأول هو الذي نسخه.

$$P(A_k/E) = \frac{P(E/A_k)P(A_k)}{\sum_i P(E/A_i) \times P(A_i)}$$

$$P(A_1/E) = \frac{P(E/A_1)P(A_1)}{\sum_i P(E/A_i) \times P(A_i)} = \frac{0,7 \times 0,4}{(0,7 \times 0,4) + (0,8 \times 0,35) + (0,9 \times 0,25)} = \frac{0,28}{0,785} = 0,3567$$

حل التمرين 21

جزء أ: يوجد إذا في التوريد الأول 10 أسلاك من النوع C1 و 40 من النوع C2 ونسجل هنا أنه يوجد C_4^{50} طريقة لإختيار 4 أسلاك من بين 50 سلك.

1. عدد الحالات التي يتم إختيار 4 أسلاك من نوع C1 هو C_4^{10} ومنه إحتمال الحادثة E

$$P(E) = \frac{C_4^{10}}{C_4^{50}} = \frac{3}{3290} \cong 0,00091$$

2. عدد الحالات التي يتم إختيار سلك من نوع C1 هو 10

عدد الحالات التي يتم إختيار 3 أسلاك من نوع C2 هو C_3^{40} ومنه إحتمال الحادثة F هو:

$$P(F) = \frac{10 \times C_3^{40}}{C_4^{50}} = \frac{988}{2303} \cong 0,429$$

3. لدينا الحادثة $\bar{G} = \text{"كل الاسلاك ليست من نوع C1"} = \text{"كل الاسلاك ليست من نوع C2"}$

عدد الحالات التي يتم إختيار 4 أسلاك من نوع C2 هو C_4^{40} ومنه إحتمال الحادثة G يكون:

$$P(G) = 1 - P(\bar{G}) = 1 - \frac{C_4^{40}}{C_4^{50}} = \frac{13891}{23030} \cong 0,603$$

جزء ب: بما أننا نقوم بالسحب مع الإرجاع, فإن إعادة التجربة n مرة يكون بنفس الطريقة وبصفة مستقلة, نستطيع القول أن X أمام قانون ذي الحدين ذات المعاملات n=4 و p=0,2. أي :

$$X \mapsto B(n, p) = B(4; 0,2)$$

فلدينا لكل عدد k محصور بين 0 و 4 : $P(X = k) = \binom{4}{k} (0,2)^k (0,8)^{4-k}$

4. إحتمال الحصول على 2 أسلاك من نوع C1 : $P(X = 2) = \binom{4}{2} (0,2)^2 (0,8)^2 = 0,1536$

5. إحتمال الحصول على الأقل سلك واحد من نوع C1 :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,8^4 = 0,5904$$

6. التوقع الرياضي E(X) لمتغير عشوائي يتبع قانون ذي الحدين هو: $E(X) = np$

$4 \times 0,2 = 0,8$ ومنه فإن في المتوسط نتحصل على 80% من الاسلاك من نوع C1

حل التمرين 22

يمثل متغير عشوائي S عدد الطلاب الذين يتوقع التحاقهم بجامعة UT السنة المقبلة, حيث :

S	48.500	50.000	53.000	Σ المجموع
$P(S=s)$	0,3	0,5	0,2	
$S \times P(S)$	14.550	25.000	10.600	50.150
S^2	2 352 250 000	2 500 000 000	2 809 000 000	
$S^2 \times P(S)$	705 675 000	1 250 000 000	561 800 000	2 517 475 000
C	64.818,3979	66.622,9667	70.231,7071	$C=5000 + 1,2xS + 150x\ln(S)$
$C \times P(C)$	19.445,5194	33.311,4834	14.046,3414	66.803,3441

(1) - الأمل الرياضي $E(S) = \sum S \times P(S) = 50.150$ طالب

- تبين $V(S) = E(S^2) - (E(S))^2$

أين $E(S^2) = \sum S^2 \times P(S) = 2.517.475.000$

إذا $V(S) = E(S^2) - (E(S))^2 = 2.517.475.000 - 2.515.022.500 = 2.452.500 = V(S)$

(2) تقدر التكلفة C لعملية الإواء والخدمات الاجتماعية بـ:

$$C=5000 + 1,2xS + 150x\ln(S)$$

الأمل الرياضي $E(C)$:

$$E(C) = \sum C \times P(C) = \sum [5000 + 1,2 \times S + 150 \times \ln(S)] \times P(S = s) = 66.803,3441$$

وحدة نقدية

حل التمرين 23

التوزيع الاحتمالي لعدد الاوجه (Faces) عند رمي ثلاثة قطع نقدية.

عدد الحالات $Card(\Omega) = 2^3 = 8$ والمجموعة الأساسية

$$\Omega = \{(FFF), (FFP), (FPF), (PFF), (FPP), (PFP), (PPF), (PPP)\}$$

ليكن X عدد الأوجه المتحصل عليها في كل رمية، يكون التوزيع الاحتمالي :

X_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$1/8=0,125$	$3/8=0,375$	$3/8=0,375$	$1/8=0,125$

الأمل الرياضي $E(X) = \sum x_i \times P(X = x_i)$

لنحسب الجدءاءات:

X_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$1/8=0,125$	$3/8=0,375$	$3/8=0,375$	$1/8=0,125$
$X_i.P(X=x_i)$	0	$1 \times 0,375$	$2 \times 0,375$	$3 \times 0,125$

إذا: $E(X) = \sum x_i \times P(X = x_i) = 0 + 1 \times 0,375 + 2 \times 0,375 + 3 \times 0,125 = 1,5$

التباين $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

لنحسب $E(X^2)$:

X_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$1/8=0,125$	$3/8=0,375$	$3/8=0,375$	$1/8=0,125$
X_i^2	0	1	4	9
$X_i^2.P(X=x_i)$	0	$1 \times 0,375$	$4 \times 0,375$	$9 \times 0,125$

إذاً: $E(X^2) = \sum x_i^2 \times P(X = x_i) = 0 + 1 \times 0,375 + 4 \times 0,375 + 9 \times 0,125 = 3$

وعليه: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3 - (1,5)^2 = 3 - 2,25 = 0,75$

حل التمرين 24

أ) من بين الكرات المسحوبة:

_عندما لا نحصل على أية كرة بيضاء فإن: $X = 0$

_عندما نحصل على كرة بيضاء واحدة فإن: $X = 1$

_عندما نحصل على 2 كرات بيضاء فإن: $X = 2$

مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي: $\{0,1,2\}$

ب) قانون احتمال المتغير العشوائي X

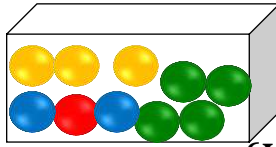
_حساب $P(X = 0)$: $P(X = 0) = P(B) = \frac{35}{84} = \frac{5}{12}$

_حساب $P(X = 1)$: $P(X = 1) = \frac{(C_2^1 \times C_7^2)}{84} = \frac{42}{84} = \frac{1}{2}$

_حساب $P(X = 2)$: $P(X = 2) = \frac{(C_2^2 \times C_7^1)}{84} = \frac{7}{84} = \frac{1}{12}$

نلخص قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X في الجدول التالي:

X_i	0	1	2
P_i	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$



حل التمرين 25

تحتوي حاوية على 10 كريات:

$$\{J; J; J; B; B; R; V; V; V; V\}$$

1- بما أن كل كرة لها نفس الحظ في أن تسحب فإننا نستطيع حساب الاحتمال P لوقوع حادثة من خلال:

$$P = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

$$P(V) = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$P(R) = \frac{1}{10} = 0,1 \quad P(B) = \frac{2}{10} = 0,2 \quad P(J) = \frac{3}{10} = 0,3$$

2- حسب اللون المأخوذ ننسب قيمة نقدية على النحو التالي:

- اللون الأحمر (R) = قيمة 10 دج

- اللون الأخضر (V) = قيمة 2 دج

- اللون الأصفر (J) أو الأزرق (B) = قيمة 3 دج

X المتغير العشوائي الذي ينسب لكل كرة مسحوبة الربح المحقق (القيمة النقدية)

$$P(X = 2) = P(V) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,4 \quad \text{أ-}$$

بما أننا نسحب كرة واحدة فقط فإن الحادثة J والحادثة B متنافيتين وعليه:

$$P(J \cup B) = P(J) + P(B)$$

$$P(X = 3) = P(J \cup B) = P(J) + P(B) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0,5 \quad \text{إذا:}$$

$$P(X = 10) = P(R) = \frac{1}{10} = 0,1$$

ب- التوزيع الاحتمالي للمتغير X يكون على النحو التالي:

X	2	3	10
$P(X)$	$4/10=0,4$	$5/10=0,5$	$1/10=0,1$

الأمل الرياضي $E(X)$

$$E(X) = \sum x_i \cdot P(X = x_i) = (2 \times \frac{4}{10}) + (3 \times \frac{5}{10}) + (10 \times \frac{1}{10}) = \frac{33}{10} = 3,3$$

تباين $V(X)$ المتغير X

$$V(X) = \sum x_i^2 \cdot P(X = x_i) - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$V(X) = ((2^2 \times \frac{4}{10}) + (3^2 \times \frac{5}{10}) + (10^2 \times \frac{1}{10})) - (3,3^2) = 16,1 - 10,89 = 5,21$$

وعليه: 3- إذا افترضنا Y المتغير العشوائي المنتسب للحالة الثانية للربح فالتوزيع الاحتمالي للمتغير

Y يكون على النحو التالي

اللون	اخضر V	اصفر A	أزرق B	أحمر R
Y	2	3	m	10
$P(Y)$	$4/10=0,4$	$3/10=0,3$	$2/10=0,2$	$1/10=0,1$

نريد أن يكون الأمل الرياضي $4,5=E(Y)$

$$E(Y) = \sum y_i \cdot P(Y = y_i) = (2 \times \frac{4}{10}) + (3 \times \frac{3}{10}) + (m \times \frac{2}{10}) + (10 \times \frac{1}{10}) = 4,5 \quad \text{بمعنى:}$$

$$9=m \quad \text{وعليه فإن قيمة } m=9 \quad 45=2m-27$$

حل التمرين 26

(1) لكي تصبح $f(x)$ دالة كثافة احتمالية يجب أن تحقق: $f(x)$ موجبة أي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1 \quad \text{و} \quad 0 \leq f(x) \leq 1$$

المعامل λ لكي تصبح $f(x)$ دالة كثافة

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda x^2 \cdot dx = \lambda \int_0^1 x^2 dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \lambda \left[\frac{1^3}{3} - 0 \right] = \frac{\lambda}{3}$$

$$= 1 \dots \Rightarrow \lambda = 3$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 \cdot x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

ومنه فالدالة تكون معرفة بـ:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (2) \quad \text{التباين } V(X) \text{ نعلم أن}$$

لنحسب التوقع الرياضي $E(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 3 \cdot x^2 \cdot dx = 3 \int_0^1 x^3 dx = 3 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 3 \left[\frac{1^4}{4} - 0 \right]$$

$$= \frac{3}{4} = 0,75$$

ونحسب: $E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot dx = 3 \int_0^1 x^4 dx = 3 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 3 \left[\frac{1^5}{5} - 0 \right] = \frac{3}{5} = 0,6$$

إذاً:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48 - 45}{80} = \frac{3}{80} = 0,0375$$

$$P(a \leq X \leq b) = P([a, b]) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \text{نعلم أن :} \quad (3)$$

$$P(0 \leq X \leq 0,5) = \int_0^{0,5} f(x)dx = \int_0^{0,5} 3 \cdot x^2 \cdot dx = 3 \int_0^{0,5} x^2 dx = 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{0,5} = 3 \left[\frac{0,5^3}{3} - 0 \right] = \frac{3}{64} = 0,046875$$

$$P(0,9 \leq X \leq 1) = \int_{0,9}^1 f(x)dx = \int_{0,9}^1 3 \cdot x^2 \cdot dx = 3 \int_{0,9}^1 x^2 dx = 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{0,9}^1 = 3 \left[\frac{1^3}{3} - \frac{0,9^3}{3} \right] = 0,257925$$

حل التمرين 27

نمثل التوزيع الاحتمالي عن طريق تكامل دالة كثافة احتمالية $f(X)$ في نطاق قيم المتغير العشوائي وهي إذاً :

$$x < 0: \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du = \int_{-\infty}^0 0du = 0$$

$$0 \leq x < 3: \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du = \int_{-\infty}^0 0du + \int_0^x \frac{1}{9} u^2 du = \frac{1}{9} \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

$$x \geq 3: \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du = \int_{-\infty}^0 0du + \int_0^3 \frac{1}{9} u^2 du + \int_3^x 0du = 0 + \frac{1}{9} \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^3 + 0 = \frac{27}{27} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^3}{27} & 0 \leq x < 3 \\ 1 & \geq 3 \end{cases} \quad \text{وعليه يكون التوزيع الاحتمالي على النحو التالي:}$$

حل التمرين 28

مدة صلاحية أجهزة إلكترونية تتبع ظاهرة عشوائية ممثلة بالكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000} e^{-x/1000} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1- نستطيع ملاحظة من أن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية لأن $0 \leq f(x)$ وكذا:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القانون التالي:

$$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln(a)} + c \quad \text{وعلى نفس المنوال إذا كانت:}$$

$$\int u' a^u dx = \int -\frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} dx = \frac{e^{-\frac{x}{1000}}}{\ln(e)} = e^{-\frac{x}{1000}} : \text{ فإن } -\frac{1}{1000} = u' \Leftarrow -\frac{x}{1000} = u$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} \cdot dx = \left[-e^{-\frac{x}{1000}} \right]_0^{\infty} = [0 + 1] = 1 \text{ وعليه :}$$

$$2 - \text{التوقع الرياضي } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{\infty} x \left(\frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} \right) dx \text{ نطبق}$$

$$\text{القانون : } \int uv' dx = uv - \int u'v dx \text{ ومنه :}$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \left(\frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} \right) dx = x(-e^{-\frac{x}{1000}}) - \int_0^{\infty} -e^{-\frac{x}{1000}} dx = - \left| 1000 \times e^{-\frac{x}{1000}} \right|_0^{\infty} = 1000$$

3 - احتمال أن تتراوح مدة الحيات بين 100 و 1000 ساعة

$$P(100 < x < 1000) = \int_{100}^{1000} f(x) \cdot dx = \int_{100}^{1000} \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} \cdot dx = \left[-e^{-\frac{x}{1000}} \right]_{100}^{1000} \\ = -e^{-1} + e^{-0,1} = 0,905 - 0,368 = 0,537$$

حل التمرين 29

المتغير X في هو عدد السنوات الجافة.

- في كل محاولة هنالك نتيجتان هما إما حدوث سنة جافة (نجاح) أو حدوث سنة رطبة (فشل).

- نسبة حدوث سنوات جافة (احتمال الحصول علي نجاح) $0.25 = p$

- عدد المحاولات (السنوات) الكلي $3 = n$

- بما أن حدوث سنة جافة أو رطبة في كل مرة لا يؤثر علي حدوث سنة جافة أو رطبة في

المحاولة التالية نستطيع أن نقول أن النواتج في كل المحاولات مستقلة عن بعضها.

- التوزيع الاحتمالي للمتغير X حسب توزيع ذو الحدين:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X = x) = \binom{3}{x} (0.10)^x (1-(0.10))^{3-x}$$

احتمال حدوث الجفاف في سنة واحدة من الثلاث سنوات =

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} (0.10)^1 (1-(0.10))^{3-1} = \binom{3}{1} (0.10)^1 (0.9)^2 = 3 \times 0.1 \times 0.81 = 0.243$$

حل التمرين 30

في تجربة نرمي 12 مرة قطعة نقدية متوازنة

احتمال الحصول على الصورة (Pile) يتبع قانون ذي حدين $B(N, p) = B(12; p=1/2=0.5)$

أي الحصول على k مرة الصورة (Pile) باحتمال:

$$P(X = k) = \binom{N}{k} (p)^k (1-p)^{N-k}$$

$$P(X = k) = \binom{N}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{N-k} = \binom{N}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{N-k} = \frac{N!}{k! \times (N-k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{N-k} \quad \text{أي:}$$

1- احتمال الحصول على الصورة (Pile) خمس (5) مرات =

$$P(X = 5) = \binom{12}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{12-5} = \frac{12!}{5! \times (12-5)!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{12-5} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5!} \times \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{2^7} =$$

$$\Rightarrow P(X = 5) = \frac{95040}{120} \times \frac{1}{4096} = \frac{792}{4096} = \frac{99}{512} = 0,1934$$

2- احتمال الحصول على الصورة (Pile) مرة واحدة على الأقل هو

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$P(X = 0) = \binom{12}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{12-0} = \frac{12!}{0! \times (12-0)!} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4096}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1}{4096} = \frac{4095}{4096} = 0,9998 \quad \text{ومنه فإن:}$$

حل التمرين 31

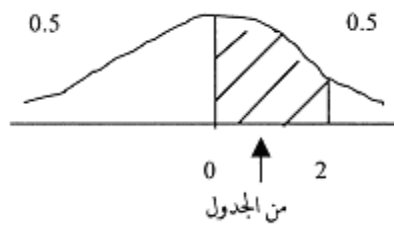
يمكن تمثيل قيم الإيداع النقدي بمتغير X والذي يتبع توزيعه الاحتمالي التوزيع الطبيعي

$$X \mapsto \mathcal{N}(\mu, \delta) \quad \text{أي} \quad X \mapsto \mathcal{N}(500, 100) \quad \text{وعليه فإن} \quad \frac{X-500}{100} = \frac{X-\mu}{\delta} = Z \quad \text{يتبع}$$

$$Z \mapsto \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{القانون الطبيعي المعياري}$$

وعليه فيكون حساب الاحتمالات على النحو التالي:

1- يقل الإيداع النقدي عن € 700 .

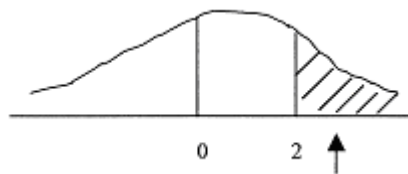


$$P(x \leq 700)$$

$$Z = \frac{700 - 500}{100} = 2$$

$$P(Z \leq 2) = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$$

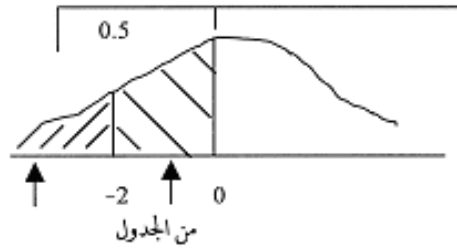
2- أن يزيد الإيداع النقدي عن € 700 .



$$P(x > 700) = P(Z > 2)$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772$$

$$= 0.0228$$



3- أن يقل الإيداع النقدي عن 300 €.

$$P(x \leq 300)$$

$$Z = \frac{300 - 500}{100} = -2$$

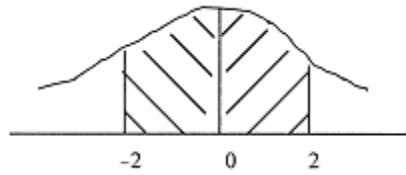
$$\begin{aligned} \therefore P(Z \leq -2) &= 1 - P(Z > 2) \\ &= 1 - 0.9772 \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

4- أن يتراوح الايداع اليومي بين 300 و 700 €

$$P(300 \leq x \leq 700) =$$

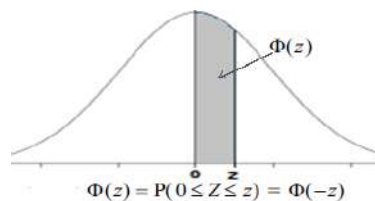
$$P(-2 \leq Z \leq 3)$$

$$= 0.4772 + 0.4772 = \underline{\underline{0.9554}}$$



الملاحق

الملحق 1



$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2} dt$$

Function of the Standard Normal Distribution

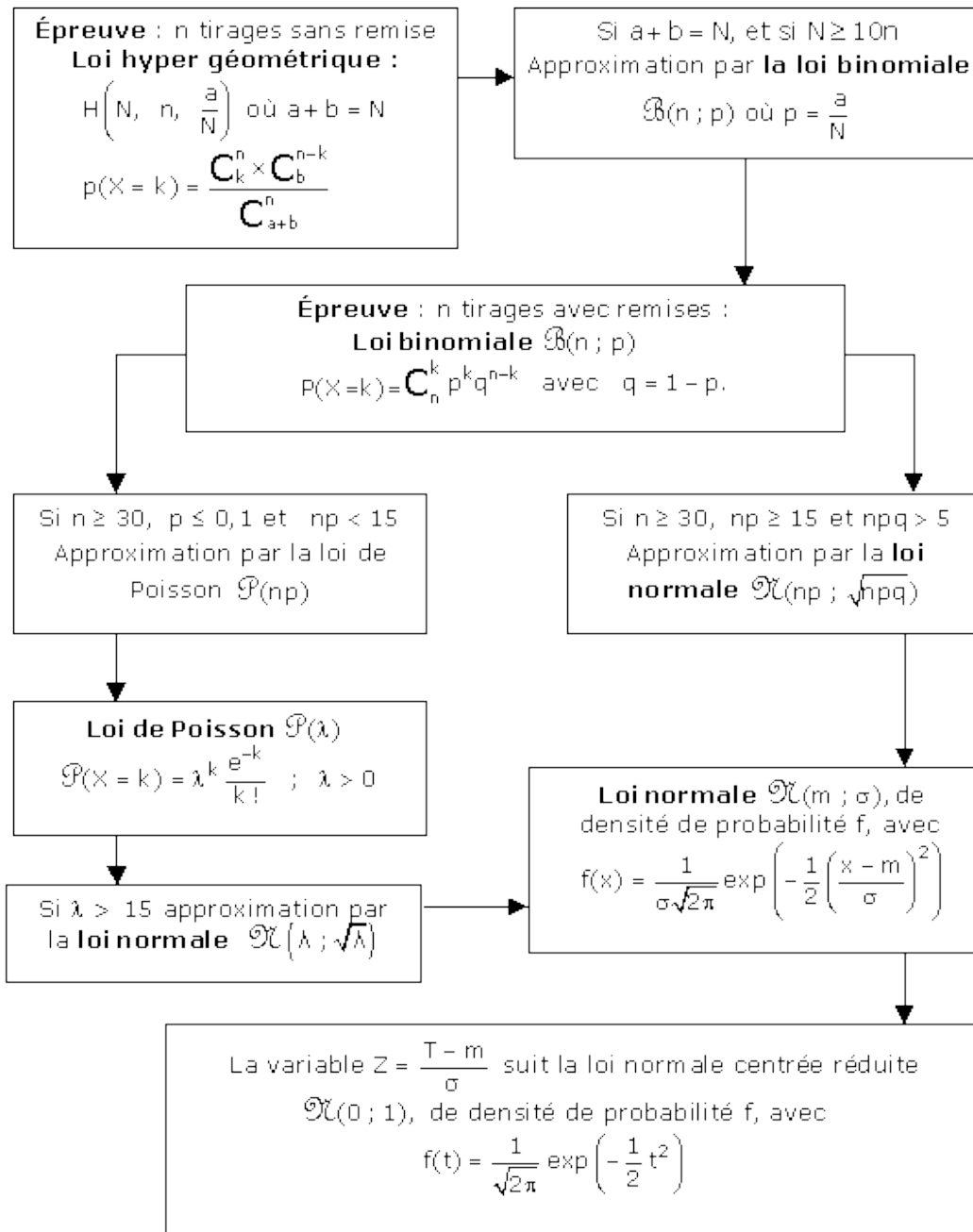
This table gives a probability that a statistic is between 0 (the mean) and Z^1 , shaded area in the diagram.

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

¹ Distribution Function of the Standard Normal Distribution". NIST. Retrieved 5 May 2012.

الملحق 2

التحويلات بين القوانين



المراجع:

- [1] موراي شبيجل؛ جونشيلر؛ ألسرينيفاسان؛ مايكل يفان (تأليف)؛ ترجمة محمود علي أبو النصر؛ مصطفى جلال مصطفى. ملخصات شوم ايزي الاحتمالات والاحصاء Probability and statistics، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، القاهرة. ISBN 977-282-142-7. 164 ص. ؛ 2004.
- [2] دومينيك سالفاتور (مؤلف) ؛ ترجمة سعدية حافظ منتصر؛ مراجعة عبد العظيم أنيس. ملخصات شوم، نظريات ومساائل في الاحصاء والاقتصاد القياسي – الطبعة: 1. الدار الدولية للنشر والتوزيع، القاهرة، 282 ص، 1982.
- [3] موراي. شبيجل (مؤلف)؛ ترجمة د. شعبان عبد الحميد شعبان؛ مراجعة أحمد حسن الموازني، ملخصات شوم، نظريات ومساائل في الإحصاء، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، القاهرة، 552 ص، 2000.
- [4] -صلاح الأحمـد، الاحتمالات، جامعة دمشق، 1981.
- [5]
- [6] Douglas C. Montgomery, George C. Runger. 'Applied Statistics and Probability for Engineers', 3rd Edition, Arizona State University., John Wiley & Sons, (2003).
- [7] Gilbert Saporta. 'Probabilités, analyse des données et statistique', 493 pages, Editions Technip, Paris, 1990
- [8] John Schiller, R. AluSrinivasan, Murray Spiegel. 'Schaum's Outline of Probability and Statistics', 3rd Ed., Schaum's Outline Series, McGraw-Hill publisher, ISBN-0071544259, 9780071544252, (2008).
- [9] Mosteller, F., Rourke, R., and G. Thomas. 'Probability with Statistical Applications', 2nd Edition., Addison-Wesley, (1970).
- [10] Murray R. Spiegel, John Schiller, and R. Alu Srinivasan. 'Probability and Statistics'. Schaum's Outline By. Edition. McGraw-Hill, (2001).
- [11] Robert V. Hogg, Elliot A. Tanis, Dale Zimmerman. 'Probability and Statistical Inference' 9th Edition Published by Pearson; ISBN-13: 978-0-321-92029-4, 552 pages, (2013).
- [12] W. Feller. 'An Introduction to Probability Theory and its Applications', Volume I, John Wiley, (1962).