

1-4/ Applications linéaires

1-4-1/ Définition 9 : Soient E et E' deux espaces vectoriels sur le même K et f une application de E dans E' . On dit que f est une application linéaire si :

$$(1) f(u+v) = f(u) + f(v), \quad \forall u, v \in E$$

$$(2) f(\lambda v) = \lambda f(v), \quad \forall v \in E, \forall \lambda \in K$$

N-B : - l'ensemble des applications linéaires de E dans E' est noté $L(E, E')$.

- Une application linéaire $f : E \longrightarrow E$ est appelée endomorphisme.

- $f(0_E) = 0_{E'}$ (car homomorphisme de groupes).

Exemples :

$$(1) \begin{array}{l} Id_E : E \longrightarrow E \\ v \longrightarrow v \end{array} \quad Id_E \text{ est linéaire dite application identité de } E.$$

$$(2) \begin{array}{l} D : R[X] \longrightarrow R[X] \\ P \longrightarrow D(P) = P' \end{array} \quad D \text{ est linéaire dite dérivation d'un polynôme.}$$

(3) Soit $v_0 \neq 0_E$ ($v_0 \in E$). On définit l'application

$$\begin{array}{l} g : E \longrightarrow E \\ v \longrightarrow v + v_0 \end{array} \quad g \text{ n'est pas linéaire car } g(0_E) = v_0 \neq 0_E.$$

1-4-2/ Image et noyau :

a-) Image d'une application linéaire : Soit $f : E \longrightarrow E'$ une application linéaire.
 $x \longrightarrow y = f(x)$

$f(E)$ est un sous espace vectoriel de E' , appelé image de f est noté $\text{Im } f$.

$$\text{Im } f = \{f(x) \in E' / \exists x \in E : y = f(x)\}$$

Remarque : On a par définition de l'image directe $f(E)$:

$$f \text{ est surjective ssi } \text{Im } f = E'$$

b-) Noyau d'une application linéaire : Soit $f : E \longrightarrow E'$ une application linéaire.
 $x \longrightarrow y = f(x)$

Le noyau de f noté $\text{Ker } f$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image est $0_{E'}$.

$$\text{Ker } f = \{x \in E / f(x) = 0_{E'}\}$$

N-B :

(*) Le noyau est l'image réciproque du vecteur nul de l'espace d'arrivée : $\text{Ker } f = f^{-1}(0_{E'})$.

(*) $\text{Ker } f$ est un sev de E .

Exemple :

$$\begin{array}{l} f : R^3 \longrightarrow R^2 \\ (x, y, z) \longrightarrow f(x, y, z) = (-2x, y + 3z) \end{array}$$

Calculer $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$.

$\text{Ker}(f) = ?$

On a $\text{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (0, 0)\}$

$$f(x, y, z) = (0, 0) \Leftrightarrow (-2x, y + 3z) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc $\text{Ker} f = \{(0, -3z, z) / z \in \mathbb{R}\}$.

$\text{Im}(f) = ?$

$\text{Im} f = \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 / \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (x', y')\}$.

Fixons $(x', y') \in \mathbb{R}^2$.

$$(x', y') = f(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = x' \\ y + 3z = y' \end{cases}$$

On peut prendre par exemple $x = -\frac{x'}{2}, y = y', z = 0$.

Conclusion pour n'importe quel $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ on a $f(-\frac{x'}{2}, y', 0) = (x', y') \Rightarrow \text{Im} f = \mathbb{R}^2$ et f est surjective.

c-) Théorème : Soient E, F deux K -ev et f une application linéaire de E dans F alors :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$$

d-) Théorème : Soit $f \in L(E, F)$ et $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs de E .

(1) Si f est injective et la famille $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est libre dans E alors la famille $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ est libre dans F .

(2) Si f est surjective et la famille $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est génératrice de E alors $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ est génératrice de F .

N-B : En particulier si f est bijective, l'image d'une base de E est une base de F .

e-) Théorème du rang :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel quelconque et $f \in L(E, F)$.

Les espaces $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$ sont de dimensions finies et ces dimensions vérifient :

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \text{Im} f$$

N-B : $\dim \text{Im} f = \text{rg}(f)$

Deux ev de dimensions finies E et F sur un même K sont isomorphes ($E \cong F$) s'ils ont même dimension.

Exemple : Soit $E = K$ -ev. E est isomorphe à $K^n \Leftrightarrow \dim E = n$

Remarque importante :

Si $f \in L(E, F)$ alors $\text{rg}(f) \leq \min(\dim E, \dim F)$

Exercice :

Soit f l'application linéaire définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = (2x - 4y, x - 2y)$$

Déterminer $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$. Calculer leurs dimensions. f est-elle bijective ?

Solution :

(*) $\text{Ker} f = ?$

$$\text{Ker} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (0, 0)\} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y$$

$$\text{Ker} f = \{(2y, y) \in \mathbb{R}^2 / y \in \mathbb{R}\} = \{y(2, 1) \in \mathbb{R}^2 / y \in \mathbb{R}\}$$

Donc $\text{Ker} f$ est engendré par le vecteur $(2, 1) \neq (0, 0) \Rightarrow \dim \ker f = 1 \Rightarrow f$ n'est pas injective.

(*) $\text{Im} f = ?$

$$\text{Im} f = \{(2x - 4y, x - 2y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

On a $(2x - 4y, x - 2y) = x(2, 1) + y(-4, -2)$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Ainsi $\text{Im} f$ est engendré par deux vecteurs qui ne sont pas libres :

$(-4, -2) = -2(2, 1) \Rightarrow \dim \text{Im} f = 1 \Rightarrow f$ n'est pas surjective.

D'après le théorème du rang : $\dim E = \dim \ker f + \dim \text{Im} f$

$$\Rightarrow \dim \text{Im} f = \text{rg}(f) = \dim E - \dim \text{Ker} f = 2 - 1 = 1$$

f n'est pas bijective, car elle n'est ni injective ni surjective.