$x_1 \in F^{\perp} \Rightarrow f(y, x_1) = 0, \forall y \in F$

$x_2 \in F^{\perp} \Rightarrow f(y, x_2) = 0, \forall y \in F$

$\forall y \in F, f(y, x_1 + x_2) = f(y, x_1) + f(y, x_2) = 0_K + 0_K = 0_K$

$\Rightarrow x_1 + x_2 \in F^{\perp}.$

(*) ليكن $x \in F^{\perp}$ و $\lambda \in K$

$\forall y \in F, f(y, \lambda x) = \lambda f(y, x) = \lambda . 0_K = 0_K \Rightarrow \lambda x \in F^{\perp}$

ومنه $F^{\perp}$ فضاء شعاعي جزئي من E.

خواص:

(1) $E^{\perp} = N(q)$.

(2) $\{0\}^{\perp} = E$

فرضية: ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته على K
F ف. ش. ج من E و q شكل تربيعي على E. فإن:

(1) $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp} - \dim F \cap N$ ، $N = N(q)$

(2) $(F^{\perp})^{\perp} = F + N$

وإذا كان q non dégénerée فإن

(3) $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp}$

(4) $(F^{\perp})^{\perp} = F.$

الأسس المتعامدة: ليكن E ف. ش ذو بعد منته n على $\mathbb{R}$. q شكل تربيعي على E و f الشكل القطبي المرفق له.

تعريف: نقول عن أساس $\{e_1, \dots, e_n\}$ لـ E أنه متعامد بالنسبة لـ q (orthogonale)

وإذا كان $f(e_i, e_j) = 0 \ , \ \forall i \neq j$

نقول عن $\{e_1, \dots, e_n\}$ أنه متعامد متجانس (orthonormée)

إذا كان $f(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \ , & i \neq j \\ 1 \ , & i = j \end{cases}$

ملاحظة: $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ أساس متعامد لـ E

إذا وفقط إذا كان

$$M(q, B) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \ , \ \alpha_i = f(e_i, e_i) = q(e_i).$$

وهذا يكافئ أن

$$(*) \cdots \ q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2 \ , \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

ومنه $rg(q)$ هو عدد المركبات α_i غير المعدومة، وأيضا يساوي عدد المربعات في العبارة $(*)$.

ومنه نستنتج أن البحث عن أساس متعامد لـ E يعود لتعيين أساس لـ E بحيث تكون المصفوفة المرفقة لـ q بالنسبة لهذا الأساس قطرية، أو بصيغة مكافئة: كتابة q على شكل مجموع حدود مربعة.

ملاحظة: يجب عدم الخلط بين هذه الوضعية وقابلية التقطير للاندومورفيزمات.

إذا كانت A مصفوفة مرفقة لإندومورفيزم

$P^{-1}AP$ قطرية $\qquad$ ${}^{t}PAP$ قطرية

قابلية التقطير (II)

نظرية : ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته على $\mathbb{R}$ و q شكل تربيعي . $E \neq \{0\}$ ، فإنه يوجد أساس متعامد لـ E بالنسبة لـ q .

$$\exists \{e_i\},\ x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\ ,\ q(x)=\alpha_1 x_1^2+\cdots+\alpha_r x_r^2$$

بحيث $\alpha_i \in \mathbb{R}$ و $r=rg(q)$

$$M(q,B)=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

البرهان : نبرهن بالتراجع على n .

إذا كان $n=1$ واضح ولا يوجد شيء نبرهنه .

نفرض أن النظرية صحيحة من أجل $n-1$ ونبرهن أنها صحيحة من أجل n .

* إذا كان $q=0$ فإن أي أساس لـ E يكون متعامد .
* نفرض أن $q\neq 0$ و ليكن $v\in E$ بحيث $q(v)\neq 0$

نضع $F=\{x\in E \mid f(x,v)=0\}$ حيث f هو الشكل القطبي لـ q .

F له بنية فضاء شعاعي جزئي من E و $v\notin F$

لدينا $0_E\in F$ لأن $f(0,v)=0$ ومنه $F\neq\phi$.

ليكن التطبيق

$$\varphi : E \longrightarrow K \qquad y \longmapsto \varphi(y)=f(y,v)$$

، φ شكل خطي

و $F=\ker\varphi$. ومنه F ف. ش. ج من E .

من جهة أخرى ، لدينا

$$\dim \ker \varphi + \dim Im\, \varphi = \dim E = n$$

و $\dim Im\, \varphi \leq \dim \mathbb{R} = 1$. بما أن

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(v) = f(v,v) = q(v) \neq 0 \\ \Rightarrow \varphi \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dim Im\, \varphi = 1 .$$

ومنه $\dim F = \dim \ker \varphi = n-1$.

ومنه نستنتج أن $E = F \oplus \langle v \rangle$.

من فرضية التراجع يوجد أساس متعامد لـ F

وليكن $\{v_2, \dots, v_n\}$. إذاً $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساس متعامد لـ E .

إمضاء شكل تربيعي (signature d'une forme quadratique)

تعريف: ليكن q شكل تربيعي و $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ أساس ~~E~~ متعامد لـ E .

نرمز بـ p لعدد العناصر الموجبة الواقعة على القطر في المصفوفة القطرية المرفقة لـ q

$$p = \text{Card}\{ i \,/\, q(e_i) > 0 \}$$

نرمز بـ m لعدد العناصر السالبة الواقعة على القطر في المصفوفة القطرية المرفقة لـ q

$$m = \{ i \mid q(e_i) < 0 \} .$$

نسمي إمضاء q ~~الثنائية~~ الثنائية $sign(q) = (p, m)$

11 - III (signature de q)

نتيجة : ليكن E ف.ش على $\mathbb{R}$ و q تشكل تربيعي على E

بعده n . فإن :

1) q معرف موجب $\Leftrightarrow$ $sign(q) = (n, 0)$.

2) q غير شاذ (non dégénerée) $\Leftrightarrow$ $sign(q) = (p, n-p)$.

$(N(q) = \{0\})$

البحث عن أساس متعامد باستعمال طريقة غوص :

للبحث عن أساس متعامد للفضاء E نستعمل طريقة التبسيط إلى مربعات لغوص.

ليكن q تشكل تربيعي معطى في أساس معين لـ E بـ

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 + 2\sum_{i<j} \alpha_{ij} x_i x_j$$

نبرهن بالتراجع على n . من أجل $n=1$ فإن الخاصية واضحة.

نفرض أن كل تشكل تربيعي لـ $n-1$ متغير يبسط لمربعات لأشكال خطية مستقلة.

حالة 1 : يوجد على الأقل i حيث $\alpha_{ii} \neq 0$. نفرض أن $\alpha_{11} \neq 0$. ومنه q يكتب على الشكل

$$q(x_1, \dots, x_n) = \alpha_{11} x_1^2 + 2x_1 h(x_2, x_3, \dots, x_n) + R(x_2, \dots, x_n)$$

حيث h شكل خطي و R تشكل تربيعي.

$$q = \alpha_{11}\left(x_1 + \frac{h}{\alpha_{11}}\right)^2 - \frac{h^2}{\alpha_{11}} + R$$

$$= \alpha_{11}\left(x_1 + \frac{h}{\alpha_{11}}\right)^2 + S$$

حيث S شكل تربيعي للمتغيرات $x_2, \dots, x_n$ ومنه
حسب خاصية التراجع فإن S "تحلل" طربعات لأشكال
خطية ~~مستقلة~~

<u>مثال توضيحي :</u>

ليكن $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ شكل تربيعي معرف في الأساس
القانوني $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ لـ $\mathbb{R}^3$ بـ

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$$

لدينا

$$q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 7x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 8x_3^2 - x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + 2\left(x_2^2 + 4x_2x_3 + (2x_3)^2\right) - x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + 2(x_2 + 2x_3)^2 - x_3^2$$

نضع

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_2 + 2x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \quad \cdots \; (*)$$

$$P^{-1} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{array} \end{array}$$

حيث $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ هم مركبات الشعاع x في الأساس
المتعامد $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$.

$$q(x) = x_1'^2 + 2x_2'^2 - x_3'^2$$

لدينا $X' = P^{-1}X$ حيث P هي مصفوفة العبور من الأساس القانوني B إلى B'.

من ⓧ نجد: $\Rightarrow X = PX'$ $\begin{cases} x_1 = x_1' - x_2' + 2x_3' \\ x_2 = x_2' - 2x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$

$$\Leftarrow \quad P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \end{array}$$

ومنه $B' = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ أساس متعامد لـ q. و

$$M(q, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \cancel{\mathrm{sign}(q) =}$$

و $\mathrm{sign}(q) = (2, 1)$.

ملاحظة: $rg(q) =$ عدد المربعات في تبسيط غوس.

العالة 2: إذا كان q لا يحتوي على x_i^2 أي $\alpha_{ii} = 0$، $\forall i$.

نفرض أن $\alpha_{12} \neq 0$. فإن q سوف يكتب على الشكل

$$q(x_1, \dots, x_n) = \alpha_{12} x_1 x_2 + x_1 h(x_3, x_4, \dots, x_n) + x_2 g(x_3, \dots, x_n) + T(x_3, \dots, x_n).$$

حيث h و g كثيرا حدود من الدرجة الأولى (تشكل خطي)

و T كثير حدود من الدرجة الثانية (تشكل تربيعي)

$$q = \alpha_{12}\left[\left(x_1 + \frac{g}{\alpha_{12}}\right)\left(x_2 + \frac{h}{\alpha_{12}}\right) - \frac{hg}{\alpha_{12}^2}\right] + T$$

$$= \frac{\alpha_{12}}{4}\left[\left(x_1 + x_2 + \frac{h+g}{\alpha_{12}}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{g-h}{\alpha_{12}}\right)^2\right] + T - \frac{hg}{\alpha_{12}}$$

وذلك باستعمال العلاقة : $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

حيث $T - \frac{hg}{\alpha_{12}}$ شكل تربيعي لـ $n-2$ متغير ويتم تحليله كما في الحالة الأولى.

مثال : ليكن

$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3$$

نختار الحد $5x_1x_2$ ، $\alpha_{12} = 5 \neq 0$.

$$q(x) = \frac{1}{5}(5x_2 + 6x_3)(5x_1 + 3x_3) - \frac{18}{5}x_3^2$$

حيث $5x_2 + 6x_3$ هو المشتق q بالنسبة لـ x_1

$5x_1 + 3x_3$ " " " " " x_2.

$$q(x) = \frac{1}{5}ab - \frac{18}{5}x_3^2$$

$$ab = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$$

$$q(x) = \frac{1}{20}(5x_1 + 5x_2 + 9x_3)^2 - \frac{1}{20}(-5x_1 + 5x_2 + 3x_3)^2 - \frac{18}{5}x_3^2$$

نضع

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1+5x_2+9x_3 \\ x_2' = -5x_1+5x_2+3x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$$

حيث $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ هم مركبات الشعاع x في الأساس المتعامد $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$

وعليه $q(x) = \frac{1}{20}x_1'^2 - \frac{1}{20}x_2'^2 - \frac{18}{5}x_3'^2$

تصنيف الأشكال التربيعية على فضاء شعاعي حقيقي.

<u>نظرية سيلفستر</u> (Théorème de Sylvester)

ليكن E ف. شعاعي بعده n على $\mathbb{R}$ و q شكل تربيعي على E. فإنه يوجد أساس $\{e_i\}$ لـ E بحيث إذا كان $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ فإن $q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$

حيث $r = rg(q)$ و p عدد طبيعي لا يتعلق بـ q.

$$M(q, \{e_i\}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}} & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} p \\ \\ r \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

البرهان :

ليكن $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ أساس متعامد لـ E. ليكن $x=\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$

لدينا $q(x)=a_1 y_1^2+\dots+a_r y_r^2 \,,\ a_i\in\mathbb{R}$

نفرض أن $\{a_1,\dots,a_p\}\subset\mathbb{R}_+^*$ و $\{a_{p+1},\dots,a_r\}\subset\mathbb{R}_-^*$

ومنه

$$q(x)=(\sqrt{a_1}y_1)^2+\dots+(\sqrt{a_p}y_p)^2-(\sqrt{-a_{p+1}}y_{p+1})^2-\dots$$
$$\dots-(\sqrt{-a_r}y_r)^2$$

نضع

$$x_1=\sqrt{a_1}y_1,\dots,x_p=\sqrt{a_p}y_p\,,\ x_{p+1}=\sqrt{-a_{p+1}}y_{p+1}\dots$$
$$\dots x_r=\sqrt{-a_r}y_r$$

ومنه

$$q(x)=x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_r^2$$

نبرهن أن p غير متعلق بالأساس $\{e_1,\dots,e_n\}$.

ليكن $\{e_1,\dots,e_n\}$ و $\{e'_1,\dots,e'_n\}$ أساسين لـ E بحيث

$$q(x)=x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_r^2\,,\ \left(x=\sum_{i=1}^{n}x_i e_i\right)$$
$$q(x)=y_1^2+\dots+y_{p'}^2-y_{p'+1}^2-\dots-y_r^2\,,\ \left(x=\sum_i y_i e'_i\right)$$

نضع

$$F=\langle e_1,\dots,e_p\rangle\,,\quad F'=\langle e'_1,\dots,e'_{p'}\rangle$$
$$G=\langle e_{p+1},\dots,e_n\rangle\quad G'=\langle e'_{p'+1},\dots,e'_n\rangle$$

لدينا $x \in F\setminus\{0\} \Rightarrow q(x) > 0$

$x \in F'\setminus\{0\} \Rightarrow q(x) > 0$

(q معرف؟) $x \in G \Rightarrow q(x) \leq 0$

$x \in G' \Rightarrow q(x) \leq 0$.

إذا كان $x \in F \cap G'$ فإن $q(x) = 0 \Leftarrow x = 0$.

$\Leftarrow F \cap G' = \{0_E\}$. بما أن $F \oplus G' \subset E$ فإن

$$\dim F + \dim G' \leq \dim E \Rightarrow p + (n - p') \leq n$$

$$\Rightarrow \boxed{p \leq p'} \cdots (*)$$

بنفس الطريقة نجد أن $F' \cap G = \{0\}$ ومنه $\boxed{p' \leq p} \cdots (**)$

من $(*)$ و $(**)$ نجد أن $\boxed{p = p'}$

نظرية: ليكن E فضاء شعاعي بعده m على $\mathbb{C}$ و q شكل تربيعي على E. فإنه يوجد أساس متعامد $\{e_i\}$ لـ E بحيث إذا كان $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$ فإن

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_r^2 \quad , \quad r = rg(q)$$

و

$$M(q, \{e_i\}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdots r \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

مثال :

$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$$

لدينا $B' = \{ v_1 = (1,0,0), v_2 = (-1,1,0), v_3 = (2,-2,1) \}$ أساس متعامد لـ $\mathbb{R}^3$ و

$$A' = M(q,B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

نبحث أن أساس $B'' = \{w_1, w_2, w_3\}$ حسب نظرية sylvester.

لكن $x = (x'_1, x'_2, x'_3)$ مركبات x في الأساس B'.

$$q(x) = x_1'^2 + 2x_2'^2 - x_3'^2 = x_1'^2 + (\sqrt{2}x'_2)^2 - x_3'^2$$

نضع $\begin{cases} x''_1 = x'_1 \\ x''_2 = \sqrt{2}\, x'_2 \\ x''_3 = x'_3 \end{cases}$ (x''_1, x''_2, x''_3) هم مركبات الشعاع x في الأساس B''.

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

إذن $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

حيث P هي مصفوفة العبور من B' إلى B''.

ومنه
$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$
. لدينا $X' = P X''$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_1 = x''_1 \\ x'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} x''_2 \\ x'_3 = x''_3 \end{cases}, \quad A'' = P^t A' P^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = v_1, \quad w_2 = \cancel{(0,\frac{1}{\sqrt{2}},1)}\ \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$
$$w_3 = v_3 = (2,-2,1)$$