

Groupes.

$$(E, +)$$

$$+ : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$$

Chapitre III

Espaces vectoriels

Dans ce cours, le symbole \mathbb{K} désigne \mathbb{R} , \mathbb{C} ou un corps commutatif quelconque.

I – Espaces vectoriels

1. Définition

Définition : Un \mathbb{K} -espace vectoriel (ou \mathbb{K} e.v.) E est un ensemble muni de deux lois :

- Une addition $+$ sur E telle que $(E, +)$ soit un groupe commutatif, c'est-à-dire :

i. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

ii. $\exists \vec{0}_E, \forall \vec{u} \in E, \vec{u} + \vec{0}_E = \vec{0}_E + \vec{u} = \vec{u}$

iii. $\forall \vec{u} \in E, \text{il existe } -\vec{u} \text{ tel que } \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}_E.$

- Une loi externe de multiplication des vecteurs \vec{v} de E par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ satisfaisant :

i. $\lambda.(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda.\vec{u} + \lambda.\vec{v}$

ii. $(\lambda + \mu).\vec{u} = \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{u}$

iii. $\lambda.(\mu.\vec{u}) = (\lambda\mu).\vec{u}$

iv. $1.\vec{u} = \vec{u}$

- Les éléments \vec{v} de E s'appellent les *vecteurs*, et les nombres λ de \mathbb{K} s'appellent les *scalaires*.

2. Exemples importants

A - L'espace vectoriel \mathbb{R}^n

- Par convention, on pose $\mathbb{R}^0 = \{0\}$.

Sinon, on note $\mathbb{R}^n = \{\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$.

- On a vu dans le chapitre précédent que l'on peut définir une addition sur \mathbb{R}^n telle que $(\mathbb{R}^n, +)$ soit un groupe commutatif.

Pour $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\vec{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, on pose

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

- Il existe une seconde loi externe : la multiplication d'un *vecteur* $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ par un *scalaire* $\lambda \in \mathbb{R}$, définie par

$$\lambda.\vec{v} = \lambda.(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Remarque : Ces formules généralisent les opérations bien connues sur la droite \mathbb{R} , le plan \mathbb{R}^2 et l'espace \mathbb{R}^3 .

B - Les espaces vectoriels de fonctions

Soient X un ensemble quelconque, et n un entier quelconque

On note $E = \mathcal{F}(X, \mathbb{K}^n)$, l'espace de toutes les fonctions de X à valeurs dans \mathbb{K}^n .

On peut bien sûr faire la somme $f + g$ de deux fonctions f et g de E , en posant pour $x \in X$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

On peut aussi multiplier une fonction f de E par un scalaire (une constante) $\lambda \in K$, en posant

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

Proposition : Muni de ces deux lois, E est un \mathbb{K} -ev.

La fonction constante nulle 0_E est l'élément neutre pour $+$ et on a $f + (-f) = 0_E$.

Exemples :

. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ s'identifie à l'ensemble des fonctions allant de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et est un \mathbb{R} -ev.

. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ s'identifie à l'ensemble des fonctions allant de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , et est un \mathbb{C} -ev.

. $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ s'identifie à l'ensemble des *suites réelles*, et est un \mathbb{R} -ev.

Remarque : Aussi abstraite que paraisse cette idée : voir des fonctions comme des vecteurs (des points) d'un espace vectoriel, elle est en réalité d'une extraordinaire portée. C'est le point de départ de théories et de techniques utiles bien au-delà des mathématiques. Mais il faut reconnaître que pour l'instant « il y a loin de la coupe aux lèvres » !

II – Sous-espaces vectoriels

1. Définition

Définition : Soit E un \mathbb{K} -ev et F une partie de E .

On dit que F est un *sous-espace vectoriel* (ou sev) de E si F est un \mathbb{K} -ev lorsqu'on utilise les mêmes lois $+$ et \cdot que dans E .

Critères : une partie F d'un \mathbb{K} -ev E est un sous-espace vectoriel si et seulement

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \in F \neq \emptyset \\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in F, \vec{u} + \vec{v} \in F \\ \forall \vec{u} \in F \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \vec{u} \in F \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} F \neq \emptyset \\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in F \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K}, \text{ on a } \lambda \vec{u} + \vec{v} \in F \end{array} \right.$$

(stabilité)

2. Premiers exemples

A - L'espace E lui-même et l'ensemble $\{0\}$

De manière générale, dans un \mathbb{K} -ev noté E , le singleton $\{0\}$ (ne pas confondre avec l'ensemble vide \emptyset !) et l'espace vectoriel E sont des sous espaces vectoriels de E .

B - Les droites vectorielles

Dans le plan \mathbb{R}^2 , il y a essentiellement 2 façons simples de définir une droite.

a. Droite vectorielle définie par une équation cartésienne :

X

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, ax + by = 0\} \text{ avec } a \text{ ou } b \neq 0.$$

Si $b \neq 0$, on a $y = -\frac{a}{b}x$ et si $a \neq 0$, $x = -\frac{b}{a}y$.

Montrons que D est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

On a $\vec{0} \in D$ (car second membre = 0)

Soient $\vec{u} = (x, y) \in D$, $\vec{v} = (x', y') \in D$ et $\lambda \in \mathbb{R}^2$,

alors $\lambda\vec{u} + \vec{v} = (\lambda x + x'; \lambda y + y')$,

d'où $a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + ax' + by' = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$.

On a donc $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in D$.

Attention : la droite $x + y = 1$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 , car elle ne passe pas par $\vec{0}$. C'est une *droite affine*.

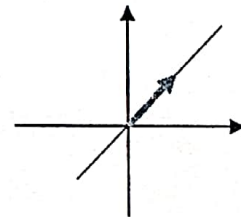
b. Droite vectorielle engendrée par un vecteur directeur \vec{u} :

$$D = \{\lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ où } \vec{u} = (x_0, y_0) \neq \vec{0}$$

On a $\vec{0} \in D$

$\lambda\vec{u} + \lambda'\vec{u} = (\lambda + \lambda')\vec{u} \rightarrow D$ est stable par +

$\mu(\lambda\vec{u}) = (\mu\lambda)\vec{u} \rightarrow D$ est stable par .



Remarque importante : Cette seconde façon de définir une droite, par vecteur directeur, se généralise immédiatement aux droites vectorielles de \mathbb{R}^n , ou d'un espace vectoriel général E . C'est en comparaison nettement moins pratique de définir une droite de \mathbb{R}^n à l'aide d'un système d'équations pour $n \geq 3$. Par exemple, il faut 2 équations dans \mathbb{R}^3 , et on verra qu'il faut $n - 1$ équations dans \mathbb{R}^n !

C - Les plans vectoriels

- Dans \mathbb{R}^3 , on peut définir un plan vectoriel par une seule équation linéaire :

$$P = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = 0\} \text{ avec } a, b \text{ ou } c \neq 0$$

P est bien un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , avec la même démonstration que pour la droite vectorielle de \mathbb{R}^2 .

- La seconde façon de définir un plan, qui s'applique dans tout espace vectoriel, est la suivante :

$$P = \{\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \text{ où } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont deux vecteurs non colinéaires fixés.}$$

On vérifie facilement que P est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, resp. de E si $\vec{u}, \vec{v} \in E$ en général.

→ On dit que P est le plan engendré par \vec{u} et \vec{v} (\vec{w} est combinaison linéaire de ces deux vecteurs).

D - Les sous-espaces vectoriels de fonctions

Voici quelques exemples de sous-espaces vectoriels d'espaces de fonctions que l'on peut rencontrer. En fait, cette notion abstraite est omniprésente, y compris en analyse. Il reste bien sûr à voir qu'elle est utile !

$C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues,

$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions de classe C^∞ sur \mathbb{R} ,

$\{f \in E, f(0) = 0\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$\{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f''(x) + f'(x) + f(x) = 0\} \subset C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, car l'équation est linéaire en f et sans second membre.

E - Les polynômes à une indéterminée à coefficients dans \mathbb{K}

Il existe une façon purement algébrique de voir les polynômes à coefficients dans \mathbb{K} . On note

$$\mathbb{K}[X] = \{P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n, n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}\}.$$

Un polynôme s'identifie formellement à une suite de coefficients nuls à partir d'un certain rang. Ainsi, $\mathbb{K}[X]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

On définit facilement la somme de deux polynômes et la multiplication par un scalaire en opérant terme à terme.

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$:

Pour un entier n donnée, on note $\mathbb{K}_n[X]$, l'espace des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré $\leq n$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ (exercice).

Attention : Le sous-espace des polynômes de degré *exactement* n n'est pas un sev de $\mathbb{K}[X]$. En effet, la somme de deux polynômes de degré n n'est pas toujours un polynôme de même degré : il peut se produire des simplifications. Par exemple $(1 - X^2) + X^2 = 1$.

3. Intersections de sous-espaces vectoriels

Proposition : Soit E un \mathbb{K} -ev. Alors toute intersection de sous-espace vectoriel de E est un sous espace vectoriel de E .

Démonstration : Les propriétés caractéristiques des sous-espaces vectoriels sont stables par intersection (exercice).

Exemples : Ici, $E = \mathbb{R}^4$.

$F = \{\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \begin{cases} x_1 + x_2 + \pi x_3 + \sqrt{2}x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 12x_2 = 0 \end{cases}\}$ est un sous-espace vectoriel de E :

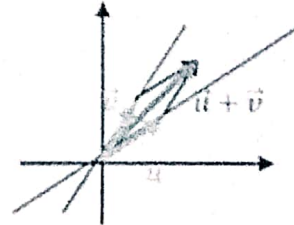
car c'est l'intersection de 3 sous-espaces vectoriels de E chacun défini par une seule équation linéaire homogène.

- De manière plus générale, l'espace des solutions d'un système de p équations linéaires homogènes avec n inconnues est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Attention : La réunion de 2 sev de E est rarement un sev de E .

Soient D_1 et D_2 deux droites vectorielles distinctes de E

Si $\vec{v}_1 \in D_1$ et $\vec{v}_2 \in D_2$, alors $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \notin D_1 \cup D_2$.



Proposition : Soient F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E . Alors $F_1 \cup F_2$ est un sous espace vectoriel de E si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

Démonstration : À voir en TD.

Remarque : Le complémentaire F^c d'un sous espace vectoriel F de E n'est **jamais** un sous-espace vectoriel de E . En effet, par définition, $\{\vec{0}\} \in F$, ce qui fait que $\{\vec{0}\} \notin F^c$

4. Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie

Voici deux définitions très importantes dans la suite, à connaître parfaitement !

Définition de la notion de combinaison linéaire :

Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ des vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

Une *combinaison linéaire* de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ est une expression du type

$$\vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

Définition de la notion d'espace vectoriel engendré par une partie :

Si A est une partie non vide d'un \mathbb{K} -ev E , alors on note

$$\text{Vect}(A) = \{\text{ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de } A\}.$$

$\text{Vect}(A)$ s'appelle le sous-espace vectoriel de E engendré par A .

Proposition :

a) $\text{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E .

b) C'est le *plus petit* sous-espace vectoriel de E qui contienne A , c'est-à-dire que si F est un sev de E tel que $A \subset F$ alors $\text{Vect}(A) \subset F$.

Démonstration : A faire en exercice.

Exemples importants :

- Soit E un espace vectoriel.

Si $A = \{\vec{v}\} \subset E$, alors $\text{Vect}(A) = \{\lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{K}\}$ est la *droite vectorielle engendrée par \vec{v}* .

Si $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \subset E$, alors $\text{Vect}(A) = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\}$ est le *plan vectoriel engendré par \vec{v}_1 et \vec{v}_2* .

- Dans \mathbb{K}^n avec $n \geq 1$, tout vecteur s'écrit

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (x_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + (0, 0, x_3, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, 0, x_n) \\ &= x_1(1, 0, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, 0, \dots, 1) \\ &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n,\end{aligned}$$

avec $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$.

On a donc $\mathbb{K}^n = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$. Tout vecteur de \mathbb{K}^n se décompose à l'aide de ces n vecteurs élémentaires pointant dans les n directions d'axe de \mathbb{K}^n . Cela généralise ce que l'on connaît bien dans le plan ($n = 2$) et l'espace ($n = 3$).

On dit que \mathbb{K}^n est engendré par la famille $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

5. Somme de deux sous-espaces vectoriels

On a vu qu'en général, l'union $F_1 \cup F_2$ de deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 d'un \mathbb{K} -ev E n'est un sous-espace vectoriel de E qu'à une condition (l'inclusion de l'un dans l'autre).

Définition : Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E .

La somme de F_1 et F_2 est définie par

$$F_1 + F_2 = \{\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \text{ avec } \vec{v}_1 \in F_1 \text{ et } \vec{v}_2 \in F_2\}.$$

Proposition : $F_1 + F_2 = \text{Vect}(F_1 \cup F_2)$ est le plus petit sous-espace vectoriel qui contienne à la fois F_1 et F_2 .

Remarque : Cette notion va remplacer la réunion dans les raisonnements en algèbre linéaire.