Chapitre 2

Fonctions de plusieurs variables

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on va présenter les concepts fondamentaux de l'analyse des fonctions de plusieurs variables. On va généraliser les notions de limite, contnuité, dérivabilité, différentiabilité, bien connues dans le cas des fonctions d'une seule variable. Nous rechercherons dans ce chapitre une formalisation mathématique théorique de ces concepts.

2.2 Produit scalaire, norme euclidienne, distance dans $\mathbb{R}^n$, voisinage.

2.2.1 Produit scalaire, norme euclidienne, distance dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.1 *Si $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit leur* ***produit scalaire*** *par :*

$$< X, Y >= x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

Définition 2.2 *On appelle* ***norme euclidienne*** *de X (ou longueur de X)*

$$||X|| =< X, X >^{\frac{1}{2}}= \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

et on appelle la distance entre deux vecteurs

$$d(X, Y) = ||X - Y||.$$

Théorème 2.1 *La norme vérifie :*

1) $||X|| = 0$ si et seulement si $X = 0$.

2) $||X|| > 0$ si et seulement si $X \neq 0$.

3) $||\lambda X|| = |\lambda| . ||X||$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R}^n$.

4) $||X + Y|| \leq ||X|| + ||Y||, \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ (inégalité triangulaire).

Propriété :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \forall Y \in \mathbb{R}^n \quad |\|X\| - \|Y\|| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$:

Les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ définies pour $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ sont :
1) $\|X\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$.
2) $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
3) $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Définition 2.3 *Les vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$ sont dits orthogonaux lorsque :*

$$< X, Y >= 0.$$

Définition 2.4 *Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.*

$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| < r\}$ est appelée la boule ouverte de centre a et de rayon r.

$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| \leq r\}$ est appelée la boule fermée de centre a et de rayon r.

$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| = r\}$ est appelée la sphère de centre a et de rayon r.

On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}^n$ est bornée si : $\forall X\ , Y \in D$, l'ensemble des réels $\|X - Y\|$ est borné.

Remarque 2.1 *Dans le cas où $a = 0 \in \mathbb{R}^n$ et $r = 1$ on a ce qu'on appelle les boules ou sphères unités.*

2.2.2 Voisinage

Définition 2.5 *Soit a un point de $\mathbb{R}^n$. On appelle voisinage de a tout sous ensemble V_a de $\mathbb{R}^n$ contenant une boule ouverte centrée en a. On écrit :*

$$(V_a \text{ voisinage de } a) \Leftrightarrow \exists r > 0 : B(a, r) \subset V_a.$$

Proposition 2.1 *Soit a un point de $\mathbb{R}^n$.*

1) Toute boule centrée en a est un voisinage de a.

2) Tout voisinage V_a de a contient un voisinage ouvert U_a de a.

Preuve

1) Il suffit de prendre $B(a, r) = V_a$.

2) Il suffit de prendre $U_a = B(a, r)$.

2.3 Fonctions de plusieurs variables

Définition 2.6 *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On appelle fonction réelle de n variables toute fonction f définie d'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On écrit :*

$$\begin{array}{rcl} f: \quad D \subset \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & f(x_1, x_2, ..., x_n). \end{array}$$

Exemple 2.2 *Voici quelques fonctions pour $n = 2$ et $n = 3$.*

$$\begin{array}{rcl} f: \quad \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{2}{1+x^2+y^2}. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h: \quad \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & h(x,y) = x + e^{1+y}. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g: \quad \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & g(x,y,z) = x^3 + yz + 2. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} L: \quad \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & L(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} M: \quad \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & M(x,y,z) = \dfrac{z+2}{1+x^2+y^2+z^2}. \end{array}$$

Définition 2.7 *On appelle **domaine de définition** d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la partie D_f de $\mathbb{R}^n$ constituée des éléments $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ jouissant d'une image par f.*

Définition 2.8 *On appelle image de f, l'ensemble $\{f(x)/x \in D_f\}$.*

Définition 2.9 *On appelle **représentation graphique** ou **surface représentative** d'une fonction $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, l'ensemble des triplets $\{(x, y, f(x, y))\}$ où (x, y) parcourt D_f.*

Exemple 2.3 *La fonction f suivante :*

$$\begin{array}{rcl} f: \quad \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{x^3+xy+y^2+2}{1+x^2+y^2}, \end{array}$$

est définie sur $D = \mathbb{R}^2$, car :$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 + x^2 + y^2 \neq 0$.

Exemple 2.4 *La fonction g suivante :*

$$\begin{array}{rcl} g: \quad \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto & g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \end{array}$$

est définie sur le disque $D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Fonctions partielles

Définition 2.10 *Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $A = (a_1, a_2) \in D$. On appelle fonctions partielles associées à f au point A les fonctions :*

$$x_1 \longmapsto f(x_1, a_2) \text{ et } x_2 \longmapsto f(a_1, x_2)$$

définies sur un intervalles ouvert contenant respectivement a_1 et a_2.

Exemple 2.5 *Les deux fonctions partielles de la fonction :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = 5 + x^2 - y^2, \end{array}$$

au point $A = (2,4)$ sont :

$$\begin{array}{rccl} f_1: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ & x & \mapsto & f_1(x) = -11 + x^2, \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccl} f_2: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ & y & \mapsto & f_2(y) = 9 - y^2. \end{array}$$

Exemple 2.6 *Les trois fonctions partielles de la fonction :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z + 3, \end{array}$$

au point $A = (2,1,3)$ sont :

$$\begin{array}{rccl} f_1: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ & x & \mapsto & f_1(x) = 2x^2 + 7, \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} f_2: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ & y & \mapsto & y^2 + 14. \end{array}$$

$$\text{et} \quad \begin{array}{rccl} f_3: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ & z & \mapsto & f_3(z) = z + 12. \end{array}$$

Remarque 2.2 *Pour simplifier, les énoncés seront donnés dans le cas de deux variables. (les notions se généralisent sans difficultés aux espaces de dimensions supérieures à deux).*

2.3.1 Courbe de niveau

Définition 2.11 *Soit $k \in \mathbb{R}$. On appelle **Courbe de niveau** k de f, l'ensemble $L_k(f)$ formé des couples (x,y) de D_f satisfaisant à $f(x,y) = k$. On écrit :*

$$L_k(f) = \{(x,y) \in D_f : f(x,y) = k, k \in \mathbb{R}\} = f^{-1}(k).$$

Exemple 2.7 *Soit f la fonction suivante :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = y - x. \end{array}$$

Les courbes de niveau de la fonction f sont les droites parallèles définies par : $y = x + k, k \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.8 *Soit h la fonction suivante :*

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & h(x,y) = x^2 + y^2. \end{array}$$

Les courbes de niveau de la fonction h sont données par :

$$L_k(h) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k, k \in \mathbb{R}\right\}.$$

On distingue trois cas :

*- **Si** $k \in]-\infty, 0[$: on aura $L_k(h) = \emptyset$. (La fonction h n'admet aucune courbe de niveau k).*

***- Si** $k = 0$: on aura $L_k(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} = \{(0,0)\}$ ..*

***- Si** $k \in]0, +\infty[$: alors la courbe $L_k(h)$ de niveau k est le cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $\sqrt{k}$, donc l'ensemble des courbes de niveau est l'ensemble des cercles de centre $O(0,0)$ et de rayon $\sqrt{k}, k \in]0, +\infty[$.*

2.4 Limite d'une fonction

La notion de limite pour une fonction de plusieurs variables généralise la notion de la limite des fonctions réelles d'une seule variable, mais les limites de la gauche et de la droite perdent leur sens et sont remplacées par les nombreuses limites directionnelles possibles.

Définition 2.12 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

où D_f est le domaine de définition de f et $M_0(x_0, y_0) \in D_f$.

On dit que f admet la limite L quand $M(x,y)$ tend vers $M_0(x_0,y_0)$, si $f(x,y)$ est aussi voisin que l'on veut de L dès que le point M est dans un voisinage convenable de M_0. On écrit :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=L \text{ ou } \lim_{M\to M_0} f(x,y)=L,$$

c'est à dire

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\forall x\in V(M_0(x_0,y_0)):\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta\Rightarrow|f(x,y)-L|<\epsilon,$$

où $V(M_0(x_0,y_0))$ le voisinage de $M_0(x_0,y_0)$.

On dit que f tend vers $+\infty$ quand $M(x,y)$ tend vers $M_0(x_0,y_0)$ si :

$$\forall A>0,\exists\delta>0:\forall x\in V(M_0(x_0,y_0)):\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta\Rightarrow|f(x,y)-L|>A,$$

et on écrit : $\lim_{M\to M_0} f(x,y)=+\infty$.

On dit que f tend vers $-\infty$ quand $M(x,y)$ tend vers $M_0(x_0,y_0)$ si :

$$\forall A>0,\exists\delta>0:\forall x\in V(M_0(x_0,y_0)):\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta\Rightarrow|f(x,y)-L|<-A,$$

et on écrit : $\lim_{M\to M_0} f(x,y)=-\infty$.

Exemple 2.9 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & 2x-y+1. \end{array}$$

On a : $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)=2$. En effet, pour tout $\varepsilon>0$ on écrit :

$$\begin{aligned} |f(x,y)-2| &= |2x-y-1| \\ &= |2(x-1)-(y-1)| \\ &\leq |2(x-1)|+|-(y-1)| \\ &\leq 2|x-1|+|y-1| \\ &\leq 2\|(x,y)-(1,1)\|_1 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ dans définition ci-dessus.

Théorème 2.10 *(Opérations algébriques sur les limites)*

Soient f et g deux fonctions telles que : $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ et $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=L'$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors,

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y)+g(x,y)) = L+L'$.
2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y).g(x,y)) = L.L'$.
3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \lambda f(x,y) = \lambda L$.
4) Si g n'est pas nulle dans un voisinage de $M(x_0,y_0)$ et $L' \neq 0$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{L'}$.

Théorème 2.11 *(Théorème d'encadrement ou des gendarmes)*
Soient f, g et h trois fonctions définies sur une partie Ω de $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \Omega : g(x,y) \leq h(x,y) \leq f(x,y)$$

Si : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L$, *alors,* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = L$.

Exemple 2.12 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$. *En effet,*

$$0 \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right),$$

et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{4}(x^2+y^2) = 0$.

2.4.1 Limites successives

Définition 2.13 *On appelle **limite successive** en point $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ d'une fonction f l'une des deux limites :*

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right), \qquad \lim_{y\to y_0} f(x,y)\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right).$$

Dans le calcul de ces limites fixer l'une des variables x ou y et d'effectuer le calcul par rapport à l'autre variable puis lâcher la variable fixée et finir avec elle le calcul.

Remarque 2.3 *L'existence des deux limites successives n'assure pas la limite et que leur non existence n'entrave pas l'existence de la limite.*

Théorème 2.13 *Si les deux limites successives* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right) = L$ *et* $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right) = L'$ *existent et sont distinctes alors la limite* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ *n'existe pas.*

Calcul de limites à l'aide des coordonnées polaires

Lorsque l'on considère la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, il est quelques fois plus facile de prouver des résultats de limite, continuité, etc. en passant par les coordonnées polaires en faisant le changement de variables.

Exemple 2.14 *Calculer* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^4}{x^2+y^2}$.

On a : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^4}{x^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$ *(forme indéterminée).*

On utilise le changement de variables en coordonnées polaires, on pose :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[\end{cases}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^2 (r\sin\theta)^4}{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} \\ &= \lim_{r\to 0} r^4 (\cos\theta)^2 (\sin\theta)^4 = 0, \forall\theta \in [0, 2\pi[\,. \end{aligned}$$

Alors, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^4}{x^2+y^2} = 0.$

2.4.2 Fonction continue

Définition 2.14 *Soit*

$$\begin{aligned} f: \quad D_f \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ (x,y) &\mapsto f(x,y), \end{aligned}$$

où D_f le domaine de définition de f et $M_0(x_0,y_0) \in D_f$.

On dit que la fonction f est continue au point $M_0(x_0,y_0)$ si

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0) \text{ ou } \lim_{M\to M_0} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

On dit que la fonction f est continue sur D_f si f est continue en tout point de D_f.

Si f est continue sur D_f, alors les fonctions partielles associées à f en un point sont continues sur D_f.

Exemple 2.15 *Soit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{lcl} f: \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x+y. \end{array}$$

On a : $D_f = \mathbb{R}^2$ *et* f *est continue en tout point de* $\mathbb{R}^2$ *car :*

$$\begin{array}{rcl} |f(x,y) - f(x_0,y_0)| & = & |x+y-x_0-y_0| \\ & = & |(x-x_0)+(y-y_0)| \\ & \leq & |x-x_0| + |y-y_0| \end{array}$$

$|x-x_0|$ *tend vers* 0 *dès que* x *tend vers* x_0 *et* $|y-y_0|$ *tend vers* 0 *dès que* y *tend vers* y_0.

Exemple 2.16 *Soit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{lcl} f: \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{(1+x+x^2)\sin y}{x^2+x+y}. \end{array}$$

On a :

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0, y\to 0} \left(\frac{(1+x+x^2)\sin y}{x^2+x+y} \right) = \lim_{y\to 0} \left(\frac{\sin y}{y} \right) = 1.$$

Opérations :

Théorème 2.17 *Soient* f *et* g *deux fonctions continues en* $M_0(x_0,y_0)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors on a :*

$f+g$, $f\,g$, λf, $\dfrac{f}{g}$ *(si* $g(x_0,y_0) \neq 0$*) sont continues.*

De même la composée de fonctions continues est continue.

Corollaire 2.18 *Les fonctions polynomiales et les fractions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition.*

Exemple 2.19 *Soit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{lcl} f: \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} & si\ (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ \dfrac{1}{2} & si\ (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}. \end{array}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ car c'est une composition de fonctions continues.

La continuité de f en $(0,0,0)$.

On a :

$$\frac{1-\cos\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} = \frac{1-\cos 2\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$= \frac{2\left(\sin\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)\right)^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}, \text{ car } \left(1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha\right)$$

$$= \frac{2\left(\sin\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)\right)^2}{4\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{\left(\sin\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)\right)^2}{\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)^2}$$

D'où,

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)}{\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{car, } \left(\frac{\sin\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)}{\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)}\right)^2 = \frac{1}{2}, \text{ (puisque : } \lim_{\lambda\to 0}\frac{\sin\lambda}{\lambda} = 1\text{).}$$

Donc, $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \frac{1}{2} = f(0,0,0)$. *On conclut que f est continue en $(0,0,0)$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^3$.*

Définition 2.15 *Soit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{llll} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

On dit que la fonction f est continue au point (x,y) relativement à la variable x (resp. y) si la fonction partielle f_1 (resp. f_2) est continue en x, (resp. y).

Proposition 2.2 *Soit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{rccc} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

Si la fonction f *est continue au point* (x,y)*, alors les fonctions partielles* f_1 *et* f_2 *sont continues en* x *et* y*, respectivement.*

Remarque. La réciproque est généralement fausse.

2.4.3 Dérivées partielles

Définition 2.16 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

une fonction de deux variables x*,* y *où* D_f *est le domaine de définition de* f *et* $M_0(x_0, y_0) \in D_f$*.*

Supposons la fonction partielle $f_x : x \mapsto f(x, y_0)$ *définie sur un voisinage de* x_0

Si f_x *admet une dérivée au point* x_0*, on dit que cette dérivée est la "dérivée partielle" de* f *par rapport à* x *au point* (x_0, y_0)*. On note* f'_x *ou* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *cette dérivée et l'on a :*

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

De même, la dérivée de la fonction f_y *est la dérivée partielle de* f *par rapport à* y *au point* (x_0, y_0)*, et on la note :*

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Si f'_x *et* f'_y *existent au point* (x_0, y_0)*, on dit que* f *est dérivable au point* (x_0, y_0)*.*

On dit que f *est de classe* C^1 *sur* D_f *si* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sont continues sur* D_f*.*

Exemple 2.20 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^3 + xy^2 + y - 3, \end{array}$$

une fonction de deux variables x*,* y*.*

Pour déterminer une dérivée partielle de f, il suffit de dériver l'expression de f par rapport à la variable considérée, les autres étant considérées comme des constantes.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(4,5) = 73.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(4,5) = 41.$$

Exemple 2.21 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & g(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2} \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{-x^2 + y^2 + 2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(1,-1) = \frac{-1}{2}.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^2 + y^2 - 2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(1,-1) = \frac{1}{2}.$$

Exemple 2.22 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la fonction définie comme suit :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \quad si & (x,y) = (0,0). \end{cases}.$$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.

2) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

Solution.

1) Déterminons D_f le domaine de définition de la fonction f :

On a : $D_f = (\mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0,0)\}) \cup \{(0,0)\} = \mathbb{R}^2$.

2) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{(2xy^2)(x^2+y^2) - (2x)(x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{(2yx^2)(x^2+y^2) - (2y)(x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Gradient

Définition 2.17 *Soit*

$$\begin{array}{llll} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \rightarrow & f(x,y), \end{array}$$

une fonction des deux variables x, y où D_f est l'ensemble de définition de f et $M_0(x_0,y_0) \in D_f$.

On appelle gradient de f en (x_0,y_0), le vecteur noté

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

Si le $\mathbb{R}^2$ est muni de sa base canonique $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, le gradient de f un point $M_0(x_0,y_0)$ de D_f est de la forme :

$$\nabla f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\ \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\vec{j}\ .$$

Divergence

On appelle divergence de f en un point $M_0(x_0,y_0)$ de D_f le nombre noté $divf(x_0,y_0)$ et défini par :

$$divf(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Exemple 2.23 *Soit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^2 + xy^2 - 3, \end{array}$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x_0 + y_0^2\ , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 2x_0y_0, \qquad \nabla f(x_0,y_0) = (2x_0 + y_0^2, 2x_0y_0).$$

Si le $\mathbb{R}^2$ est muni de sa base canonique $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, le gradient de f un point $M_0(x_0,y_0)$ de D_f est de la forme :

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(2x_0 + y_0^2\right)\ \vec{i} + (2x_0y_0)\vec{j}\ .$$

On appelle divergence de f en un point $M_0(x_0,y_0)$ de D_f le nombre noté $divf(x_0,y_0)$ et défini par :

$$divf(x_0,y_0) = 2x_0 + y_0^2 + 2x_0y_0.$$

2.4.4 Dérivées successives

Définition 2.18 *On définit ensuite les dérivées partielles secondes, si elles existent par dérivation des dérivées premières, on les note :*

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f'_{x_j}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f.$$

Dans le cas de deux variables x, y on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y).$$

De façon analogue, on peut définir les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 par récurrence.

On dit que f est de classe C^k sur D_f si les dérivées partielles d'ordre k sont continues sur D_f.

On dit que f est de classe C^∞ sur D_f si les dérivées partielles de tous ordres existent et sont continues sur D_f.

Théorème 2.24 ***(Théorème de Schwarz)***

Si f admet dans un voisinage de (x_0, y_0) des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ continues, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Exemple 2.25 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^4 y^2, \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

On a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^2) = 12x^2y^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^4y) = 2x^4,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^4y) = 8x^3y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3y^2) = 8x^3y.$$

2.4.5 Fonction harmonique

Définition 2.19 *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

On note le Laplacien de f :

$$\triangle f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

et on dit que f est harmonique si $\forall (x,y) : \triangle f(x,y) = 0$.

Exemple 2.26 *Vérifions que les fonctions suivantes sont harmoniques.*

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \ln(x^2+y^2), \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g: \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto & g(x,y) = e^y \sin x, \end{array}$$

On a : $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Soit $(x,y) \in D_f$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad et \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} \quad et \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Remarquons $\forall (x,y) \in D_f : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$, *donc f est harmonique.*

On a : $D_g = \mathbb{R}^2$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = e^y \cos x \quad et \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -e^y \sin x.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = e^y \sin x \quad et \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = e^y \sin x.$$

Remarquons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 0$, *donc g est harmonique.*

2.5 Différentiabilité

2.5.1 Cas des fonctions d'une variable réelle

Définition 2.20 *Soit f une fonction réelle a variable réelle :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ & x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

On dit que la fonction f définie dans un voisinage $V(x_0)$ de x_0 est différentiable au point x_0 s'il existe un nombre A qui dépend de x mais pas de h tel que la fonction $\varepsilon(x)$ définie pour $h \neq 0$ par :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + A.h + h\varepsilon(x), \quad h = x - x_0 \;\; et \;\; (h + x_0) \in V(x_0).$$

admette la limite 0 quand $h \to 0$.

Théorème 2.27 *Une fonction f est différentiable au point x_0 si, et seulement si, f est dérivable au point x_0.*

Preuve. 1) **Condition nécessaire :** Supposons que f est différentiable au point x_0, alors pour $h \neq 0$ on a :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + A.h + h\varepsilon(x).$$

Donc,

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A + \varepsilon(x).$$

le passage a la limite on aura :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}(A + \varepsilon(x)) = A, \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(x).$$

donc, en posant $A = f'(x_0)$, on a f dérivable en x_0.

2) La condition suffisante : est évidente, en posant : $A = f'(x_0)$. ■

Remarque 2.4 *On a :*

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = f'(x)\,dx.$$

On dit que dy est la différentielle de f en x.

2.5.2 Cas des fonctions de deux variables

Définition 2.21 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

On dit que f *est différentiable au point* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*, si il existe deux constantes réelles* α, λ *telles que :*

$$\begin{array}{rcl} f(a+h_1, b+h_2) - f(a,b) & = & \alpha h_1 + \lambda h_2 + ||(h_1,h_2)||\, \varepsilon(h_1,h_2), \\ \textit{avec} \displaystyle\lim_{||(h_1,h_2)|| \to 0} \varepsilon(h_1,h_2) & = & 0. \end{array}$$

Exemple 2.28 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = x^4 + 3x^2 y, \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

Plaçons nous au point $(1,-1)$.

$$f(1+h_1, -1+h_2) - f(1,-1) = (1+h_1)^4 + 3(1+h_1)^2(-1+h_2) - (-2)$$

$$= -2h_1 + 3h_2 + (6h_1h_2 + 3h_1^2 + 4h_1^3 + h_1^4 + 3h_1^2h_2)$$

$$= -2h_1 + 3h_2 + ||(h_1,h_2)||\, \epsilon(h_1,h_2).$$

On a : $\displaystyle\lim_{||(h_1,h_2)|| \to 0} \epsilon(h_1,h_2) = 0$ *où*

$$\epsilon(h_1,h_2) = \frac{6h_1h_2 + 3h_1^2 + 4h_1^3 + h_1^4 + 3h_1^2h_2}{||(h_1,h_2)||}.$$

Donc : f *est différentiable au point* $(1,-1)$ *et sa différentielle est l'application linéaire :* $df(1,-1) : (h_1,h_2) \to -2h_1 + 3h_2$

On remarque que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 6xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = -2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = 3.$$

ce qui correspond aux coefficients trouvés précédemment.

Remarque 2.5 *On note la différentielle de f de la manière suivante :*

$$df : (h_1, h_2) \to \frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2.$$

On note aussi plus simplement :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

2.6 Formule de Taylor des fonctions de 2 variables

Définition 2.22 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

une fonction de classe C^n sur D_f où D_f une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^2$ et $(a,b) \in D_f$.

Pour tout (h,k) de $\mathbb{R}^2$ on considère la fonction :

$$F : t \mapsto F(t) = f(a + ht, b + kt).$$

Cette fonction est dérivable est sa fonction dérivée est :

$$F'(t) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a + ht, b + kt) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a + ht, b + kt).$$

Ce qui donne en $t = 0$

$$F'(0) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

De même, on a :

$$F''(t) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + ht, b + kt) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + ht, b + kt) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + ht, b + kt).$$

Ce qui donne en $t = 0$

$$F''(0) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b).$$

On continue ce processus jusqu'à avoir :

$$F^{(n)}(t) = h^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a+ht, b+kt) + C_n^1 h^{n-1} k \frac{\partial^n f}{\partial y \partial x^{n-1}}(a+ht, b+kt) +$$

$$... + C_n^i h^{n-i} k^i \frac{\partial^i f}{\partial y^i \partial x^{n-i}}(a+ht, b+kt) + ...k^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(a+ht, b+kt).$$

où $C_n^i = \dfrac{n!}{i!\,(n-i)!}$.
Cette expression s'écrit aussi :

$$F^{(n)}(t) = \left(\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\right)(a+ht, b+kt).$$

Ce qui donne en $t = 0$

$$F^{(n)}(0) = \left(\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\right)(a, b).$$

Théorème 2.29 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

une fonction de classe C^n *sur* D_f *où* D_f *une partie ouverte non vide de* $\mathbb{R}^2$ *et* $(a,b) \in D_f$.

Alors il existe $\theta \in]0,1[$ *tel que :*

$$\begin{aligned} f((a,b)+(h,k)) &= f((a+h, b+k)) \\ &= f(a,b) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(2)}(a,b) + \\ &\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(3)}(a,b) + ... + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(n)}(a,b) + \\ &\underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(n+1)} f((a+\theta h, b+\theta k))}_{\text{reste de Lagrange}}. \end{aligned}$$

Cette expression est dite formule de Taylor (développement de Taylor) d'ordre n *en point* (a,b) *avec reste de Lagrange.*

et

$$f(a,b)+\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(2)}(a,b)+$$

$$\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(3)}(a,b)+....+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(n)}(a,b).$$

dite la partie régulière.

Remarque.

$$\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(2)}=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$$

$$\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(3)}=h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}+3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial^3 y}$$

....

$$\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(n)}=h^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+C_n^1h^{n-1}k\frac{\partial^n f}{\partial y\partial x^{n-1}}+...+k^n\frac{\partial^n f}{\partial^n y}$$

Le reste : $\dfrac{1}{(n+1)!}\left(h\dfrac{\partial f}{\partial x}+k\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^{(n+1)}=$

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1}}+\frac{C_{n+1}^1h^nk}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial y\partial x^n}+....+\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial y^{n+1}}$$

Exemple 2.30 *Soit*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & x^4+y^3+x^2-y^2-3xy+5. \end{array}$$

Ecrire le développement de Taylor d'ordre 3 *au point* $(1,0)$.

Pour cala on calcule : $f(1,0) = 7$ *et*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 2x - 3y, \ \textit{donc} \ \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 2y - 3x, \ \textit{donc} \ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 + 2, \ \textit{donc} \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 14$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y - 2, \ \textit{donc} \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3, \ \textit{donc} \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -3, \ \textit{donc} \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0) = -3$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = 24x, \ \textit{donc} \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,0) = 24$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = 6, \ \textit{donc} \ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,0) = 6$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x,y) = 24, \ \textit{donc} \ \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(1,0) = 24$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x,y) = 0, \ \textit{donc} \ \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(1,0) = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x^3}(x,y) = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(x,y) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(x,y) = 0$$

D'où,

$$f((1,0)+(h,k)) = f(1+h,k) = f(1,0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) +$$

$$\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)(1,0) +$$
$$\frac{1}{3!}\left(h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} + 3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial^3 y}\right)(1,0)$$

$$+\frac{1}{4!}\left(h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 4h^3k\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} + 6h^2k^2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + 4hk^3\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} + k^4\frac{\partial^4 f}{\partial^4 y}\right)(1+\theta k, \theta k)$$

Alors,

$$\begin{aligned} f(1+h,k) &= -7 + 6h - 3k + \frac{1}{2}(12h^2 - 4hk - 4k^2) + \frac{1}{6}(24h^3 + 6k^3) + \frac{1}{24}(24h^4) \\ &= h^4 + 4h^3 + k^3 + 6h^2 - 2k^2 - 2hk + 6h - 3k - 7. \end{aligned}$$

2.7 Optimisation différentiable dans $\mathbb{R}^2$.

2.7.1 En dimension 1

Soit une fonction d'une variable f définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^2.

Théorème 2.31 *(Formule de Taylor à l'ordre 2) Si f est une fonction trois fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, il existe une fonction tendant vers 0 en 0 telle que :*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + |h|^2 \epsilon(h).$$

Choisissons pour x un point $x = a$ tel que $f''(a) \neq 0$. Alors pour h assez petit, le terme $\frac{h^2}{2}f''(x) + |h|^2 \epsilon(h)$ est du même signe que $f''(a)$. Si par exemple $f''(a) > 0$, on en déduit que f a un minimum local en x.

La recherche pratique des extrema locaux pour une fonction d'une variable se passe donc ainsi :

1) On recherche les points critiques : $f'(x) = 0$.

2) On étudie la dérivée seconde $f''(x)$ si a est un point critique et si :

$f''(a) > 0$ il y a un minimum local,

$f''(a) < 0$ il y a un maximum local,

$f''(a) = 0$ il faut approfondir l'étude.

Lorsque f n'est plus définie sur $\mathbb{R}$ entier, ou sur un intervalle ouvert, il faudra de plus étudier le comportement de f sur les bords du domaine de définition. si l'ensemble de départ est compact, on a la garantie de l'existence d'extrema globaux.

2.7.2 Extrema locaux de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

On suppose f de classe C^2, c'est- a-dire que ses dérivées partielles jusqu'a l'ordre 2 existent et sont continues.

Définition 2.23 *On dit que : f a un minimum local en (x_0, y_0) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \varepsilon), \text{ alors } f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

Définition 2.24 *On dit que : f a un maximum local en (x_0, y_0) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \varepsilon), \text{ alors } f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

Exemple 2.32 $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad f(x, y) = x^2 - y^2, \quad f(x, y) = -x^2 - y^2.$

Proposition 2.3 *Si f admet un extremum local en (x_0, y_0) alors*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Démonstration.

La fonction de une variable $x \mapsto f(x, y_0)$ admet un extremum local en x_0, donc sa dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ en x_0.

La fonction de une variable $y \mapsto f(x_0, y)$ admet un extremum local en y_0, donc sa dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ en y_0.

Définition 2.25 *On dit que : (x_0, y_0) est un point critique de f (ou un point stationnaire) si,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Remarque. Un extremum local est un point critique mais la réciproque n'est pas vraie.

2.7.3 Formule de Taylor

Définition 2.26 *Soit $f(x,y)$ une fonction de classe C^2. La matrice hessienne f de (x_0,y_0) en est la matrice :*

$$Hess(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix},$$

et

$$\det Hess(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2.$$

Exemple 2.33 *Calculer la matrice Hessienne de $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$.*

Théorème 2.34 *(Formule de Taylor a l'ordre 2, en $X = (x_0,y_0)$)*

Si f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, il existe une fonction tendant vers 0 en $(0,0)$ telle que :

$$f(X+H) = f(X) + < \nabla f(X), H > + \frac{1}{2} H^t Hess(x_0,y_0) H + ||H||^2 \epsilon(H).$$

Théorème 2.35 *Soient $f(x,y)$ de classe C^2 et (x_0,y_0) un point critique. Alors :*

Si, $\det Hess(x_0,y_0) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$, f a un minimum local en (x_0,y_0).

Si, $\det Hess(x_0,y_0) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$, f a un maximum local en (x_0,y_0).

Si, $\det Hess(x_0,y_0) < 0$, f n'a ni maximum ni minimum, elle a un point selle.

Si, $\det Hess(x_0,y_0) < 0$, on ne peut conclure (avec le seul développement à l'ordre 2).

Exemple 2.36 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par : $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Les points critiques de f sont $(0,0)$ et $(1,1)$. Le premier est un point col, le second un minimum local (non global).*