/

Université Mohammed Seddik Ben Yahia

Faculté des sciences et technologie

Module: Analyse 2

1ère année ST, 1ère année ingénieur

Série de TD 02

Exercice 01 : Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes

1) $\begin{array}{llll} f & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto f(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2+y^2} \end{array}$
2) $\begin{array}{llll} f & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto f(x,y) = \frac{1+y}{x^2+y^2-1} \end{array}$

3) $\begin{array}{llll} f & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto f(x,y) = \sqrt{4-y^2}\sqrt{4-x^2} \end{array}$
4) $\begin{array}{llll} f & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x-y+1} \end{array}$

5) $\begin{array}{llll} f & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto f(x,y) = \frac{1+y\sin x}{\sqrt{2x-y+1}} \end{array}$
6) $\begin{array}{llll} f & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto f(x,y) = \ln(x^2+y^2-4) \end{array}$

Exercice 02 : Soit f, g et h des fonctions définies comme suit

$\begin{array}{llll} f & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$
$\begin{array}{llll} g & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto g(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \end{array}$

$\begin{array}{llll} h & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto h(x,y) = \frac{\sin x - y}{x - \sin y} \end{array}$

1) Etudier l'existence de la limite de la fonction f au point $(0,0)$.

2) Etudier l'existence de la limite de la fonction g au point $(0,0)$.

3) Etudier l'existence de la limite de la fonction h au point $(0,0)$.

Exercice 03 : Etudier la continuité des onctions suivantes

1) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$
2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3y - xy^3)}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 4) $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Exercice 04 : Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ comme suit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{y}{x} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

3) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)$ pour tout réel y_0.

4) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

5) Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ sont-elles continues en $(0,y_0)$? en $(0,0)$.

Exercice 05 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall (x,y) \in D_f\ f(x,y) \leq \frac{1}{4}(x^2+y^2)$.

2) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

3) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

4) Montrer que f est différentiable.

Exercice 06 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3+3xy-5y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) En utilisant la définition, Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

2) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

3) Ecrire la différentielle de f en $(0,0)$.

Exercice 07 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Donner l'expression de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2) Calculer les dériées partielles secondes et montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

3) f est de classe C^2?