Chapitre 3

Intégrales doubles, Intégrales triples

3.1 Intégrales doubles :

Soit D une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ (D est limité par des courbes simples dans $\mathbb{R}^2$) et soit

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

une fonction à deux variables x, y à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie et continue sur le domaine D. L'intégrale double sur D est donnée par $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

3.1.1 Propriétés de l'intégrale double :

1) Aire D : Si $f(x,y) = 1$ alors Aire $D = \iint_D dx\,dy$

2) Si $f(x,y) \geq 0$ pour $(x,y) \in D^2$, alors $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$

3) Soient f, g deux fonctions à deux variables qui sont intégrable sur D et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, alors:

$$\iint_D [\lambda f(x,y) + \beta g(x,y)]\,dx\,dy = \lambda \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

4) Si $D = D_1 \cup D_2$ et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, c'est à dire D_1 et D_2 deux domaines qui sont disjoints (Aire $D_1 \cap D_2 = 0$), alors :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

3.1.2 Méthodes de calcul des intégrales double :

Théorème (Théorème de Fubini)
Soient h et k deux fonctions continues sur $[a,b]$, telle que $\forall x \in [a,b]$ $h(x) \leq k(x)$ et soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } h(x) \leq y \leq k(x)\}$$

Si,
$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y)$$

est une fonction continue, alors f est intégrable sur D et on a

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{k(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

ce théorème définit l'intégrale double à l'aide de deux intégrales simples

Remarque Si $f(x,y) = 1$, l'intégrale double $\iint_D dx\,dy$ est l'aire de D

Corollaire: L'intégrale double d'une fonction réelle continue f sur un pavé (rectangle) $D = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}$

est égale à deux intégrales simples successives

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

Remarque: Dans ce cas, l'ordre d'intégration n'est pas forcé

Exemple Soient
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2$$

une fonction et $D = [1,2] \times [0,3] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 3\}$ un rectangle

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^3 (x^2 + xy + y^2 + 2)\,dy \right) dx$$

$$= \int_1^2 \left(\left[x^2 y + \frac{x}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 + 2y \right]_0^3 \right) dx = \int_1^2 \left(3x^2 + \frac{9}{2} x + 15 \right) dx$$

$$= \left[x^3 + \frac{9}{4} x^2 + 15x \right]_1^2 = \frac{115}{4}$$

ou bien

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^3 \left(\int_1^2 (x^2 + xy + y^2 + 2)\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^3 \left(\left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{x^2}{2} y + y^2 x + 2x \right]_1^2 \right) dy = \int_0^3 \left(\frac{3}{2} y + y^2 + \frac{13}{3} \right) dy$$

$$= \left[\frac{3}{4} y^2 + \frac{1}{3} y^3 + \frac{13}{3} y \right]_0^3 = \frac{115}{4}$$

<u>proposition</u> Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}$

$= [a,b] \times [c,d]$

si $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, alors

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f_1(x) f_2(y)\,dx\,dy = \int_a^b f_1(x)\,dx \cdot \int_c^d f_2(y)\,dy$$

<u>exemple</u>: Soit $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [1, 2] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } 1 \leq y \leq 2\}$

$$\iint_D (y+1)(\cos 3x)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 (y+1)(\cos 3x)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\,dx \int_1^2 (y+1)\,dy = \left[\frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{y^2}{2} + y \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{3} \sin 3\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \sin 0 \right) \left(\frac{4}{2} + 2 - \frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{-5}{6}$$

3.1.3 Changement de variables

Les coordonnées cartésiennes (x,y) ne sont pas toujours les plus adaptées au calcul d'une intégrale, parfois on utilise d'autres coordonnées. Il existe des outils sont basés sur des calculs de dérivées partielles et de déterminant.

Soient $f : D \subset V \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction continue sur un compact D

Soit $\Psi : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to D \subset \mathbb{R}^2$
$(U,V) \longmapsto \Psi(U,V) = (x(U,V), y(U,V))$

est une application bijective et de classe C^1 telle que $\Psi(\Delta) = D$

On a $(D = \Psi(\Delta)) \Leftrightarrow (\Delta = \Psi^{-1}(D))$.

On supposera en outre que les fonctions x et y admettant des dérivées partielles continues sur Δ. On définera le Jacobien de l'application par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial x}{\partial V} \\ \frac{\partial y}{\partial U} & \frac{\partial y}{\partial V} \end{pmatrix}$$

et $\det J = \frac{\partial x}{\partial U} \cdot \frac{\partial y}{\partial V} - \frac{\partial y}{\partial U} \cdot \frac{\partial x}{\partial V}$

d'où $|\det J|$ ne doit pas s'annuler sur Δ pour que l'application Ψ soit inversible. Alors

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(x(U,V), y(U,V))\,|\det J|\,dU\,dV$$

__Exemples__ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x+y \leq 2, -1 \leq x-y \leq 1\}$

posons $\begin{cases} U = x+y \\ V = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{U+V}{2} \\ y = \frac{U-V}{2} \end{cases}$

Dans ce cas $\det J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$ d'où $|\det J| = \frac{1}{2}$

donc

$\Delta = \{(U,V) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq U \leq 2, -1 \leq V \leq 1\}$

$$\iint_D (x+2)^2 dx\,dy = \iint_\Delta \left(\frac{U+V}{2}+2\right)^2 \frac{1}{2} dU\,dV = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \left(\frac{U+V}{2}+2\right)^2 dU\right) dV$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{3}\left[\left(\frac{U+V}{2}+2\right)^3\right]_{-2}^{2}\right) dV = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{3}\left(\frac{V}{2}+3\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{V}{2}+1\right)^3\right) dV$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{V}{2}+3\right)^4 - \left(\frac{V}{2}+1\right)^4\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{6}+3\right)^4 - \left(\frac{1}{2}+1\right)^4\right) - \frac{1}{6}\left(\left(-\frac{1}{2}+3\right)^4 - \left(-\frac{1}{2}+1\right)^4\right) = \frac{53}{3}$$

b) Lorsque le domaine D est délimité par des formes circulaires, cela nous permet d'utiliser les coordonnées polaires comme changement de variable. Pour cela, on considère les variables suivantes

$$\begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y = y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$\det J = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$

$|\det J| = r$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

Exemple : Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

calculer $\iint_D y^2 \, dx\, dy$

En utilisant les coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Donc, $\iint_D y^2 \, dx\, dy = \iint_\Delta (r\sin\theta)^2 \, r \, dr\, d\theta$ où $\Delta = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq r \leq 2$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

Alors $\iint_D y^2 \, dx\, dy = \iint_\Delta (r\sin\theta)^2 \, r \, dr\, d\theta = \int_1^2 \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2\theta \, dr\, d\theta$

$= \int_1^2 r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \frac{1}{4} r^4 \Big]_1^2 \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$

$= \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right) \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{15}{4}\left[\frac{2\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 4\pi\right]$

$= \frac{15\pi}{4}$

Exemple $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$ $\iint_D dx\, dy$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ donc $\Delta = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 3$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$\iint_D dx\, dy = \int_0^3 \int_0^{2\pi} r \, dr\, d\theta = \int_0^3 r\, dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} r^2 \Big]_0^3 \cdot \theta \Big]_0^{2\pi}$

$= \frac{9}{2} \times 2\pi = 9\pi$