

الإجابة النموذجية لقياس تحليل البيانات

حل التمرين الأول:

1- حساب المصفوفة الممركزة X_c

لدينا مصفوفة البيانات:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_j = \frac{\sum_{i=1}^m X_{ij}}{m}$$

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^4 X_{i1}}{4} = \frac{1+1-1-1}{4} = 0$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^4 X_{i2}}{4} = \frac{1+1-1-1}{4} = 0$$

$$\bar{X}_3 = \frac{\sum_{i=1}^4 X_{i3}}{4} = \frac{1-1+1-1}{4} = 0$$

$$X_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2- حساب مصفوفة التباين

والتباين المشترك V :

$$V = \frac{1}{m} X_c^t \cdot X_c$$

$$V = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة التباين والتباين المشترك هي

مصفوفة متناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي

نوضح نوع العلاقة بين المتغيرات (0.5)

المتغير 1 (نفس الوتيرة) والمتغير 2

التكوين:

$$COV(X_1, X_2) = COV(X_2, X_1) = 1$$

$$COV(X_1, X_3) = 0$$

$$V = \begin{bmatrix} V(X_1) & COV(X_1, X_2) & COV(X_1, X_3) \\ COV(X_2, X_1) & V(X_2) & COV(X_2, X_3) \\ COV(X_3, X_1) & COV(X_3, X_2) & V(X_3) \end{bmatrix}$$

3- أوجد رتبة المصفوفة V :

نلاحظ أنه بصرى السطر الأول من

المصفوفة في 1 نتحمل على السطر

الثاني وبالتالي السطر الأول

والثاني مرتبطين خطياً وبما

أن السطر الثالث غير معلوم فإن:

$$\text{Rang}(V) = 2$$

بما أن رتبة المصفوفة هي مجموع

القيم الذاتية غير المدمومة ونحن

لدينا $\text{Rang}(V) = 2$ أي هناك

قيمتين فقط غير مدمومة (0.5)

فهما هنا قيم ذاتية

مدمومة هما 0 و 1 ومنه:

$$\lambda_3 = 0$$

ملاحظة: يمكن حساب رتبة المصفوفة انطلاقاً

من عدد الأسطر المستقلة خطياً أو بتحويل

المصفوفة إلى مصفوفة درجية ثم تحديد عدد

الأسطر غير المدمومة.

الافراد	احداثيات الافراد على المحاور الثلاثة	احداثيات الافراد على المحور 2 F_2
1	$\sqrt{2}$	1
2	$\sqrt{2}$	-1
3	$-\sqrt{2}$	1
4	$-\sqrt{2}$	-1

(0,5)

(0,5)

6. حل الافراد على المحاور:

الافراد	نسبة تمثيل الافراد على المحاور	نسبة مساهمة الافراد في تمثيل المحاور		
	$\cos^2_{11}$	$\cos^2_{12}$	C_1^1	C_1^2
1	0,66	0,33	0,25	0,25
2	0,66	0,33	0,25	0,25
3	0,66	0,33	0,25	0,25
4	0,66	0,33	0,25	0,25

(0,5)

(0,5)

نسبة تمثيل الافراد على المحاور:

$$\cos^2(\theta) = \frac{F_2^2(x)}{\sum_{i=1}^m F_2^2(x)}$$

(0,5)

نسبة تمثيل الفرد 2 على المحور 1:

$$\cos^2 \theta = \frac{F_1^2(2)}{F_1^2(2) + F_2^2(2)} = \frac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \frac{2}{3} = 0,66$$

نسبة تمثيل الفرد 3 على المحور 2:

$$\cos^2 \theta = \frac{F_2^2(3)}{F_1^2(3) + F_2^2(3)} = \frac{1^2}{(-\sqrt{2})^2 + 1^2} = \frac{1}{3} = 0,33$$

نسبة مساهمة الافراد على تمثيل المحاور:

$$C_i^d = \frac{F_2^2(x)}{\sum_{i=1}^m F_2^2(x)} = \frac{F_2^2(x)}{m \cdot d(x)}$$

(0,5)

نسبة مساهمة الفرد 1 في المحور 1:

$$C_1^2 = \frac{F_2^2(1)}{F_2^2(1) + F_2^2(2) + F_2^2(3) + F_2^2(4)}$$

4. حساب القيم الذاتية λ :

$$\det (V - \lambda I) = 0 \quad (0,5)$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda) [(1-\lambda)(1-\lambda) - 1] = 0$$

$$(1-\lambda) (\lambda - \lambda - \lambda + \lambda^2 - 1) = 0$$

$$(1-\lambda) (-\lambda + \lambda^2) = 0$$

$$(1-\lambda) (-\lambda) (\lambda - 1) = 0$$

القيم الذاتية

$$\lambda_1 = 2 \quad (0,5)$$

$$\lambda_2 = 1 \quad (0,5)$$

$$\lambda_3 = 0$$

5. إيجاد احداثيات الافراد على

المحورين:

$$F_\alpha = X_c U_\alpha \quad (0,25)$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \sqrt{\lambda_1} u_1 = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$G_2 = \sqrt{\lambda_2} u_2 = \sqrt{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

المتغير	G_{11}	G_{12}
الرضا الوظيفي	1	0
التكوين	1	0
تقييم الأداء	0	1

(0,5)

(0,5)

$$F_1^2 = \frac{(-1)^2}{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (-1)^2}$$

$$F_1^2 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$F_1^2 = \frac{F_2^2(x)}{m \lambda(x)}$$

$$= \frac{(-1)^2}{4 \cdot 1} = \frac{1}{4}$$

$$F_1^2 = 0,25$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$m = 4$$

قراءة للحوار:

جميع الأفراد ممثلون

بشكل أفضل على المحاور القبول

$$(0,66 > 0,33)$$

المحور الأول يفسر الجزء الأكبر

من المعلومات

مساهمة جميع الأفراد متساوية

في تشكيل المحاورية

$$C_1^1 = C_2^2 = 0,25$$

4- حساب إحداثيات المتغيرات:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G_{1\alpha} = \sqrt{\lambda} u_{\alpha} \quad (0,5)$$

2- إيجاد المصفوفة A المرافقة للتطبيق الخطي:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

3- إيجاد القيم الذاتية

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (25)$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) - 0 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4 \quad (0.5) \quad (0.5) \quad (0.5)$$

4- إيجاد المتجهات الذاتية:

$$(A - \lambda I)X = \vec{0} \quad (0.5)$$

$$(A - 2I)X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \lambda = 2 \quad (0.5)$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0.5)$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{متجه ذاتي لـ } \lambda = 2 \quad (0.5)$$

$$(A - 3I)X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \lambda = 3 \quad (0.5)$$

$$\begin{cases} -x_1' + x_2' = 0 \\ x_3' = 0 \Rightarrow \\ x_3' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = x_2' \\ x_3' = 0 \end{cases} \Rightarrow X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

متجه ذاتي موافق لـ $\lambda = 3$

التصنيف:

1- إثبات أن تطبيق خطي

$$f(x, y, z) = (2x + y, 3y + z, 4z)$$

الخطي

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = u(x, y, z) + v(x', y', z')$$

$$= (2(x+x'), 3(y+y'), 4(z+z'))$$

$$= (2x + y, 3y + z, 4z) + (2x' + y', 3y' + z', 4z')$$

$$= f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad \text{المتجه موافق}$$

$$= f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$f(k\vec{u}) = kf(\vec{u}) \quad (0.5)$$

$$f(k\vec{u}) = f(k(x, y, z))$$

$$= f(kx, ky, kz)$$

$$= (2kx + ky, 3ky + kz, 4kz)$$

$$= k(2x + y, 3y + z, 4z)$$

$$= kf(\vec{u}) \quad \text{المتجه موافق}$$

$$= kf(\vec{u}) \quad (0.5)$$

المتجه 1 و 2 موافق والمتجه 3 تطبيق خطي

المعادلة

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (0.5)$$

⊕ نقطة لتقييم الورقة 9.

$$(A - 4I)X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x_1'' + x_2'' = 0 \\ -x_2'' + x_3'' = 0 \\ x_2'' = 2x_1'' \\ x_3'' = x_2'' \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} x_2'' = 2x_1'' \\ x_3'' = x_2'' = 2x_1'' \end{cases}$$

$$(0.5) \quad X'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{نطاق ذاتي} \quad \lambda = 4 \text{ L6}$$

5. A قيم الذاتية

$$\text{tr}(A) = \sum \lambda = 2 + 3 + 4 = 9$$

(0.5)

(0.5)

A^{-1} value - 6

(0.5)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{|A|} \text{cof}(A)^t$$

$$\det(A) = 24 \quad (0.5)$$

$$\text{cof} = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{cof} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad (0.5)$$

$$\text{adj}(\text{cof}(A))^t = \begin{bmatrix} 12 & -4 & 1 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$