

تمرين 1 :

- في دولة معدل البطالة 30% ، نريد أخذ عينة $n_1=200$ ، المتغير $\bar{X}_1$ نسبة (متوسط) العينة .
 في دولة ثانية معدل البطالة 20% ، نريد أخذ عينة $n_2=100$ ، المتغير $\bar{X}_2$ نسبة (متوسط) العينة .
 1°) ماهو احتمال أن $\bar{X}_1$ أصغر أو يساوي 40% .
 2°) ماهو احتمال أن $\bar{X}_2$: _ أصغر أو يساوي 30% .
 _ محصور بين 20% و 30% .
 3°) ماهو احتمال أن الفرق $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$: _ أصغر أو يساوي 20% .
 _ أكبر من 15% .
 _ محصور بين 20% و 30% .

تمرين 2 :

- في مصنع للأجهزة الإلكترونية، أخذت عينة $n=100$ ، فوجد عدد الأجهزة المعيبة 20 جهاز .
 1°) أوجد مجال الثقة لنسبة الأجهزة المعيبة p في المصنع ، بمستوي ثقة 95% .
 2°) نريد تقدير p بحيث لا يتجاوز الخطأ 0.05 ماهو الحد الأدنى لحجم العينة ، بمستوي ثقة 95% .

تمرين 3 :

- من مجتمع طبيعي $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ، أخذت عينة $n_1=45$ ، فوجد أن :
 $\sum x_i = 3150$ $\sum (x_i - \bar{x}_1)^2 = 5280$
 من مجتمع طبيعي ثاني $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ، أخذت عينة $n_2=36$ ، فوجد أن :
 $\sum x_i = 2160$ $\sum (x_i - \bar{x}_2)^2 = 3500$
 1°) أوجد مجال الثقة لمتوسط المجتمع الأول μ_1 ، و التباين σ_1^2 . بمستوي ثقة 95% .
 _ نريد تقدير μ_1 بحيث لا يتجاوز الخطأ 3 ، ماهو الحد الأدنى لحجم العينة n_1 .
 2°) أوجد مجال الثقة لمتوسط المجتمع الثاني μ_2 ، و التباين σ_2^2 . بمستوي ثقة 95% .
 _ نريد تقدير μ_1 بحيث لا يتجاوز الخطأ 3 ، ماهو الحد الأدنى لحجم العينة n_2 .
 3°) أوجد مجال الثقة للفرق بين المتوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$ ، و نسبة التباينين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ ،
 بمستوي ثقة 95% .

القيم بين قوسين احتمال :

$$Z_{(0.90)} = 1.28$$

$$Z_{(0.975)} = 1.96$$

$$Z_{(0.50)} = 0$$

$$Z_{(0.8340)} = 0.97$$

$$Z_{(0.9738)} = 1.94$$

$$Z_{(0.9938)} = 2.5$$

$$Z_{(0.9990)} = 3.08$$

$$Z_{(0.9999)} = 3.88$$

$$t_{44} \quad (0.975) = 2.015$$

$$\chi^2_{44} \quad (0.025) = 27.58$$

$$\chi^2_{44} \quad (0.975) = 64.20$$

$$t_{35} \quad (0.975) = 2.03$$

$$\chi^2_{35} \quad (0.025) = 20.57$$

$$\chi^2_{35} \quad (0.975) = 53.20$$

$$F_{35 \quad 44} \quad (0.975) = 1.94$$

$$F_{35 \quad 44} \quad (0.025) = 0.5$$

$$F_{44 \quad 35} \quad (0.975) = 2$$

نقطة 1

$$\left[\begin{array}{l} \mu_{\bar{X}_1} = \mu_1 = p_1 = 0,3 \\ \sigma_{\bar{X}_1}^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} = \frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} = \frac{0,3 \cdot 0,7}{200} = \frac{0,21}{200} \end{array} \right. : \text{المتوسط الحسابي} : \bar{X}_1 \text{ صغير بما يكفي } (n_1 > 30)$$

النزاع : $n_1 > 30$ المتوسط الحسابي

$$\begin{aligned} Pr(\bar{X}_1 \leq 0,40) &= Pr\left(\frac{\bar{X}_1 - p_1}{\sqrt{\frac{p_1 \cdot q_1}{n_1}}} \leq \frac{0,40 - 0,3}{\sqrt{\frac{0,21}{200}}}\right) \\ &= Pr(Z \leq 3,08) = 0,9990 \end{aligned}$$

نقطة 2 : $\bar{X}_2$ صغير بما يكفي

$$\left[\begin{array}{l} \mu_{\bar{X}_2} = \mu_2 = p_2 = 0,2 \\ \sigma_{\bar{X}_2}^2 = \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2} = \frac{0,2 \cdot 0,8}{100} = \frac{0,16}{100} \end{array} \right. : \text{المتوسط الحسابي}$$

النزاع : $n_2 > 30$ المتوسط الحسابي

$$Pr(\bar{X}_2 \leq 0,30) = Pr\left(\frac{\bar{X}_2 - p_2}{\sqrt{\frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}}} \leq \frac{0,30 - 0,2}{\sqrt{\frac{0,16}{100}}}\right) = Pr(Z \leq 2,5) = 0,9938$$

$$\begin{aligned} Pr(0,2 \leq \bar{X}_2 \leq 0,3) &= Pr\left(\frac{0,2 - 0,2}{\sqrt{\frac{0,16}{100}}} \leq \frac{\bar{X}_2 - p_2}{\sqrt{\frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}}} \leq \frac{0,30 - 0,2}{\sqrt{\frac{0,16}{100}}}\right) \\ &= Pr(0 \leq Z \leq 2,5) = Pr(Z \leq 2,5) - Pr(Z \leq 0) \\ &= 0,9938 - 0,5 = 0,4938 \end{aligned}$$

$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ مقدار الفرق بين المعدلات (3)

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} &= \mu_1 - \mu_2 = p_1 - p_2 = 0.3 - 0.2 = 0.1 \\ \sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2 &= \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2} = \frac{0.21}{200} + \frac{0.16}{100} = \frac{0.53}{200} \end{aligned}$$

المتوسط المشترك ، مشترك

$$\begin{aligned} Pr(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 0.20) &= Pr\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \leq \frac{0.2 - 0.1}{\sqrt{\frac{0.53}{200}}}\right) \\ &= Pr(Z \leq 1.94) = 0.9738 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 0.15) &= Pr\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} > \frac{0.15 - 0.1}{\sqrt{\frac{0.53}{200}}}\right) \\ &= Pr(Z > 0.97) = 1 - Pr(Z \leq 0.97) = 1 - 0.8340 = 0.1660 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr(0.20 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 0.30) &= Pr\left(\frac{0.2 - 0.1}{\sqrt{\frac{0.53}{200}}} < \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} < \frac{0.3 - 0.1}{\sqrt{\frac{0.53}{200}}}\right) \\ &= Pr(1.94 < Z < 3.88) = Pr(Z < 3.88) - Pr(Z < 1.94) \\ &= 0.9999 - 0.9738 = 0.0261 \end{aligned}$$

$$\hat{p} \in \left[\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right]$$

: البيان $\hat{p}$ $\in$ $\left[\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right]$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{20}{100} = 0,2$$

البيان $n = 100, 30$

: $\hat{p} \in \left[\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right]$

$$z_{\frac{1-\alpha}{2}} = z_{0,975} = 1,96$$

$$1-\alpha = 0,95$$

البيان $\hat{p}$

$$\alpha = 0,05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} = 0,2 - 1,96 \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{100}} = 0,1216$$

$$\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} = 0,2 + 1,96 \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{100}} = 0,2784$$

البيان : $0,1216 \leq \hat{p} \leq 0,2784$

: البيان $\hat{p}$ $\in$ $\left[\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right]$

$$e = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}}{\sqrt{n}} : \text{البيان}$$

$$n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}}{e} \right)^2 = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{0,25}}{e} \right)^2$$

$$\bar{x}(1-\bar{x}) = 0,25 \text{ البيان}$$

$$n = \left(\frac{1,96 \cdot \sqrt{0,25}}{0,05} \right)^2 = 19,6^2 = 384,16 = 385$$

! 3 خطوات

$\bar{X}_1 = \frac{\sum X_i}{n_1} = \frac{3150}{45} = 70$: متوسط العينة (1)

$S_1^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X}_1)^2}{n_1 - 1} = \frac{5280}{44} = 120$: تباين العينة

$\mu_1 \in \left[\bar{X}_1 \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S_1}{\sqrt{n_1}} \right]$: مجال المثلل (2)

$t_{0.025, 44} = 2.015$: 95% نسبة الثقة

$\bar{X}_1 - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_1}{\sqrt{n_1}} = 70 - 2.015 \cdot \sqrt{\frac{120}{45}} = 66.709$: الحد الأدنى (95)

$\bar{X}_1 + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_1}{\sqrt{n_1}} = 70 + 2.015 \cdot \sqrt{\frac{120}{45}} = 73.29$: الحد الأعلى

$S_1^2 \in \left[\frac{(n_1 - 1) S_1^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n_1 - 1) S_1^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \right]$: S_1^2 مجال المثلل (3)

$\chi^2_{0.975, 44} = 27.58$

$\chi^2_{0.025, 44} = 64.20$: 95% نسبة الثقة

$\frac{(n_1 - 1) S_1^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} = \frac{44 \cdot 120}{64.2} = \frac{5280}{64.2} = 82.24$: الحد الأدنى (95)

$\frac{(n_1 - 1) S_1^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{44 \cdot 120}{27.58} = \frac{5280}{27.58} = 191.44$: الحد الأعلى

$e_1 \leq 3$: الحد الأدنى لعدد العينة
 $n_1 = \left(\frac{t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot S_1}{e_1} \right)^2 = \left(\frac{2.015 \cdot \sqrt{120}}{3} \right)^2 = 54.15 = 55$ (4)

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum X_i}{n_2} = \frac{2160}{36} = 60$$

المتوسط الحسابي

المتوسط الحسابي (2)

$$S_2^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X}_2)^2}{n_2 - 1} = \frac{3500}{35} = 100$$

المتوسط الحسابي

$$\mu_2 \in \left[\bar{X}_2 \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_2}{\sqrt{n}} \right]$$

0.05

مجال الثقة لـ μ_2

$$t_{0.975, 35} = 2.03 : 1.95 \text{ مستوى الثقة}$$

$$\bar{X}_2 - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_2}{\sqrt{n_2}} = 60 - 2.03 \cdot \sqrt{\frac{100}{36}} = 56.61$$

الحد الأدنى

$$\bar{X}_2 + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_2}{\sqrt{n_2}} = 60 + 2.03 \cdot \sqrt{\frac{100}{36}} = 63.38$$

الحد الأعلى

$$S_2^2 \in \left[\frac{(n_2 - 1) S_2^2}{\chi^2_{1 - \frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n_2 - 1) S_2^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \right]$$

مجال الثقة لـ S_2^2

$$\chi^2_{0.975, 35} = 20.57$$

$$\chi^2_{0.975, 35} = 53.20$$

1.95 مستوى الثقة

$$\frac{(n_2 - 1) S_2^2}{\chi^2_{1 - \frac{\alpha}{2}}} = \frac{35 \cdot 100}{53.2} = \frac{3500}{53.2} = 65.78$$

0.05

الحد الأدنى

$$\frac{(n_2 - 1) S_2^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{35 \cdot 100}{20.57} = \frac{3500}{20.57} = 170.15$$

الحد الأعلى

$$e_2 \leq 3$$

الحد الأقصى لـ n_2 مع مستوى الثقة 1.95

$$n_2 = \left(\frac{t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot S_2}{e_2} \right)^2 = \left(\frac{2.03 \cdot \sqrt{100}}{3} \right)^2 = 45.78 = 46$$

0.05

1. $(\mu_1 - \mu_2)$ Confidence Interval for Difference in Means (03)

$$(\mu_1 - \mu_2) \in \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \right] \quad (0.5)$$

Condition: $n_1 > 30, n_2 > 30$ Central Limit Theorem applies, σ_1^2, σ_2^2 unknown

$z_{0.975} = 1.96$: 95% Confidence Interval

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = (70 - 60) - 1.96 \sqrt{\frac{120}{45} + \frac{100}{36}} : \text{Lower Bound}$$

$$= 10 - 1.96 \cdot 2.0816 = 5.919$$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = (70 - 60) + 1.96 \sqrt{\frac{120}{45} + \frac{100}{36}} : \text{Upper Bound}$$

$$= 10 + 1.96 \cdot 2.0816 = 14.08 \quad (0.5)$$

2. $\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right)$ Confidence Interval for Ratio of Variances

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in \left[\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot F_{\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1}, \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1} \right] \quad (0.5)$$

$F_{0.975, 35, 44} = 1.94$

$F_{0.025, 35, 44} = 0.50$

$F_{0.025, 35, 44} = \frac{1}{F_{0.975, 44, 35}} = \frac{1}{2} = 0.5$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot F_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{120}{100} \cdot 0.50 = 0.6$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot F_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{120}{100} \cdot 1.94 = 2.328 \quad (0.5)$$