

UNIVERSITÉ MOHAMMED SEDDIK BEN YAHIA - JIJEL
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANALYSE FONCTIONNELLE

Sarra MAAROUF

Table des matières

Préface	3
1 Opérateurs bornés	4
2 Théorèmes Généraux d'analyse fonctionnelle	5
2.1 Théorème de Hahn-Banach	5
2.1.1 Forme analytique	5
2.1.2 Forme géométrique du théorème de Hahn-Banach	11
2.2 Théorème de Banach-Steinhaus	14
2.3 Théorème de l'application ouverte	17
2.4 Théorème du graphe fermé	21
2.5 Théorème d'Ascoli ou Ascoli-Arzela	22
3 Topologie faible, topologie faible*, espace reflexif	23
3.1 Topologie faible $\sigma(E, E')$	23
3.1.1 Construction et définition	23
3.2 Convergence faible	24

Préface

Chapitre 1

Opérateurs bornés

Chapitre 2

Théorèmes Généraux d'analyse fonctionnelle

2.1 Théorème de Hahn-Banach

2.1.1 Forme analytique

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Le théorème de Hahn-Banach permet de prolonger une forme linéaire définie sur un sous-espace vectoriel de E en une forme linéaire sur E tout entier, en gardant un contrôle quand il y en avait un sur la forme de départ.

Théorème 2.1.1. *Soit $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x \in E, \quad \forall \lambda > 0 \quad (2.1)$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E. \quad (2.2)$$

Soit d'autre part, G un sous espace vectoriel de E et soit $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire telle que

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G.$$

Alors, il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g i.e.

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in G.$$

et telle que

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E.$$

Avant de faire la preuve, nous rappelons quelques notions de la théorie des ensembles ordonnés.

Soit P un ensemble muni d'une relation d'ordre notée \leq . Soit Q un sous-ensemble de P .

- On dit que Q est totalement ordonné si pour tout couple a, b de Q on a au moins l'une des relations $a \leq b$ ou $b \leq a$.

- On dit que $c \in P$ est un majorant de Q si pour tout $a \in Q$ l'on a $a \leq c$.

- On dit que $m \in P$ est un élément maximal de P si pour tout $x \in P$ tel que $m \leq x$ on a nécessairement $x = m$.

- On dit que P est inductif si tout sous-ensemble totalement ordonné de P admet un majorant.

Lemme 2.1.2. (*Zorn*) *Tout ensemble ordonné, inductif, non vide, admet un élément maximal.*

Preuve. On définit l'ensemble P comme suit

$$P = \left\{ h / h : D(h) \rightarrow \mathbb{R}, h \text{ linéaire et } D(h) \text{ s.e.v. de } E \right. \\ \left. G \subset D(h), h \text{ prolonge } g \text{ et } h(x) \leq p(x), \forall x \in D(h) \right\}.$$

Il est clair que P n'est pas vide car $g \in P$. On munit P de la relation d'ordre suivante

$$(h_1 \leq h_2) \Leftrightarrow (D(h_1) \subset D(h_2) \text{ et } h_2 \text{ prolonge } h_1 \text{ i.e. } h_1(x) = h_2(x), \quad \forall x \in D(h_1)).$$

Soit $Q \subset P$ un sous-ensemble de P totalement ordonné. On note $Q = (h_i)_{i \in I}$. On définit

$$D(h) = \cup_{i \in I} D(h_i) \text{ et } h(x) = h_i(x), \forall x \in D(h_i).$$

On s'assure d'abord que h est bien définie. En effet, soit $x \in D(h)$ telle que $x \in D(h_j)$ et $x \in D(h_k)$, $j \neq k$. D'après la définition de h

$$h(x) = h_j(x) \quad \text{et} \quad h(x) = h_k(x).$$

Comme $h_j, h_k \in Q$ qui est totalement ordonné i.e. $h_j \leq h_k$ ou $h_k \leq h_j$. Supposons que $h_j \leq h_k$ alors

$$D(h_j) \subset D(h_k) \text{ et } h_j(y) = h_k(y), \forall y \in D(h_j).$$

D'où $x \in D(h_j) \subset D(h_k)$ et $h_j(x) = h_k(x)$, Donc h est bien définie.

Vérifions que h appartenant à P .

- 1) $D(h)$ s.e.v. de E
- 2) $G \subset D(h)$
- 3) h est linéaire, en effet, soient $x, y \in D(h)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors il existe j, k tels que $x \in D(h_j)$ et $y \in D(h_k)$. Supposons que $h_j \leq h_k$.

$$D(h_j) \subset D(h_k) \Rightarrow x \in D(h_k) \Rightarrow \alpha x \in D(h_k) \Rightarrow \alpha x + \beta y \in D(h_k)$$

Donc, $h(\alpha x + \beta y) = h_k(\alpha x + \beta y) = \alpha h_k(x) + \beta h_k(y) = \alpha h(x) + \beta h(y)$.

- 4) h prolonge g , en effet, soit $x \in G \subset D(h_i)$ on a h_i prolonge g , $\forall i \in I$ donc

$$h_i(x) = g(x) \forall i \in I,$$

d'où $h(x) = g(x), \forall x \in G$.

- 5) Soit $x \in D(h)$, il existe $i \in I$ tel que $x \in D(h_i)$ donc

$$h(x) = h_i(x) \leq p(x).$$

On a donc démontré que $h \in P$.

Vérifions que P est inductif i.e. tout sous-ensemble de P totalement ordonné admet un majorant. Soit $j \in I$, il est clair que $D(h_j) \subset \cup_{i \in I} D(h_i) = D(h)$ Soit $x \in D(h_j)$, $h_j(x) = h(x)$ Donc $h_j \leq h$, et donc h est un majorant de Q . En appliquant le lemme de Zorn, on déduit que P admet un élément maximal qu'on notera f .

$$f \in P \Rightarrow f \text{ prolonge } g \text{ et } f(x) \leq p(x), \forall x \in D(f).$$

Pour conclure, on va montrer que $D(f) = E$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $D(f) \neq E$ i.e. $\exists x_0 \in E$ et $x_0 \notin D(f)$. Posons $D(h) = D(f) + \mathbb{R}\{x_0\}$ s.e.v. de E $G \subset D(f) \subset D(h)$ donc $G \subset D(h)$. Soit $y \in D(h)$, $y = x + tx_0$ tel que $x \in D(f)$ et $t \in \mathbb{R}$. Si h est linéaire sur $D(h)$ on aura $h(y) = h(x + tx_0) = h(x) + th(x_0) = f(x) + th(x_0)$.

Pour que h soit dans P il suffit de choisir $h(x_0)$ tel que

$$\begin{aligned} & h(x + tx_0) \leq p(x + tx_0), \forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} h(t(\frac{x}{t} + x_0)) \leq p(t(\frac{x}{t} + x_0)), \forall x \in D(f), \forall t > 0 \\ h(-t(\frac{x}{-t} - x_0)) \leq p(-t(\frac{x}{-t} - x_0)), \forall x \in D(f), \forall t < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} t(h(\frac{x}{t}) + h(x_0)) \leq tp(\frac{x}{t} + x_0), \forall x \in D(f), \forall t > 0 \\ -th(\frac{x}{-t}) - h(x_0) \leq -t(p(\frac{x}{-t} - x_0)), \forall x \in D(f), \forall t < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} f(z) + h(x_0) \leq p(z + x_0), \forall z \in D(f), \\ f(z') - h(x_0) \leq p(z' - x_0), \forall z' \in D(f). \end{cases} \end{aligned}$$

Il suffit de choisir

$$f(z') - p(z' - x_0) \leq h(x_0) \leq (-f(z) + p(z + x_0)), \forall z, z' \in D(f)$$

$$\sup_{z' \in D(f)} f(z') - p(z' - x_0) \leq h(x_0) \leq \inf_{z \in D(f)} (-f(z) + p(z + x_0)),$$

Pour tout $z, z' \in D(f)$ on a

$$f(z) + f(z') = f(z + z') \leq p(z + z' + x_0 - x_0) \leq p(z + x_0) + p(z' - x_0)$$

$$\Rightarrow f(z') - p(z' - x_0) \leq -f(z) + p(z + x_0)$$

Donc le choix de $h(x_0)$ est possible. On a ainsi construit une fonction $h \in P$ telle que $h \neq f$ et $D(f) \subset D(h)$ et h prolonge f i.e $f \leq h$ ce qui contredit le fait que f est l'élément maximal de E . Donc $D(f) = E$ et f est le prolongement voulu de g .

Notation 2.1.3. On désigne par E' le dual de E , i.e. l'espace de formes linéaires continues sur E et muni de la norme dual

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |f(x)|$$

En particulier si l'espace est normé et la forme linéaire est continue, on peut la prolonger en une forme linéaire continue sur tout l'espace, et en gardant la même norme.

Corollaire 2.1.4. Soient E un e.v. n. sur \mathbb{R} . G un s-e.v. de E . Si g est une forme linéaire et continue sur G ($g \in G'$), alors il existe une forme linéaire continue f qui prolonge g dans E , et tel que

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$$

Preuve. On va appliquer le Théorème de Hahn-Banach avec $p(x) = \|g\| \|x\|$.

Comme $g \in G'$, on a pour tous $x, y \in E$, $\lambda > 0$

$$g(x) \leq |g(x)| \leq \|g\| \|x\| = p(x)$$

D'autre part,

$$p(\lambda x) = \|g\| \|\lambda x\| = \lambda \|g\| \|x\| = \lambda p(x).$$

$$p(x + y) = \|g\| \|x + y\| \leq \|g\| (\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y)$$

Les hypothèses du théorème H-B sont vérifiées, on déduit qu'il existe f linéaire qui prolonge g à E et on a

$$f(x) \leq p(x) = \|g\|\|x\|, \quad \forall x \in E$$

donc, il existe $c = \|g\|$ telle que

$$f(x) \leq c\|x\|, \forall x \in E$$

D'où la continuité de f sur E . de plus,

$$\|f\| \leq \|g\| \text{ (car } \|f\| = \inf\{c > 0, |f(x)| \leq c\|x\|\}).$$

D'autre part, f prolonge g i.e. $f(x) = g(x), \forall x \in G \Rightarrow |f(x)| = |g(x)| \leq \|f\|\|x\|, \forall x \in G$, et par définition de $\|g\|$ on obtient

$$\|g\| \leq \|f\|.$$

Par conséquent, $\|f\| = \|g\|$.

Corollaire 2.1.5. Soient E un e.v.n. sur \mathbb{R} , $x_0 \in E, x_0 \neq 0$. Alors, $\exists f \in E'$ avec $\|f\| = 1$ et $f(x_0) = \|x_0\|$.

Preuve. Soit G le s-e.v. défini par $G = \mathbb{R}\{x_0\}$. On définit l'application g de $\mathbb{R}\{x_0\}$ dans \mathbb{R} par

$$g(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|.$$

On va montrer que g est linéaire et continue sur G . Soient $x, y \in G, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 x_0$ et $y = \lambda_2 x_0$.

$$\begin{aligned} g(\alpha x + \beta y) &= g(\alpha \lambda_1 x_0 + \beta \lambda_2 x_0) \\ &= g((\alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2) x_0) \\ &= (\alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2) \|x_0\| \\ &= \alpha \lambda_1 \|x_0\| + \beta \lambda_2 \|x_0\| \end{aligned}$$

Soit $x = \lambda x_0 \in G, \lambda \in \mathbb{R}$

$$|g(x)| = |\lambda\|x_0\|| = |\lambda|\|x_0\| = \|\lambda x_0\| = \|x\|$$

D'où la continuité de g , et on a

$$\|g\| = \sup_{x \in G, x \neq 0} \frac{|g(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in G, x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

Donc $\|g\| = 1$. En appliquant le corollaire 2.1.4, il existe $f \in E'$ tel que $\|f\| = \|g\| = 1$.

Corollaire 2.1.6. *Pour tout $x_0 \in E$, il existe $f_0 \in E'$ tel que*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad \text{et} \quad \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2.$$

Preuve. TD

Corollaire 2.1.7. *Pour tout $x \in E$, on a*

$$\|x\| = \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \max_{f \in E', \|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|$$

Preuve. Supposons que $x \neq 0$, il est clair que

$$\sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq \|x\|$$

D'autre part, d'après le Corollaire 2.1.5, il existe $f_0 \in E'$ tel que $\|f_0\| = 1$ et $|\langle f_0, x \rangle| = \|x\|$. Comme

$$|\langle f_0, x \rangle| \leq \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|$$

alors

$$\|x\| \leq \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|$$

D'où l'égalité.

2.1.2 Forme géométrique du théorème de Hahn-Banach

Soit E un e.v.n.

Définition 2.1.8. Un hyperplan est un ensemble de la forme

$$H = \{x \in E, f(x) = \alpha\}$$

tel que f est une forme linéaire sur E , non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que H est l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.

Proposition 2.1.9. L'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ est fermé si et seulement si f est continue.

Définition 2.1.10. Soient $A \subset E$ et $B \subset E$. On dit que l'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens large si l'on a

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A \quad \text{et} \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B.$$

On dit que H sépare A et B au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A \quad \text{et} \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall x \in B.$$

Géométriquement, la séparation exprime que A et B se situent de part et d'autre H .

Lemme 2.1.11. Jauge d'un convexe. Soit $C \subset E$ un convexe ouvert avec $0 \in C$. Pour tout $x \in E$. On pose

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0; \alpha^{-1}x \in C\}.$$

p est appelé la jauge de C .

Alors p vérifie (2.1) et (2.2) et

$$\exists M, \quad 0 \leq p(x) \leq M\|x\|, \quad \forall x \in E \tag{2.3}$$

$$C = \{x \in E; \quad p(x) < 1\}. \tag{2.4}$$

Preuve

Lemme 2.1.12. *Soit $C \subset E$ un convexe ouvert non vide et soit $x_0 \in E$ avec $x_0 \notin C$. Alors il existe $f \in E'$ tel que $f(x) < f(x_0) \forall x \in C$. En particulier l'hyperplan d'équation $[f = f(x_0)]$ sépare $\{x_0\}$ et C au sens large.*

Preuve. Soit $x \in C$, par translation on trouve que $0 \in C$, On introduit la jauge de C , notée p . On considère $G = \mathbb{R}\{x_0\}$ et la forme linéaire g de G définie par

$$g(tx_0) = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On montre que $g(x) \leq p(x), \forall x \in G$. Soit $x \in G, x = tx_0, t \in \mathbb{R}$.

Si $t < 0$, l'inégalité est satisfaite car $p(x) > 0$.

Si $t > 0$, d'après (2.4), x_0 n'est pas dans C donc $p(x_0) \geq 1$, d'où $g(x) = t \leq tp(x_0) = p(x)$.

D'après le théorème de Hahn-Banach ; il existe f forme linéaire qui prolonge g dans E , et tel que

$$f(x) \leq p(x), \quad x \in E.$$

De (2.3), f est continue et on a $f(x_0) = 1$, pour $x \in C$,

$$f(x) \leq p(x) < 1 = f(x_0).$$

Théorème 2.1.13. Première forme géométrique. *Soient A et B deux sous-ensembles non vides de E et disjoints. On suppose que A est **convexe** et **ouvert**. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.*

Preuve. Posons $C = A - B$.

1) $C \neq \emptyset$ car $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$.

2) C est ouvert, en effet, $C = A - B$, on peut écrire $C = \cup_{y \in B} A - \{y\}$.

3) C est convexe car A et B sont convexes.

4) $0 \notin C$, en effet, supposons $0 \in C$ alors $\exists a \in A, \exists b \in B$ tel que $a - b = 0$, donc $a = b$, contradiction car $A \cap B = \emptyset$.

D'après le lemme 2.1.12, il existe f dans E' tel que

$$f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow f(a - b) < 0, \forall a \in A, \forall b \in B$$

Alors

$$f(a) < f(b), \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Fixons $\alpha \in \mathbb{R}$ avec

$$\sup_{a \in A} f(a) \leq \alpha \leq \inf_{b \in B} f(b)$$

et donc l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ (qui est fermé d'après la proposition 2.1.9) sépare A et B au sens large.

Théorème 2.1.14. Deuxième forme géométrique Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides, disjoints. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, on pose

$$A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon) \quad \text{et} \quad B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon)$$

Montrons d'abord que A_ε et B_ε vérifient les hypothèses du théorème 2.1.13.

- 1) A_ε et B_ε sont non vides (car $A, B, B(0, \varepsilon)$ sont non vides)
- 2) A_ε et B_ε sont ouverts (car $B(0, \varepsilon)$ est ouvert)
- 3) A_ε et B_ε sont convexes (somme de deux convexes).
- 4) A_ε et B_ε sont disjoints, i.e. $\exists \varepsilon > 0, A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$. Supposons que

$$\forall \varepsilon > 0, A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A_\varepsilon \cap B_\varepsilon, x_\varepsilon = a + z = b + z', \quad a \in A, b \in B, z, z' \in B(0, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \exists b \in B, \exists z, z' \in B(0, \varepsilon), a - b = z - z',$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \exists b \in B, \exists z, z' \in B(0, \varepsilon), \|a - b\| = \|z - z'\| < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A, \exists b_n \in B, \|a_n - b_n\| < \frac{1}{2n}$$

Comme B est compact, on peut extraire une sous-suite $(b_{k(n)})$ qui converge dans B . Soit $b := \lim b_{k(n)}$.

$$\begin{aligned} \|a_{k(n)} - b\| &\leq \|a_{k(n)} - b_{k(n)}\| + \|b_{k(n)} - b\| \\ &\leq \frac{1}{2k(n)} + \|b_{k(n)} - b\| \end{aligned}$$

Passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, $\|a_{k(n)} - b\| \rightarrow 0$. donc $\lim a_{k(n)} = b$. Comme A est fermé, $b \in A$, contradiction avec le fait $A \cap B = \emptyset$.

En appliquant le Théorème 2.1.13, on déduit l'existence d'un hyperplan fermé d'équation $[f = \alpha]$ qui sépare A_ε et B_ε au sens large

$$f(x') \leq \alpha, \forall x' \in A_\varepsilon \quad \text{et} \quad f(y') \geq \alpha, \forall y' \in B_\varepsilon$$

$$f(x + \varepsilon z) \leq \alpha, \quad ; \forall x \in A, \forall z \in B(0, 1) \tag{2.5}$$

$$f(y - \varepsilon z') \geq \alpha ; \forall y \in B, \forall z' \in B(0, 1) \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} (2.5) &\Rightarrow f(x) + \varepsilon f(z) \leq \alpha, \quad ; \forall x \in A, \forall z \in B(0, 1) \\ &\Rightarrow f(z) \leq \frac{1}{\varepsilon}(\alpha - f(x)), \quad ; \forall x \in A, \forall z \in B(0, 1) \\ &\Rightarrow \sup_{\|z\| \leq 1} f(z) \leq \frac{1}{\varepsilon}(\alpha - f(x)), \quad ; \forall x \in A, \\ &\Rightarrow \|f\| \leq \frac{1}{\varepsilon}(\alpha - f(x)), \quad ; \forall x \in A, \\ &\Rightarrow f(x) + \varepsilon \|f\| \leq \alpha, \quad ; \forall x \in A, \end{aligned}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} (2.6) &\Rightarrow f(y) - \varepsilon f(z') \geq \alpha, \quad ; \forall y \in B, \forall z' \in B(0, 1) \\ &\Rightarrow f(z') \leq \frac{1}{\varepsilon}(-\alpha + f(y)), \quad ; \forall y \in B, \forall z' \in B(0, 1) \\ &\Rightarrow \sup_{\|z'\| \leq 1} f(z') \leq \frac{1}{\varepsilon}(-\alpha + f(y)), \quad ; \forall y \in B, \\ &\Rightarrow \|f\| \leq \frac{1}{\varepsilon}(-\alpha + f(y)), \quad ; \forall y \in B, \\ &\Rightarrow \alpha + \varepsilon \|f\| \leq f(y), \quad ; \forall y \in B. \end{aligned}$$

Donc, il existe $\varepsilon' = \varepsilon \|f\| > 0$, ; $f(x) \leq \alpha - \varepsilon'$ et $f(y) \geq \alpha + \varepsilon'$.

On conclut que A et B sont séparé au sens strict par l'hyperplan fermé d'équation $[f = \alpha]$.

2.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Tout d'abord, rappelons le lemme de Baire.

Lemme 2.2.1. Soit X un espace métrique complet. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de fermés de X . On suppose que

$$\forall n \geq 1, \quad \overset{\circ}{X}_n = \emptyset$$

Alors

$$\overset{\circ}{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} = \emptyset.$$

Le lemme de Baire est en général utilisé sous la forme suivante : Soit X un espace métrique complet non vide. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de fermés telle que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = E.$$

Alors, il existe n_0 tel que $\overset{\circ}{X}_{n_0} \neq \emptyset$.

Théorème 2.2.2. Soient E, F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'opérateurs linéaires et continus de E dans F . On suppose que

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty, \quad \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty.$$

Autrement dit, il existe une constante c telle que

$$\|T_i x\| \leq c \|x\|, \quad \forall x \in E, \quad \forall i \in I.$$

Preuve. On définit la suite des ensembles $(X_n)_{n \geq 1}$ par

$$\forall n \geq 1, \quad X_n = \{x \in E; \|T_i x\| \leq n, \forall i \in I\}$$

On montre que X_n est fermé.

$$\begin{aligned} X_n &= \{x \in E, T_i x \in B'_F(0, n) \forall i \in I\} \\ &= \bigcap_{i \in I} \{x \in E, T_i x \in B'_F(0, n)\} \\ &= \bigcap_{i \in I} T_i^{-1}(B'_F(0, n)) \end{aligned}$$

Comme $T_i^{-1}(B'_F(0, n))$ est fermé (l'image réciproque de fermé par une application continue), X_n est fermé (car c'est l'intersection de fermé).

On montre que $\cup_{n=1}^{\infty} X_n = E$. Il est clair que $\cup_{n=1}^{\infty} X_n \subset E$. Soit $x \in E$, on a

$$\|T_i x\| < \infty$$

Posons $\alpha = \sup_{i \in I} \|T_i x\|$. Soit $m > 1$ tel que $\alpha < m$, alors

$$\forall i \in I, \quad \|T_i x\| \leq \alpha < m \Rightarrow x \in X_m \subset \cup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Donc $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} X_n$. D'après le lemme de Baire, $\exists n_0 \geq 1$ tel que $\overset{\circ}{X}_{n_0} \neq \emptyset$. i.e. $\exists x_0 \in \overset{\circ}{X}_{n_0}$

$$\Rightarrow r > 0, B(x_0, r) \subset X_{n_0}$$

Soit $z \in B(0, 1)$, $x_0 + rz \in B(x_0, r)$.

$$\begin{aligned} \forall z \in B(0, 1), \quad & \|T_i(x_0 + rz)\| \leq n_0 \\ \Rightarrow \forall z \in B(0, 1), \quad & r\|T_i z\| - \|T_i x_0\| \leq n_0 \\ \Rightarrow \forall z \in B(0, 1), \quad & \|T_i z\| \leq \frac{1}{r}(n_0 + \|T_i x_0\|) \\ \Rightarrow \forall z \in B(0, 1), \quad & \|T_i z\| \leq \frac{1}{r}(n_0 + \alpha) \\ \Rightarrow \|T_i\| = \sup_{z \in B(0, 1)} \|T_i z\| & \leq \frac{1}{r}(n_0 + \alpha) \end{aligned}$$

on déduit que il existe $C = \frac{1}{r}(n_0 + \alpha) > 0$ tel que $\sup_{i \in I} \|T_i\| \leq C < \infty$.

Corollaire 2.2.3. *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite d'opérateurs linéaires continus de E dans F . Pour tout $x \in E$, $(T_n x)_{n \geq 1}$ converge quand $n \rightarrow \infty$ vers une limite Tx . Alors on a*

i) $\sup_{n \geq 1} \|T_n\| < \infty$

ii) $T \in L(E, F)$.

iii) $\|T\|_{L(E, F)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{L(E, F)}$

Preuve. On définit l'opérateur

$$\begin{aligned} T : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x \end{aligned}$$

i) Pour tout $x \in E$, la suite $(T_n x)$ converge dans F , donc elle est bornée i.e.

$$\sup_{n \geq 1} \|T_n x\| < \infty$$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus

$$\sup_{n \geq 1} \|T_n\| < \infty$$

2) voir l'exo 2 série 1.

iii) Soit x dans E , on a pour tout $n \geq 1$

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\|$$

Comme $(T_n)_n$ est borné (d'après i)), $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$ existe. Il en résulte

$$\|Tx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \|x\|$$

et donc

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|, \quad \forall x \in E$$

D'où iii).

2.3 Théorème de l'application ouverte

Théorème 2.3.1. *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire continu et surjectif de E sur F . Alors $\exists c > 0$ tel que*

$$B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1)) \tag{2.7}$$

Preuve. La démonstration se fait en deux étapes.

Première étape : On commence par montrer la propriété suivante : Soit T un opérateur linéaire surjectif de E sur F . Alors,

$$\exists c > 0, B(0, 2c) \subset \overline{T(B(0, 1))} \tag{2.8}$$

On pose $X_n = \overline{nT(B(0,1))} = \overline{nT(B(0,1))}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, alors X_n est fermé $\forall n \geq 1$. Soit $y \in F$, puisque T est surjectif, il existe $x \in E$ tel que $y = Tx$. Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que

$$\begin{aligned} \|x\| < n &\Rightarrow \left\| \frac{x}{n} \right\| < 1 \Rightarrow \frac{x}{n} \in B(0,1) \\ &\Rightarrow T\left(\frac{x}{n}\right) \in T(B(0,1)) \\ &\Rightarrow \frac{1}{n}Tx \in T(B(0,1)) \\ &\Rightarrow y = Tx \in nT(B(0,1)) \subset X_n \subset \cup_n X_n. \end{aligned}$$

D'où $F = \cup X_n$. En appliquant le lemme de Baire $\exists n_0 \geq 1$, $\overset{\circ}{X}_{n_0} \neq \emptyset$. Or

$$\overset{\circ}{X}_{n_0} = n_0 \text{int}(\overline{T(B(0,1))}) = n_0 \text{int}(T(B(0,1)))$$

D'où $\text{Int}(B(0,1))$ n'est pas vide, i.e. il existe y_0 dans $\text{int}(T(B(0,1)))$ et donc

$$\exists r > 0, B(y_0, r) \subset \overline{T(B(0,1))}$$

Comme $T(B(0,1))$ est symétrique on aura aussi $-y_0$ dans $\overline{T(B(0,1))}$ et donc

$$\begin{aligned} \{-y_0\} \subset \overline{T(B(0,1))} &\Rightarrow \{-y_0\} + B(y_0, r) \subset \overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))} = \overline{2T(B(0,1))} \\ &\Rightarrow B(0, r) \subset \overline{2T(B(0,1))} \\ &\Rightarrow B\left(0, \frac{r}{2}\right) \subset \overline{T(B(0,1))} \end{aligned}$$

il existe $c = \frac{r}{4}$, tel que $B(0, 2c) \subset \overline{T(B(0,1))}$.

Deuxième étape : On montre la propriété suivante : Soit T un opérateur linéaire continue qui vérifie (2.8) alors on a

$$B(0, c) \subset T(B(0,1)). \tag{2.9}$$

Soit $y \in B(0, c)$ i.e. $\|y\| < c$ et donc $\|2y\| < 2c$ ce qui signifie que $2y \in B(0, 2c)$ D'après (2.8), on voit que $2y \in \overline{T(B(0,1))}$ et donc

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, B(2y, \varepsilon) \cap T(B(0,1)) &\neq \emptyset \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in B(2y, \varepsilon) & \text{ et } y_\varepsilon \in T(B(0,1)) \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in F, \text{ tel que } \|2y - y_\varepsilon\| < \varepsilon & \text{ et } y_\varepsilon \in T(B(0,1)) \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in B(0,1) \text{ tel que } y_\varepsilon = Tx_\varepsilon & \text{ et } \|2y - y_\varepsilon\| < \varepsilon \\ \Rightarrow \forall \varepsilon, \exists x_\varepsilon \in B(0,1) \text{ tel que } \|y - T\left(\frac{x_\varepsilon}{2}\right)\| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E \text{ tel que } \|x_\varepsilon\| < 1 & \text{ et } \|y - T\left(\frac{x_\varepsilon}{2}\right)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Posant $z_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{2}$ on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z_\varepsilon \in E \text{ tel que } \|z_\varepsilon\| < \frac{1}{2} \text{ et } \|y - Tz_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour $\varepsilon = c$, il existe $z_1 \in E$ tel que $\|z_1\| < \frac{1}{2}$ et $\|y - Tz_1\| < \frac{c}{2}$. Si on pose $y' = 2y - 2Tz_1$ on aura $\|y'\| < c$. On applique le même procédé sur y' on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E \text{ tel que } \|x_\varepsilon\| < 1 \text{ et } \|y' - T(\frac{x_\varepsilon}{2})\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z'_\varepsilon \in E \text{ tel que } \|z'_\varepsilon\| < \frac{1}{2} \text{ et } \|y' - Tz'_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour $\varepsilon = C$, il existe $z' \in E$ tel que $\|z'\| < \frac{1}{2}$ et $\|y' - T(z')\| < \frac{c}{2}$. Reprenons la quantité y'

$$\exists z' \in E, \|z'\| < \frac{1}{2} \text{ et } \|2y - T(2z_1) - Tz'\| < \frac{c}{2}$$

On pose $z_2 = \frac{z'}{2}$ on aura

$$\exists z_2 \in E, \|z_2\| < \frac{1}{2^2} \text{ et } \|y - T(z_1 + z_2)\| < \frac{c}{2^2}$$

On construit par récurrence une suite $(z_n)_{n \geq 1}$ tel que $\|z_n\| < \frac{1}{2^n}$ et $\|y - T(z_1 + z_2 + \dots + z_n)\| < \frac{c}{2^n}$. Posant $x_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$. d'où

$$\forall n \geq 1, \|y - Tx_n\| < \frac{c}{2^n}$$

Passant à la limite

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|y - Tx_n\| < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{2^n} = 0$$

Alors $(Tx_n)_n$ converge vers y dans F .

Montrons que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p > q$

$$\begin{aligned} \|x_p - x_q\| &= \left\| \sum_{k=q+1}^p z_k \right\| \leq \sum_{k=q+1}^p \|z_k\| \\ &< \sum_{k=q+1}^p \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^{q+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^{p-q}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^q} \left(1 - \frac{1}{2^{p-q}}\right) \\ &< \frac{1}{2^q} \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

D'où $\|x_p - x_q\| \rightarrow 0$ et donc $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E . Soit $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

$$x_n \overline{n \rightarrow \infty} \rightarrow x \text{ dans } E \Rightarrow Tx_n \overline{n \rightarrow \infty} \rightarrow Tx \text{ dans } F$$

On déduit que $y = Tx$. Il reste à démontrer que $\|x\| < 1$.

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k \geq 1} z_k$$

Passant à la norme, on aura

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{k \geq 1} z_k \right\| \leq \sum_{k \geq 1} \|z_k\| \\ &< \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \\ &< \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $\|x\| < 1$ et $y = Tx$. D'où $y \in T(B(0, 1))$.

Remarque 2.3.2. La propriété (2.7) entraîne que T transforme tout ouvert de E en un ouvert de F (T est une application ouverte). En effet, Soit O un ouvert de E . Montrons que $T(O)$ est ouvert dans F . Soit $y_0 \in T(O)$ i.e. $\exists x_0 \in O$ tel que $y_0 = Tx_0$. Puisque O est ouvert

$$\begin{aligned} \exists r > 0, B(x_0, r) \subset O &\Rightarrow \exists r > 0, \{x_0\} + B(0, r) \subset O \\ &\Rightarrow T(\{x_0\} + B(0, r)) \subset T(O) \\ &\Rightarrow \{Tx_0\} + T(B(0, r)) \subset T(O) \end{aligned}$$

D'autre part, $B(0, c) \subset T(B(0, 1))$ et donc $B(0, rc) \subset T(B(0, r))$ ceci donne

$$\{Tx_0\} + B(0, rc) \subset \{Tx_0\} + T(B(0, r)) \subset T(O)$$

Donc il existe $r' = rc$ tel que $B(y_0, r') \subset T(O)$.

Remarque 2.3.3. Soit E un e.v. muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On suppose E muni de deux normes est un espace de Banach. Alors les deux normes sont équivalentes.

Corollaire 2.3.4. Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire continu et bijectif de E dans F . Alors T^{-1} est continu.

2.4 Théorème du graphe fermé

Définition 2.4.1. Soit $T : E \rightarrow F$ une application quelconque. Le graphe de T est le sous ensemble de $E \times F$ défini par

$$G(T) = \{(x, Tx), \quad x \in E\}.$$

Proposition 2.4.2. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $T : E \rightarrow F$ un opérateur continu. Alors, $G(T)$ est fermé

Preuve. TD

Théorème 2.4.3. Soit E et F deux espaces de Banach et $T : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. Alors on a T est continu si et seulement si $G(T)$ est fermé.

Preuve. De la proposition précédente on a si T est continu, $G(T)$ est fermé. On va donc montrer l'implication inverse. Tout d'abord on a $G(T)$ est un e.v.n de $E \times F$ car T est linéaire, et Comme $G(T)$ est fermé il est donc complet car $E \times F$ est complet, muni de la norme

$$\|(x, Tx)\|_{G(T)} = \|x\|_E + \|Tx\|_F$$

Soit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : E &\rightarrow G(T) \\ x &\mapsto \varphi(x) = (x, Tx). \end{aligned}$$

φ est linéaire car T l'est. φ est bijectif, en effet,

Soit Y dans $G(T)$ i.e. $\exists x \in E$ tel que $Y = (x, Tx) = \varphi(x)$.

Soit $\varphi(x) = 0 \Rightarrow (x, Tx) = 0 \Rightarrow x = 0$ et $Tx = 0$ d'où $x = 0$. donc $\ker \varphi = \{0\}$.

Par ailleurs, on a pour tout $x \in E$

$$\|\varphi(x)\| = \|x\| + \|Tx\| \geq \|x\|$$

Alors φ^{-1} est continu (voir l'exo 6 TD1). Par conséquent, φ^{-1} est linéaire continu et bijectif de E dans $G(T)$ qui sont de Banach alors d'après le corollaire de l'application ouverte φ est continu i.e il existe $C > 0$ tel que

$$\|\varphi(x) = \|x\| + \|Tx\| \leq c\|x\|$$

D'où la continuité de T .

2.5 Théorème d'Ascoli ou Ascoli-Arzela

Rappel : Une partie A d'un espace métrique X est dite relativement compacte si son adhérence est une partie compacte de X . Ceci revient à dire que toute suite d'éléments de A admet une sous-suite qui converge dans X .

Théorème 2.5.1. *Soit K un espace métrique compact. Soit H un sous-espace borné de $C(K)$. On suppose que H est uniformément équicontinu i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \forall f \in H.$$

Alors, H est relativement compact.

Chapitre 3

Topologie faible, topologie faible*, espace reflexif

3.1 Topologie faible $\sigma(E, E')$

3.1.1 Construction et définition

Soit E un espace de Banach. Soit $f \in E'$. On désigne par $\varphi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Lorsque f décrit E' , on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in E'}$ d'applications de E dans \mathbb{R} .

Définition 3.1.1. *La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E et la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $\sigma(E, E')$.*

Proposition 3.1.2. *La topologie $\sigma(E, E')$ est séparé*

Preuve. Soient $x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2$. On cherche à construire $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ ouvert pour la topologie $\sigma(E, E')$ tel que $x_1 \in \mathcal{O}_1, x_2 \in \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. D'après la deuxième forme géométrique de théorème de Hahn-Banach, il existe un hyperplan fermé séparant $\{x_1\}$ et $\{x_2\}$ au sens strict. Donc $\exists f \in E', \alpha \in \mathbb{R}$

$$\langle f, x_1 \rangle < \alpha < \langle f, x_2 \rangle .$$

On pose

$$\mathcal{O}_1 = \{x \in E, \langle f, x \rangle < \alpha\} = \varphi_f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$$

$$\mathcal{O}_2 = \{x \in E, \langle f, x \rangle > \alpha\} = \varphi_f^{-1}(] \alpha, +\infty[)$$

Il est clair que $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$, $x_1 \in \mathcal{O}_1$ et $x_2 \in \mathcal{O}_2$.

Proposition 3.1.3. *Soit $x_0 \in E$, on obtient une base de voisinage de x_0 pour la topologie $\sigma(E, E')$ en considérant tous les ensemble de la forme*

$$V = \{x \in E, | \langle f_i, x - x_0 \rangle | < \varepsilon\}$$

où I est fini, $f_i \in E'$, $\varepsilon > 0$.

Remarque 3.1.4. *Etant donné un point $x_0 \in E$, on obtient une base de voisinage de x_0 pour la topologie \mathcal{T} en considérons les ensembles de la forme $\cap f^{-1}(U)$ tel que U est un voisinage de $f(x_0)$ dans \mathbb{R} .*

$$\mathcal{B} = \{\cap_{f \text{ fini}} f^{-1}(U), f \in E', U \in \mathcal{T}_u\}.$$

Proposition 3.1.5. *En dimension finie, la topologie faible coincide avec la topologie forte.*

Preuve.

propriété.

1) La topologie faible est moins fine que la topologie forte.

tous les ouverts faibles sont des ouverts forts.

2) En dimension infinie, la boule unité ouverte $B(0, 1)$ est d'intérieur vide pour la topologie faible.

3) Les fermés faibles sont des fermés forts.

4) Soit C un convexe de E . Alors, C est fermé pour la topologie forte si et seulement si C est fermé pour la topologie faible.

3.2 Convergence faible

On rappelle la notion de convergence pour un espace topologique.

Définition : Soit (E, τ) un espace topologique, $x \in E$, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x si pour tout voisinage V de x , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in V$:

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in V.$$

Proposition : Une suite (x_n) converge vers $x \in E$ en sens de la topologie faible $\sigma(E, E')$ si chaque suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ pour tout $f \in E'$.

Démonstration :

\Rightarrow Si $x_n \rightarrow x$, alors grâce à la continuité de f , on a $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

\Leftarrow On suppose que $f(x_n) \rightarrow f(x)$ et on montre que $x_n \rightarrow x$:

— Soit V un voisinage de x , i.e., $V \in \mathcal{B}(x)$ et $x \in V$.

— D'après la remarque 1.3, on a :

$$V = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(U_i), \quad I \text{ fini, } f \in E', U_i \in \tau_{\mathbb{R}}.$$

— On a $\forall i \in I, x \in f^{-1}(U_i) \iff \forall i \in I, f(x) \in U_i$.

— Comme $f(x_n) \rightarrow f(x)$, alors :

$$\forall i \in I, \exists N_i \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_i, f(x_n) \in U_i.$$

— En posant $N = \max(N_i)$, on a :

$$\forall n \geq N, x_n \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(U_i) = V.$$

D'où $x_n \rightarrow x$.

Notation :

— Étant donné une suite (x_n) de E , on désigne par $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ la convergence de x_n vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

— Afin d'éviter la confusion, on précisera souvent.

— En cas d'ambiguïté, on insistera en disant $x_n \rightarrow x$ fortement pour signifier que $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Proposition : Soit (x_n) une suite de E . On a :

1. Si $x_n \rightarrow x$ fortement, alors $x_n \rightarrow x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$.
2. Si $x_n \rightarrow x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$, alors (x_n) est bornée.
3. Si $x_n \rightarrow x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et $\|x_n\| \rightarrow \liminf \|x_n\|$, alors $x_n \rightarrow x$ fortement pour $\sigma(E, E')$.
4. Si $x_n \rightarrow x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ dans E' , i.e., $f_n \rightarrow f$ faiblement dans E' , alors :

$$\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle.$$

Démonstration :

- (i) Résulte de la proposition précédente et de la définition de la topologie faible $\tau(E, E')$. (en prenant φ_f au lieu de f)
- (ii) Supposons que $x_n \rightarrow x$ fortement, i.e., $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Montrons que x_n converge faiblement vers x i.e $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in E'$.