Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel

Faculté des sciences exactes et informatique

Département de mathématiques $\qquad$ $3^{\text{ème}}$ année Licence, mathématiques

Examen

Géométrie différentielle

Durée : 2h00

Il est impératif de fournir une justification à chacune des réponses.

Exercice 1. *Démonter que l'application* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *définie par* $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ *définit en tout point* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *un* C^1-*difféomorphisme local mais pas un* C^1-*difféomorphisme global.*

Exercice 2. *Soit la* $1-$ *forme différentielle* α *définie sur* $\mathbb{R}^3$ *par*

$$\alpha = \frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}e^{y\sin\frac{x}{2}}dx + \sin\frac{x}{2}e^{y\sin\frac{x}{2}}dy + 2zdz$$

et soit g *une fonction de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$, *et* β *la* $1-$*forme différentielle sur* $\mathbb{R}^3$ *donnée par*

$$\beta = xye^{xz}(2+zx)dx + x^2e^{xz}dy + g(x)ye^{xz}dz.$$

1. *Déterminer* g *pour que* β *soit une forme fermée.*
2. *Montrer que* α *est fermée et justifier pourquoi* α *admet-elle une primitive ?*
3. *Trouver une primitive de* α *sur* $\mathbb{R}^3$.
4. *Calculer* $\alpha \wedge \beta$ *et* $d(\alpha \wedge \beta)$.
5. *Soit* $\varphi(t) = (\sin t, \cos t, \sin(2t))$, $t \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[$ *et* $\gamma = \frac{1}{z}(ydx + xdy + dz)$.
   - *Calculer* $d\gamma$.
   - *Calculer* $\varphi^*(\gamma)$ *et déduire* $\int_\varphi \gamma$.

Correction

Exo 1 : (03pts)
$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

$$J_{(x_0,y_0)} f = \begin{pmatrix} 2x_0 & -2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 \end{pmatrix} \quad 0,25$$

$\det J_{(x_0,y_0)} f = 4(x_0^2 + y_0^2) > 0$ (0,25). Donc f est inversible (0,25). De plus, il est clair que f est de classe C^1 (0,25). Ainsi par le thm. d'inversion local (0,25), il existe $V \in \mathcal{V}(x_0, y_0)$, $W \in \mathcal{V}(f(x_0,y_0))$ tq.
$f : V \longrightarrow W$ (0,25) est un C^1 - difféo (0,25) i.e., f est un C^1 - difféo local. D'autre part, on a

$$f(1,1) = (0,2) \quad \text{et} \quad f(-1,-1) = (0,2) \quad \text{mais } (1,1) \neq (-1,-1)$$ (0,5)

Donc f n'est pas injective (0,25). alors f ne réalise pas un C^1 - difféo. global (par le thm. d'inversion global) (0,25).

Exo 2 : (09 pts)

1) Pour que β soit fermée il faut et il suffit que $d\beta = 0$. (0,25)

Or
$$d\beta = \left((y + xyz)(2 + zx)e^{xz} + xyze^{xz}\right) \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + xe^{xz}(2 + zx)\, dy \wedge dx$$
$$+ \left(x^2 y e^{xz}(2 + zx) + x^2 y e^{xz}\right) dz \wedge dx + (2x + x^2 z)e^{xz}\, dx \wedge dy$$
$$+ x^3 e^{xz}\, dy \wedge dz + (g'(x) + zy\, g(x))e^{xz}\, dx \wedge dz$$
$$+ g(x)e^{xz}\, dy \wedge dz + xy\, g(x)e^{xz} \underbrace{dz \wedge dz}_{=0}$$
(0,75)

Or $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ (0,25)

1) $\beta = 0 \iff x^3 e^{xz} - g(x) e^{xz} = 0$ 0,25

$\implies g(x) = x^3$ 0,25

2) α fermée $\iff d\alpha = 0$. (sachant que $dx \wedge dx = 0 \cdots$)

$$d\alpha = \left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\right) e^{y\sin\frac{x}{2}}\, dy \wedge dx$$

0,5 $$+ \left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\right) e^{y\sin\frac{x}{2}}\, dx \wedge dy + 2\underbrace{dz \wedge dz}_{0}$$

$= 0$ car $dx \wedge dy = - dy \wedge dx$

Puisque $\mathbb{R}^3$ est 0,25 étoilé et α est fermée, alors par le thm. de Poincaré 0,25 α est loc. exacte 0,25 i.e., $\exists\, \gamma \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ tq. $\alpha = d\gamma$.

3) soit $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ 0,25 $\implies df = \partial_x f\, dx + \partial_y f\, dy + \partial_z f\, dz = \alpha$ 0,25

$$\implies \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{2}\cos\dfrac{x}{2}\, e^{y\sin\frac{x}{2}} & \text{— (1)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin\dfrac{x}{2}\, e^{y\sin\frac{x}{2}} & 0{,}5 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z. \end{cases}$$

(1) $\iff f(x,y,z) = e^{y\sin\frac{x}{2}} + g(y,z)$. 0,5

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin\dfrac{x}{2}\, e^{y\sin\frac{x}{2}} + \dfrac{\partial g}{\partial y} = \sin\dfrac{x}{2}\, e^{y\sin\frac{x}{2}}$ 0,25

$\implies \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ 0,25 $\implies g(y,z) = c(z)$ 0,25 $\implies f(x,y,z) = e^{y\sin\frac{x}{2}} + c(z)$ 0,25

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = c'(z) = 2z$ 0,25 $\implies c(z) = z^2 + k$ 0,25

$\implies f(x,y,z) = e^{y\sin\frac{x}{2}} + z^2 + k \;/\; \underline{k = cst}$ 0,25

$$\alpha\wedge\beta = \left(\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}\, e^{y\sin\frac{x}{2}}\, dx + \sin\frac{x}{2}\, e^{y\sin\frac{x}{2}}\, dy + 2z\,dz\right)$$

$$\wedge\left(xy\,e^{xz}(2+zx)\,dx + x^2 e^{xz}\,dy + x^3 y\, e^{xz}\,dz\right)$$

Sachant que $dx\wedge dx=0$, $dy\wedge dy=0$ et $dz\wedge dz=0$. 0,25

$dx\wedge dy = -dy\wedge dx$ ... On trouve

$$\alpha\wedge\beta = \left(\frac{yx^2}{2}\cos\frac{x}{2}\, e^{y\sin\frac{x}{2}+xz} - xy(2+zx)\sin\frac{x}{2}\, e^{y\sin\frac{x}{2}+xz}\right) dx\wedge dy$$

$$+\left(x^3\frac{y^2}{2}\, e^{y\sin\frac{x}{2}+xz} - 2xyz(2+xz)\,e^{xz}\right) dx\wedge dz$$ 0,5

$$+\left(x^3 y\sin\frac{x}{2}\, e^{y\sin\frac{x}{2}+xz} - 2x^2 z\, e^{xz}\right) dy\wedge dz.$$

$d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta - \alpha\wedge d\beta = 0$ 0,5 car α et β sont fermées.

5) • $d\gamma = \cancel{\frac{1}{z}\, dy\wedge dx} - \frac{y}{z^2}\, dz\wedge dx + \cancel{\frac{1}{z}\, dx\wedge dy} - \frac{x}{z^2}\, dz\wedge dy$

0,5

$= \frac{y}{z^2}\, dx\wedge dz + \frac{x}{z^2}\, dy\wedge dz.$

• $\varepsilon^*(\gamma) = \frac{1}{\sin(2t)}\left(\cos t\, d(\sin t) + \sin t\, d(\cos t) + d(\sin 2t)\right)$

$= \frac{1}{\sin(2t)}\left(\underbrace{\cos^2 t\, dt - \sin^2 t\, dt}_{\cos 2t\, dt} + 2\cos 2t\, dt\right)$ 0,5

$= \frac{3\cos 2t}{\sin 2t}\, dt.$

• $\int_{\varepsilon}\gamma = \int \varepsilon^*(\gamma) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\cos 2t}{\sin 2t}\, dt = \frac{3}{2}\ln|\sin 2t|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$ 0,5

$= \frac{3}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$

08 pts

1/

$$\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3+y^3+z^3-3xyz = 1\}$$

Soit $g : \mathbb{R}^3 \setminus U \longrightarrow \mathbb{R}$ 0,5

$$(x,y,z) \longmapsto g(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3xyz-1.$$

avec $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z\}$ 0,25

g est de classe C^∞. Soit $(x_0,y_0,z_0) \in \Pi$. 0,25

$$J_{(x_0,y_0,z_0)}\, g = \begin{pmatrix} 3x^2-3yz & 3y^2-3xz & 3z^2-3xy \end{pmatrix} \neq 0$$ 0,25

si $x \neq y \neq z$.

Donc g est une submersion. 0,25 D'autre part, on a

$$g^{-1}(\{0\}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = 0\}$$ 0,25

$$= \Pi \cap (\mathbb{R}^3 \setminus U).$$ 0,25 avec $\mathbb{R}^3 \setminus U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Donc Π est une sous variété de classe C^∞ 0,25 et de dimension 2. 0,25

b) Soit $(x,y,z) \in \Pi$;

$$T_{(x,y,z)}\Pi = \operatorname{Ker} d_{(x,y,z)} g$$ 0,25

$$= \{(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3 : dg(h_1,h_2,h_3) = 0\}$$ 0,25

$$= \{(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3 : (x^2-yz)h_1 + (y^2-xz)h_2 + (z^2-xy)h_3 = 0\}$$ 0,25

si $x^2 \neq yz$: On a $h_1 = \dfrac{xz-y^2}{x^2-yz} h_2 + \dfrac{xy-z^2}{x^2-yz} h_3.$

0,5

$$T_{(x,y,z)}\Pi = \langle (xz-y^2,\ x^2-yz,\ 0) ; (xy-z^2,\ 0,\ x^2-yz) \rangle$$

si $y^2 \neq xz$: $T_{(x,y,z)}\Pi = \langle (y^2-xz,\ yz-x^2,\ 0) ; (0,\ xy-z^2,\ y^2-xz) \rangle$ 0,5

$z^2 = xy$:

$$T_{(x,y,z)}\Pi = \langle (z^2 - xy, 0, yz - x^2) ; (0, z^2 - xy, xz - y^2) \rangle$$ 0,5

c) Soit $N : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

0,5

$$(x,y,z) \longmapsto (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$$

$$T_{(x,y,z)}\Pi = \{ (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy) \}^{\perp}$$ 0,25

L'app. N est continue donc elle définit une orientation pour Π 0,25

i.e., Π est orientable.

2) Soit $F = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; x + z = t , x = -y \}$

$$= \{ (x, -x, z, x+z) \mid x, z \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle \underbrace{(1,-1,0,1)}_{u_1}, \underbrace{(0,0,1,1)}_{u_2} \rangle$$ 0,5

Donc les orientations possibles de F sont définies par

la base ordonnée $\{u_1, u_2\}$ 0,25 ou la base ordonnée $\{u_2, u_1\}$ 0,25.

Soient $u_3 = (1,0,0,0)$, $u_4 = (0,1,0,0)$. On a $u_3, u_3 \notin F$.

0,25

et $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 < 0$ 0,25

Donc $\{u_3, u_4, u_1, u_2\}$ ~~forme~~ une base de $\mathbb{R}^4$ et alors le s.e.

0,25

$G = \langle u_3, u_4 \rangle$ est ~~un~~ supplémentaire de F. On peut donc

définir une orientation de F par la base $\{u_3, u_4\}$ ou $\{u_4, u_3\}$.

0,25

Comme $\det(u_3, u_4, u_1, u_2) < 0$ l'orientation définie par $\{u_3, u_4\}$ est identique à 0,25

[illegible] définie par $\{u_1, u_2\}$ [illegible]