

Équations aux dérivées partielles d'évolution

Kecis Ilyas

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Position du problème	2
2	Préliminaires	4
2.1	Opérateurs linéaires bornés et non-bornés	4
2.2	Quelques problèmes d'évolution classiques	5
2.2.1	Équation de la chaleur ou de diffusion (heat equation)	6
2.2.2	Équation des ondes (wave equation)	7
2.2.3	Équation de Schrödinger	8
2.3	Autres résultats et définitions	8
3	Opérateurs m-dissipatifs	10
3.1	Opérateurs m -dissipatifs dans un espace de Hilbert	13
3.2	Exercices	16
4	Étude des semi-groupes	21
4.1	Définitions et propriétés	21
4.2	Générateur infinitésimal	26
4.3	Exercices	33
5	Théorème de Hille-Yosida	38
5.1	Présentation du théorème	38
5.2	Démonstration du théorème	45
6	Problème de Cauchy abstrait	49

Chapitre 1

Introduction

1.1 Position du problème

Les équations différentielles sont des outils mathématiques importants et largement utilisés pour modéliser différents phénomènes d'évolutions en mécanique, chimie, informatique, etc. On appelle équation différentielle d'ordre n toute équation reliant une fonction $u(\cdot)$, dont la variable est t , et ses dérivées successives $\frac{d^k u}{dt^k}$ que l'on note également $u^{(k)}$, $1 \leq k \leq n$ (pour $k = 1$: $\dot{u}(\cdot) := \frac{du}{dt}(\cdot)$). Cette équation peut être mise sous la forme suivante

$$F(t, u, u', u^{(2)}, \dots, u^{(n)}) = 0.$$

On considère l'équation différentielle sur \mathbb{R} , à coefficients constants, suivante

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \beta u(t), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.1)$$

L'équation différentielle admet une seule solution sur \mathbb{R} donnée par $u(t) = e^{\beta t} u_0$. Maintenant, on passe à une dimension supérieure, en considérant le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad \text{avec } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est une matrice carrée et } u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Il est bien connu que la solution de (1.2) se donne par $u(t) := e^{tA} u_0$ où

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \text{ est la matrice exponentielle de } A.$$

Notons que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge vers une matrice que l'on note e^A (voir l'exemple 4.4 où A est un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach E). Selon les expressions des solutions obtenues ci-dessus concernant les équations différentielles (1.1) et (1.2), on peut formuler la solution dans une expression plus générale de la forme $u(t) = G(t)u_0$ où $(G(t))_{t \geq 0}$ est une famille d'opérateurs dépendant de t . De plus, on peut vérifier aisément que

$$G(0) = I \quad \text{et} \quad G(t+s) = G(t)G(s). \quad (I \text{ est l'application identité}). \quad (1.3)$$

En allant plus loin, on se met dans un espace de Banach E et on considère le problème, dit de *Cauchy abstrait*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in E. \end{cases} \quad (1.4)$$

où $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est un opérateur, souvent, non-borné et $D(A)$ est le domaine de A . La question est donc : Existe-il une famille d'opérateurs $(G(t))_{t \geq 0}$ vérifiant (1.3) telle que l'application $u(t) := G(t)u_0, t \geq 0$ soit une solution du problème abstrait (1.4).

.....

.....

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Opérateur linéaires bornés et non-bornés

Soient E et F deux espaces normés sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , munis respectivement des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. En l'absence de risque d'ambiguïté, on notera simplement $\|\cdot\|$ pour désigner indifféremment ces normes.

Soit $A : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire, c'est-à-dire vérifiant

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay, \quad \text{pour tous } x, y \in E \text{ et } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

L'opérateur A est dit continu ou borné si et seulement si

$$\exists c \geq 0 : \|Ax\| \leq c\|x\|, \forall x \in E.$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel de tous les opérateurs linéaires bornés de E dans F . Cet espace est muni de la norme

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \inf\{c \geq 0 : \|Ax\| \leq c\|x\|, \forall x \in E\}$$

On note également que $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)})$ est un espace de Banach. Lorsque $E = F$, on écrit simplement $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, F)$. De même, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, la norme $\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)}$ sera notée simplement $\|A\|$.

Le résultat suivant fournit plusieurs expressions équivalentes pour la norme d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(E, F)$:

$$\|A\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur linéaire, défini sur son domaine $D(A)$, qui est un **sous-espace vectoriel (a linear subspace)** de E . On dit que A est borné si Ax reste borné lorsque $x \in D(A)$, autrement dit, il existe une constante $c \geq 0$ telle que

$$\|Ax\| \leq c\|x\|, \quad \forall x \in D(A).$$

Dans le cas contraire, l'opérateur A est dit **non borné (unbounded)**. Dans certains ouvrages, tout opérateur A défini sur un domaine $D(A)$ strictement inclus dans E , c'est-à-dire $D(A) \subsetneq E$, est automatiquement qualifié de non borné. Toutefois, cette convention n'est pas adoptée par la grande majorité des spécialistes en théorie des opérateurs.

Il convient de souligner que, pour les opérateurs non bornés, le choix du domaine joue un rôle fondamental. À titre d'exemple, le fait qu'un opérateur est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe dépend fortement du domaine de cet opérateur. Cela explique l'importance de cette notion dans l'étude des semi-groupes et leurs relations avec les équations aux dérivées partielles d'évolution.

Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$, alors

- $\left(R(A) \text{ ou } \text{Im}(A) \right) := A(D(A)) = \{Ax, x \in D(A)\}$ est l'image (range) de A .
- $G(A) := \{(x, Ax), x \in D(A)\} \subset E \times F$ est graphe (graph) de A .
- $\ker(A) := \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ est le noyau (kernel or the nul-space) de A .
- A est dit fermé (closed) si son graphe est fermé dans $E \times F$, c'est-à-dire, pour toute suite $(x_n)_n \subset D(A)$ avec $x_n \rightarrow x \in E$ et $Ax_n \rightarrow y \in F$, on a $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Théorème 2.1 (Théorème Banach-Steinhaus).

Soient E et F deux espaces de Banach et soient $T_i \in \mathcal{L}(E, F), i \in I$ alors

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < +\infty, \forall x \in E \Rightarrow \sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E, F)} < +\infty.$$

Théorème 2.2.

Soient E et F deux espaces de Banach et soit A un opérateur linéaire continu, i.e., $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et bijectif de E dans F . Alors $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Théorème 2.3. Soient E un espace de Banach et $B \in \mathcal{L}(E)$. Si $\|B\| < 1$ alors $(I - B)$ est inversible et $(I - B)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.

2.2 Quelques problèmes d'évolution classiques

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert de frontière $\Gamma = \partial\Omega$. On pose $\Sigma := \Gamma \times]0, +\infty[$, alors Σ est la frontière latérale du cylindre $\Omega \times]0, +\infty[$. Avant d'aller plus, on commence tout d'abord par rappeler quelques définition et notations que l'on utilise tout au long de cette partie. On considère une fonction à plusieurs variables

$$f : \quad \Omega \quad \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, \dots, x_n),$$

la variable x s'appelle la variable spatiale ou la variable de l'espace.

- L'opérateur gradient de f est défini par

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T.$$

où, le symbol T désigne le transposé sur vecteur.

- Soit g la fonction définie sur Ω par

$$g : \quad \Omega \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^N \\ x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)),$$

alors, l'opérateur divergence (ou la divergence), noté div , est défini par

$$\text{div}(g) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial g_n}{\partial x_n}.$$

- On définit également le Laplacien de f (ou l'opérateur Laplacien), noté Δf comme suit

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \text{div}(\nabla f(x)).$$

- Soit $u : \Omega \ni x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto u(x) \in \mathbb{R}$, une équation aux dérivées partielles, EDP en abrégé,

est une relation de la forme

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^3}, \dots\right) = 0. \quad (2.1)$$

L'ordre d'une EDP est le plus grand degré de dérivation présent dans cette équation, i.e., l'ordre le plus élevé des dérivées partielles qui apparaissent dans l'équation (2.1). Par exemple : l'équation $\Delta u(x) = f(x)$ est d'ordre 2, tandis que l'équation $2\frac{\partial u}{\partial x_1} - 3\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$ est du premier ordre.

- Classification des EDP : les EDP linéaires de second ordre, dont la fonction inconnue est de deux variables $u(x_1, x_2)$, se décomposent en trois grandes catégories, EDP elliptiques, EDP parabolique et EDP hyperboliques. Une telle EDP a la forme

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta\frac{\partial u}{\partial x_2} + \gamma u = g \quad (2.2)$$

Alors, l'EDP (2.2) est dite

- (\diamond) elliptique si $b^2 - 4ac < 0$,
- (\diamond) parabolique si $b^2 - 4ac = 0$,
- (\diamond) hyperbolique si $b^2 - 4ac > 0$.

2.2.1 Équation de la chaleur ou de diffusion (heat equation)

On considère le problème suivant :

Problème 1. Trouver une fonction $u : (x, t) : \Omega \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[; \quad (2.3a)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0, +\infty[; \quad (2.3b)$$

$$u(x, 0) =: u_0(x) \quad \text{dans } \Omega; \quad (2.3c)$$

Le **Problème 1** est une équation aux dérivées partielles d'ordre 2. Plus précisément, il est du premier ordre par rapport à la variable temporelle t et du second ordre par rapport à la variable spatiale $x \in \Omega$, de plus, il appartient à la classe des équations *paraboliques*.

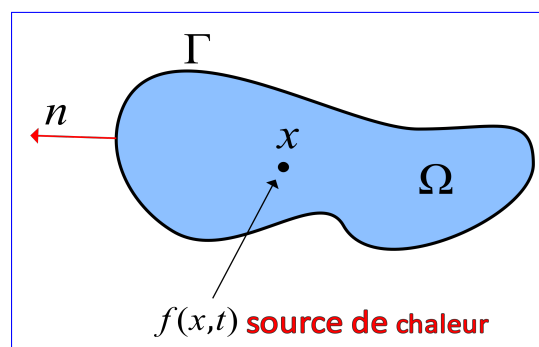


Figure 2.1 –

L'équation (2.3a) s'appelle *l'équation de la chaleur* parce qu'elle modélise le distribution de la température u dans un domaine Ω au cours du temps t . La fonction inconnue $u(x, t)$ représente la température au point $x \in \Omega$ à l'instant $t \geq 0$. Le terme Δu décrit les effets de diffusion thermique, tandis que la fonction donnée $f(x, t)$ représente une source de la chaleur. À titre d'exemple, lorsque la dimension spatiale est $n = 1$, le domaine Ω peut représenter une barre métallique, et l'équation décrit la propagation de la chaleur le long de cette barre sous l'effet d'une source thermique $f(x, t)$. Il convient de souligner que l'équation (2.3a) ne se limite pas à la modélisation des phénomènes thermiques. Elle apparaît, avec

diverses variantes, dans de nombreux problèmes de diffusion, tels que la diffusion d'une concentration, d'une densité ou encore d'une probabilité à travers un milieu. Pour cette raison, elle constitue un prototype central dans les phénomènes de diffusion.

L'équation (2.3b) est appelée *condition aux limites* (ou condition au bord) : elle décrit le comportement de la solution sur la frontière Γ du domaine Ω . L'équation (2.3c) décrit l'état initial de la température dans le domaine et est appelée *condition initiale*.

Le choix de la condition aux limites dépend du contexte physique considéré. Dans le cas de (2.3b), on impose une condition aux limites de type *Dirichlet homogène*, qui correspond, dans l'interprétation thermique, à une température nulle sur le bord du domaine. Cette condition peut être remplacée par d'autres types de conditions aux limites. En particulier, on peut considérer une condition de *Neumann homogène*, donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, t) = \nabla u(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) = 0, \quad \forall x \in \Gamma, \forall t \geq 0,$$

où $\mathbf{n}(x)$ désigne le vecteur normal unitaire sortant à la frontière Γ . Une telle condition exprime l'absence de flux de chaleur à travers le bord, autrement dit un système thermiquement isolé (isolation parfaite). Entre ces deux situations extrêmes, on rencontre également des conditions aux limites de type *Robin*, qui combinent les conditions de Dirichlet et de Neumann, et qui s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, t) + \alpha u(x, t) = 0, \quad \forall x \in \Gamma, \forall t \geq 0,$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre donné.

2.2.2 Équation des ondes (wave equation)

Les équations des ondes modélisent des phénomènes de propagation d'ondes ou de vibrations, tels que les ondes sonores, les ondes électromagnétiques ou encore les vibrations mécaniques. Elles constituent un autre prototype fondamental des équations aux dérivées partielles d'évolution :

Problème 2. Trouver une fonction $u : (x, t) : \Omega \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[; \quad (2.4a)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0, +\infty[; \quad (2.4b)$$

$$u(x, 0) =: u_0(x) \quad \text{dans } \Omega; \quad (2.4c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) =: u_1(x) \quad \text{dans } \Omega; \quad (2.4d)$$

Le **Problème 2** est une équation aux dérivées partielles hyperbolique du second ordre par rapport à la variable temporelle (et la variable spatiale). Par conséquent, sa résolution nécessite la définition de deux conditions initiales, données par (2.4c) et (2.4d), correspondant respectivement à la position initiale et à la vitesse initiale du système.

Dans le cas de la dimension spatiale $n = 2$, l'équation des ondes décrit le mouvement d'une membrane élastique tendue. En dimension $n = 1$, le modèle se réduit à celui de la *corde vibrante*. Au repos, la membrane occupe un domaine plan Ω . Sous l'action d'une force extérieure normale $f(x, t)$, elle se déforme, et son déplacement normal est décrit par la fonction $u(x, t)$. La condition aux limites (2.4b) exprime que la membrane (ou la corde) est fixée sur son bord $\Gamma = \partial\Omega$. Les conditions initiales (2.4c) et (2.4d) représentent respectivement le déplacement initial $u_0(\cdot)$ et la vitesse initiale $u_1(\cdot)$, et déterminent complètement l'état initial du système.

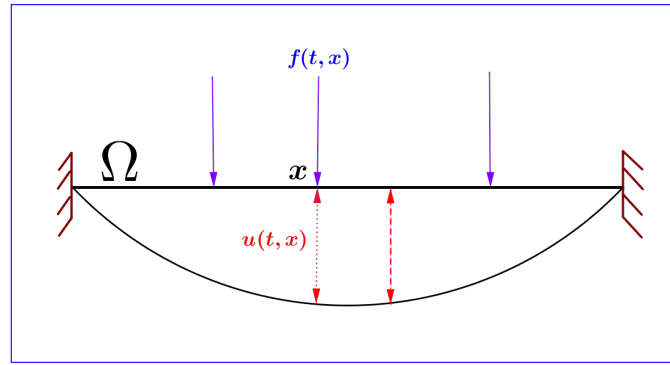


Figure 2.2 –

2.2.3 Équation de Schrödinger

En mécanique quantique, l'état d'une particule ponctuelle, telle qu'un électron, est décrit par une *fonction d'onde* $u(x, t)$. Cette fonction d'onde est l'un des concepts clés en mécanique quantique : elle contient toute l'information sur l'état du système quantique. Contrairement à la mécanique classique où l'évolution d'un objet est décrite par une trajectoire déterministe, les systèmes quantiques sont caractérisés par des *probabilités de présence*, représentées par la fonction d'onde.

L'évolution temporelle de $u(x, t)$ est gouvernée par l'équation de Schrödinger, qui constitue l'une des équations d'évolution les plus importantes en mécanique quantique. Cette équation peut être formulée sous différentes formes selon le contexte physique et les unités choisies. Dans sa forme la plus simple, elle s'écrit

Problème 3. Trouver une fonction $u : (x, t) : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$i \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \Delta u(x, t) - V(x)u(x, t) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[; \quad (2.5a)$$

$$u(x, 0) =: u_0(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^n; \quad (2.5b)$$

où $i = \sqrt{-1}$ et $V(x)$ représente le potentiel extérieur agissant sur la particule. Du point de vue des EDP, l'équation de Schrödinger est une EDP d'ordre 1 en temps et du second ordre en espace. La fonction d'onde u est à valeurs complexes. Son module au carré, $|u(x, t)|^2$, s'interprète comme la densité de probabilité de présence de la particule au point x à l'instant t . Cette interprétation probabiliste constitue une différence fondamentale avec les modèles issus de la mécanique classique.

2.3 Autres résultats et définitions

Définition 2.4. Soit Ω un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^N . L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \dots, N \right\},$$

où les dérivées partielles $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ sont prises au sens des distributions. L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ ou simplement $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1, \Omega}$, défini par

$$\langle u, v \rangle_{1, \Omega} = \int_{\Omega} \left(u(x)v(x) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right) dx = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)},$$

et de la norme correspondante

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \stackrel{\text{ou}}{=} \|v\|_{1,\Omega} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{1,\Omega}} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

L'espace $(H^1(\Omega); \langle u, v \rangle_{1,\Omega})$ est un espace de Hilbert. On définit également l'espace

$$H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = \{v \in H^1(\Omega) : \exists (v_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega) : v_n \rightarrow v \text{ dans } H^1(\Omega)\},$$

où $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Ω . Rappelons que la convergence $v_n \rightarrow v$ dans $H^1(\Omega)$ signifie

$$v_n \rightarrow v \text{ dans } L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ dans } L^2(\Omega), i = 1, \dots, N.$$

Lemme 2.5.

Soient $a(\cdot), b(\cdot) : [T_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonction Lebesgue intégrables avec $b(t) \geq 0$ pour presque tout (p.p) $t \in [T_0, T]$. Soit $\zeta : [T_0, T] \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction absolument continue telle que

$$(1 - \alpha)\dot{\zeta}(t) \leq a(t)\zeta(t) + b(t)\zeta^\alpha(t), \text{ p.p. } t \in [T_0, T],$$

où $0 \leq \alpha < 1$. Alors, pour tout $t \in [T_0, T]$

$$\zeta^{1-\alpha}(t) \leq \zeta^{1-\alpha}(T_0) \exp\left(\int_{T_0}^t a(\sigma) d\sigma\right) + \int_{T_0}^t b(s) \exp\left(\int_s^t a(\sigma) d\sigma\right) ds.$$

Lemme 2.6. [9] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $f : [a, b] \rightarrow X$ une fonction continue à valeurs dans un espace de Banach X . Soit A un opérateur fermé dans X . Supposons que $f(s) \in D(A)$ pour tout $s \in [a, b]$ et que l'application $s \mapsto Af(s)$ de $[a, b]$ dans X soit continue. Alors,

$$A\left(\int_a^b f(s) ds\right) = \int_a^b Af(s) ds.$$

Lemme 2.7. ([13])

Soient $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$. Posons

$$T_h f(t) := \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s) ds, \text{ pour tous } t \in \mathbb{R}, h \neq 0.$$

Alors, $T_h f \in L^p(\mathbb{R}, X) \cap C_b(\mathbb{R}, X)$ et $T_h f \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R}, X)$ pour presque tout $h \rightarrow 0$.

Lemme 2.8. ([7, 9])

Soit $f \in \mathcal{C}([0, +\infty[; E)$, alors pour tout $t \in [0, +\infty[$ (si $t = 0$, alors $h \downarrow 0$)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s) ds = f(t).$$

Chapitre 3

Opérateurs m -dissipatifs

Définition 3.1. Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est dit dissipatif si

$$\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|, \text{ pour tout } x \in D(A) \text{ et tout } \lambda > 0.$$

Cette terminologie trouve son origine en mécanique où les forces dissipatives sont celles qui n'augmentent pas l'énergie du système. Lorsque $-A$ est dissipatif, on dit que A est accréatif.

Une caractérisation très importante des opérateurs dissipatifs est donné dans la remarque suivante.

Remarque 3.2. [17] Soit E^* le dual topologique de E et soit l'application de dualité

$$J(x) := \{x^* \in E^* : \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\} \neq \emptyset, \text{ pour tout } x \in E. \quad (3.1)$$

Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est dit dissipatif si pour tout $x \in D(A)$, il existe $x^* \in J(x)$ tel que

$$\operatorname{Re}(\langle x^*, Ax \rangle) \leq 0.$$

Définition 3.3. Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est dit m -dissipatif si

(Θ_1) A est dissipatif;

(Θ_2)

$$\forall f \in E, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A) : \lambda x - Ax = f.$$

La propriété (Θ_2) est équivalente au fait que

$$R(\lambda I - A) = E, \quad \forall \lambda > 0,$$

ce qui signifie que, pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda I - A$ est surjectif.

Théorème 3.4. [6] Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire alors

$$A \text{ est } m\text{-dissipatif} \Leftrightarrow A \text{ est dissipatif et il existe } \lambda_0 > 0 \text{ tel que } R(\lambda_0 I - A) = E.$$

Démonstration. Exercice. ■

Exemple 3.5. ([6])

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ l'espace de fonctions continues muni de la norme (de convergence uniforme)

$$\|x\|_E = \|x\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)|.$$

Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ l'opérateur défini sur

$$D(A) = \{x \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R}) : x(0) = 0\},$$

par $Ax = -\dot{u} = -\frac{d}{dt}u$ pour tout $x \in D(A)$. Alors A est m -dissipatif.

Le théorème suivant énonce quelques propriétés fondamentales de la résolvante d'un opérateur A , une application qui jouera un rôle crucial dans le résultat fondamental de Hille-Yosida.

Théorème 3.6. Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur m -dissipatif. Alors, pour tout $\lambda > 0$ l'opérateur $\lambda I - A : D(A) \rightarrow E$ est bijectif et admet une application inverse, notée $\mathcal{R}(\lambda, A)$, définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\lambda, A) : E &\longrightarrow D(A) \subset E \\ x &\longmapsto \mathcal{R}(\lambda, A)x = (\lambda I - A)^{-1}x. \end{aligned}$$

L'application $\mathcal{R}(\lambda, A)$ est appelée la résolvante de A . De plus, on a

$$\mathcal{R}(\lambda, A) \in \mathcal{L}(E) \quad \text{et} \quad \|\mathcal{R}(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{\lambda}. \quad (3.2)$$

Démonstration. Soient $\lambda > 0$ et $f \in E$. Comme l'opérateur A est m -dissipatif, la propriété (Θ_2) implique qu'il existe au moins un élément $x = x_f \in D(A)$ tel que

$$\lambda x - Ax = f.$$

Autrement dit, l'équation $(\lambda I - A)x = f$ admet au moins une solution dans $D(A)$. Montrons maintenant l'unicité de cette solution. Supposons que $x, y \in D(A)$ soient deux solutions de l'équation, c'est-à-dire

$$\lambda x - Ax = \lambda y - Ay = f.$$

En soustrayant, on obtient

$$\lambda(x - y) - A(x - y) = 0,$$

avec $x - y \in D(A)$, puisque $D(A)$ est un sous-espace vectoriel de E . Comme A est dissipatif, il vient

$$0 = \|\lambda(x - y) - A(x - y)\| \geq \lambda\|x - y\|,$$

d'où $\|x - y\| = 0$, et par conséquent $x = y$. L'unicité de la solution est ainsi établie. On en déduit que l'opérateur $\lambda I - A : D(A) \rightarrow E$ est bijectif et on inverse $\mathcal{R}(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$ est bien défini de E dans E , ou plus précisément dans $D(A)$. Montrons que $\mathcal{R}(\lambda, A)$ est linéaire. Soient $f, g \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ alors

$$\exists! x, y \in D(A) : \mathcal{R}(\lambda, A)f = x \text{ et } \mathcal{R}(\lambda, A)g = y, \quad (3.3)$$

c'est-à-dire $(\lambda I - A)x = f$ et $(\lambda I - A)y = g$. Par la linéarité de A , on a

$$(\lambda I - A)(\alpha x + \beta y) = \alpha f + \beta g,$$

alors

$$\mathcal{R}(\lambda, A)(\alpha f + \beta g) = \mathcal{R}(\lambda, A)(\lambda I - A)(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y \stackrel{(3.3)}{=} \alpha \mathcal{R}(\lambda, A)f + \beta \mathcal{R}(\lambda, A)g,$$

donc, $\mathcal{R}(\lambda, A)$ est linéaire. Enfin, montrons que $\mathcal{R}(\lambda, A)$ est borné. Soit $f \in E$, alors il existe un seul $x \in D(A)$ tel que $\mathcal{R}(\lambda, A)f = x$, ce qu'est équivalent à dire que $(\lambda I - A)x = f$. Comme A est dissipatif, il résulte que

$$\lambda\|\mathcal{R}(\lambda, A)f\| = \lambda\|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\| = \|f\|,$$

alors $\|\mathcal{R}(\lambda, A)f\| \leq (1/\lambda)\|f\|$ pour tout $f \in E$. Cela montre que $\mathcal{R}(\lambda, A)$ est borné, de plus

$$\|\mathcal{R}(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E)} = \max_{\|f\| \leq 1} \|\mathcal{R}(\lambda, A)f\| \leq \frac{1}{\lambda} \max_{\|f\| \leq 1} \|f\| = \frac{1}{\lambda}.$$

Proposition 3.7. Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur m -dissipatif. Alors A est fermé. ■

Démonstration. Soit $(x_n)_n \subset D(A)$ avec $x_n \rightarrow x \in E$ et $Ax_n \rightarrow y \in E$. On doit démontrer que $x \in D(A)$ et $Ax = y$. Comme A est m -dissipatif, il résulte du Théorème 3.6 que $\lambda I - A : D(A) \rightarrow E$ est bijectif pour tout $\lambda > 0$ et $\mathcal{R}(\lambda, A) \in \mathcal{L}(E)$ avec $\mathcal{R}(\lambda, A) : E \rightarrow D(E)$. Alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{R}(\lambda, A)(\lambda I - A)x_n \\ \Rightarrow x &= \mathcal{R}(\lambda, A)(\lambda x - y) \in D(A) \\ \Rightarrow \lambda x - Ax &= \lambda x - y \Rightarrow Ax = y \end{aligned}$$

donc, A est fermé. ■

On dispose également du résultat suivant, que l'on peut trouver par exemple dans [3, Proposition 29.1.2].

Proposition 3.8.

Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur fermé et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si l'opérateur $\lambda I - A$ est bijectif de $D(A)$ sur E , alors $\mathcal{R}(\lambda, A) \in \mathcal{L}(E)$.

Remarque 3.9. La Proposition 3.8 montre que l'inclusion $\mathcal{R}(\lambda, A) \in \mathcal{L}(E)$ découle simplement de la fermeture de A (via le théorème du graphe fermé), une condition plus faible que la m -dissipativité de A selon la Proposition 3.7.

Remarque 3.10. Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur m -dissipatif. Alors, l'espace $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ est un espace de Banach où

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{D(A)} : D(A) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \|x\|_{D(A)} := \|x\| + \|Ax\|. \end{aligned}$$

De plus, $A|_{D(A)} \in \mathcal{L}(D(A), E)$ où $D(A)$ est muni de la norme $\|\cdot\|_{D(A)}$ et $A|_{D(A)}$ est la restriction de A à son domaine $D(A)$.

On termine cette section par établir une relation entre la dissipativité d'un opérateur A et celle de son opérateur adjoint A^* . Tout d'abord, si $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est un opérateur non-borné à domaine dense, c-à-d, $\overline{D(A)} = E$, on appelle *opérateur adjoint* de A l'opérateur linéaire $A^* : D(A^*) \subset E^* \rightarrow E^*$ défini sur le domaine

$$D(A^*) = \{v \in E^*, \exists c \geq 0 : |\langle v, Au \rangle| \leq c\|u\|, \forall u \in D(A)\}$$

et vérifie

$$\langle A^*v, u \rangle_{E^*, E} = \langle v, Au \rangle_{E^*, E}, \quad \forall v \in D(A^*), \forall u \in D(A).$$

Lemme 3.11. ([4]) Soit $B : D(B) \subset E \rightarrow E$ un opérateur non-borné fermé tel que $\overline{D(B)} = E$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) $R(B)$ est fermé ;
- (ii) $R(B^*)$ est fermé ;
- (iii) $R(B) = \ker(B^*)^\perp$;
- (iv) $R(B^*) = \ker(B)^\perp$ où, pour tout sous-espace vectoriel $M \subset E$, l'ensemble

$$M^\perp := \{v \in E^* : \langle v, x \rangle = 0, \forall x \in M\}$$

est l'orthogonal de M . De plus, on a la relation $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

Théorème 3.12. *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur dissipatif tel que $\overline{D(A)} = E$. Si A est fermé et A^* est dissipatif alors A est m -dissipatif.*

Démonstration. Posons $B := I - A$. Alors, $D(B) = D(A)$. De plus, comme A est fermé et à domaine dense, il en est de même pour B . Afin de démontrer que A est m -dissipatif, d'après le Théorème 3.4, il suffit d'établir que $R(B) = E$, c'est-à-dire que B est surjectif. Pour cela, nous procédons en deux étapes. premièrement, nous montrons que l'image $R(B)$ est fermée. D'après le Lemme 3.11, cela est équivalent à

$$R(B) = \ker(B^*)^\perp.$$

Deuxièmement, on montre que $\ker(B^*)^\perp = \{0\}^\perp = E$, ce qui implique immédiatement que $R(B) = E$, et donc que B est surjectif. Commençons par démontrer que l'image $R(B)$ est fermée. Soit $(f_n)_n \subset R(B)$ une suite telle que $f_n \rightarrow f$ dans E . Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, comme $f_p, f_q \in R(B)$, il existe $x_p, x_q \in D(B) = D(A)$ vérifiant

$$Bx_p = f_p \quad \text{et} \quad Bx_q = f_q.$$

Par la linéarité de B , on obtient

$$B(x_p - x_q) = (I - A)(x_p - x_q) = f_p - f_q.$$

Comme l'opérateur A est dissipatif, il s'ensuit que

$$\|x_p - x_q\| \leq \|B(x_p - x_q)\| = \|f_p - f_q\|.$$

La convergence de la suite $(f_n)_n$ implique qu'elle est de Cauchy dans E , et par conséquent, la suite $(x_n)_n$ est également de Cauchy dans l'espace de Banach E . Ainsi, il existe $x \in E = \overline{D(A)}$ tel que $x_n \rightarrow x$ dans E . On a

$$Bx_n = f_n \Rightarrow Ax_n = x_n - f_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n = x - f.$$

Comme A est fermé et $x_n \rightarrow x$ alors

$$\begin{aligned} Ax &= x - f \text{ et } x \in D(A) \\ \Rightarrow x - Ax &= f = B(x) \Rightarrow f \in R(B), \end{aligned}$$

ce qui traduit la fermeture de l'image $R(B)$ dans E . En tenant compte du Lemme 3.11, on déduit que

$$R(B) = (\ker(B^*))^\perp = (\ker(I - A^*))^\perp.$$

La dissipativité de A^* implique son injectivité (voir la preuve du Théorème 3.6) et par suite l'injectivité de B^* . Autrement dit $\ker(B^*) = \{0\}$. Il en résulte que $R(B) = \{0\}^\perp = E$, ce qui conclut la preuve. ■

3.1 Opérateurs m -dissipatifs dans un espace de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$. Dans ce cadre, il est bien connu que l'application de dualité J , définie par (3.1), coïncide avec l'application identité (voir [18]), c'est-à-dire

$$J(x) = x, \quad \text{pour tout } x \in H.$$

Par conséquent, d'après la Remarque 3.2, la notion de dissipativité se simplifie via la caractérisation suivante.

Définition 3.13. *Un opérateur (linéaire) $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ est dissipatif si et seulement si*

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x \rangle \leq 0 \text{ pour tout } x \in D(A). \quad (3.4)$$

Démonstration. Nous montrons que la condition (3.4) est équivalente à la définition de la dissipativité donnée dans la définition 3.1. Supposons que A est dissipatif. Alors, pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in D(A)$, on a

$$\begin{aligned} \|\lambda x - Ax\|^2 &\geq \lambda^2 \|x\|^2 \\ \Rightarrow \lambda^2 \|x\|^2 + \|Ax\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle Ax, \lambda x \rangle &\geq \lambda^2 \|x\|^2 \\ \Rightarrow \operatorname{Re}\langle Ax, x \rangle &\leq \frac{1}{2\lambda} \|Ax\|^2, \text{ pour tout } \lambda > 0. \end{aligned}$$

En faisant tendre λ vers $+\infty$, on obtient $\operatorname{Re}\langle Ax, x \rangle \leq 0$, pour tout $x \in D(A)$. Réciproquement, supposons que la condition (3.4) soit satisfaite. Alors, pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in D(A)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$\begin{aligned} \|\lambda x - Ax\| \|x\| &\geq |\langle \lambda x - Ax, x \rangle| = \left(\operatorname{Re}^2(\langle \lambda x - Ax, x \rangle) + \operatorname{Im}^2(\langle \lambda x - Ax, x \rangle) \right)^{1/2} \\ &\geq \operatorname{Re}(\langle \lambda x - Ax, x \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \|x\|^2 - \langle Ax, x \rangle) \\ &= \lambda \|x\|^2 - \underbrace{\operatorname{Re}\langle Ax, x \rangle}_{\leq 0} \geq \lambda \|x\|^2. \end{aligned}$$

Cela montre que l'opérateur A est dissipatif au sens de la définition 3.1. ■

Exemple 3.14.

Soient $H = L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ et $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ l'opérateur défini sur $D(A)$ par $Ax = \dot{x}$ tel que

$$D(A) := \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) = \{x(\cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : x \text{ à support compact}\}.$$

Alors A est dissipatif. Rappelons d'abord que l'espace $H = L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(t) \overline{v(t)} dt, \text{ pour tous } u, v \in H.$$

Soit $u \in D(A)$. Comme u est à support compact, il existe un compact $K \subset \mathbb{R}$ tel que $u(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus K$. En particulier, les termes de bord s'annulent, ce qui permet d'utiliser une intégration par parties comme suit

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle &= \int_{\mathbb{R}} Au(t) \overline{u(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} \dot{u}(t) \overline{u(t)} dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} u(t) \dot{\overline{u(t)}} dt \\ &= -\langle u, Au \rangle = -\overline{\langle Au, u \rangle}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le nombre $\langle Au, u \rangle$ est purement imaginaire, c-à-d, $\langle Au, u \rangle \in i\mathbb{R}$. En particulier $\operatorname{Re}\langle Au, u \rangle = 0$, ce qui montre que A est dissipatif.

Théorème 3.15. Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur m -dissipatif dans un espace de Hilbert H . Alors le domaine $D(A)$ est dense dans H .

Dans la démonstration on utilisera un critère classique de densité dans les espaces de Hilbert donné dans le lemme suivant

Lemme 3.16. Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et V un sous-espace vectoriel de H . Alors

$$V \text{ est dense dans } H \Leftrightarrow V^\perp := \{z \in H : \langle z, x \rangle = 0, \forall x \in V\} = \{0\}. \quad (3.5)$$

Démonstration. Comme $D(A)$ est un sous-espace vectoriel de H , il suffit, d'après le Lemme 3.16, de

montrer que

$$D(A)^\perp = \{0\}.$$

Soit $z \in D(A)^\perp \subset E$. Puisque l'opérateur A est m -dissipatif alors $I - A$ est surjectif, c'est-à-dire $R(I - A) = H$. Il existe donc un seul élément $v_z \in D(A)$ tel que $v_z := (I - A)^{-1}(z) \in D(A)$ grâce au Théorème 3.6. Il en résulte que $\langle z, v_z \rangle = 0$, autrement dit $\langle (I - A)v_z, v_z \rangle = 0$. Donc

$$\langle Av_z, v_z \rangle = \|v_z\|^2 \in \mathbb{R}_+, \text{ avec } v_z \in D(A),$$

en combinant la dernière égalité avec la dissipativité de A , on obtient

$$0 \leq \operatorname{Re}\langle Av_z, v_z \rangle = \langle Av_z, v_z \rangle \leq 0,$$

alors $\|v_z\|^2 = \langle Av_z, v_z \rangle = 0$ et par suite $v_z = (I - A)^{-1}(z) = 0$. Enfin, comme $(I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné, on en déduit $z = 0$ pour tout $z \in D(A)^\perp$. D'où $D(A)^\perp = \{0\}$. ■

Remarque 3.17.

Théorème 3.15 reste valable dans tout espace de Banach réflexif. La démonstration repose sur une caractérisation fondamentale de la réflexivité : un espace de Banach X est réflexif si et seulement si sa boule unité fermée est compacte pour la topologie faible. Cette propriété de compacité faible permet de remplacer, dans le cadre banachique, les arguments d'orthogonalité liés aux espaces de Hilbert par des techniques de dualité (espace dual) et de convergence faible.

On termine cette section par le résultat suivant

Théorème 3.18. Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur dissipatif à domaine dense dans un espace de Hilbert H . Alors

$$A \text{ est } m\text{-dissipatif} \Leftrightarrow A \text{ est fermé et } A^* \text{ est dissipatif.}$$

Démonstration. D'après le Théorème 3.12, il suffit de démontrer la condition nécessaire. On suppose que A est m -dissipatif. Il découle de la Proposition 3.7 que A est fermé. Reste à démontrer que A^* est dissipatif. Comme le dual topologique de l'espace de Hilbert H s'identifie à H alors $A^* : D(A^*) \subset H \rightarrow H$ tel que pour tout $z \in D(A^*)$

$$\langle A^*z, v \rangle = \langle z, Av \rangle, \quad \text{pour tout } v \in D(A).$$

Montrons alors que $\operatorname{Re}\langle A^*y, y \rangle \leq 0$ pour tout $y \in D(A^*)$. Soit $y \in D(A^*)$ alors

$$\begin{aligned} \langle A^*y, \lambda(\lambda I - A)^{-1}y \rangle &= \langle y, \lambda \mathcal{R}(\lambda, A)y \rangle \\ &= \langle y, \lambda(A - \lambda I)\mathcal{R}(\lambda, A)y + \lambda^2 \mathcal{R}(\lambda, A)y \rangle \\ &= \langle y, -\lambda y + \lambda^2 \mathcal{R}(\lambda, A)y \rangle \\ &= \lambda^2 \langle y, \mathcal{R}(\lambda, A)y \rangle - \lambda \|y\|^2 \\ &\leq \lambda^2 \|y\|^2 \cdot \|\mathcal{R}(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(H)} - \lambda \|y\|^2. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (3.2) du Théorème 3.6, il vient

$$\langle A^*y, \lambda \mathcal{R}(\lambda, A)y \rangle \leq \lambda^2 \|y\|^2 \frac{1}{\lambda} - \lambda \|y\|^2 = 0, \text{ pour tout } \lambda > 0,$$

en passant à la limite quand $\lambda \rightarrow +\infty$ tout en utilisant la propriété

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{R}(\lambda, A)y = y,$$

on obtient

$$\langle A^*y, y \rangle \leq 0, \text{ pour tout } y \in D(A^*),$$

ce qui traduit la dissipativité de A^* . ■

3.2 Exercices

Exercice 1

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ l'espace de fonctions continues muni de la norme (de convergence uniforme)

$$\|u\|_E = \|u\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |u(t)|.$$

Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ l'opérateur défini sur

$$D(A) = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R}) : u(0) = 0\},$$

par $Au = -\dot{u}$ pour tout $u \in D(A)$. Montrer que A est m -dissipatif et

$$\overline{D(A)} = \{u \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}) : u(0) = 0\}.$$

Que peut-on déduire ?

Corrigé 1

On commence par établir la surjectivité de l'opérateur $\lambda I - A : D(A) \subset E \rightarrow E$ pour tout $\lambda > 0$, c'est-à-dire montrer que $R(\lambda I - A) = E$. D'après la définition de l'opérateur A , cela revient à prouver que, pour toute fonction donnée $f \in E$ l'équation différentielle

$$\dot{u}(t) + \lambda u(t) = f(t), \quad t \in [0, 1], \quad u(0) = 0, \quad (3.6)$$

admet une solution $u \in D(A)$. Considérons la fonction $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$u(t) = \int_0^t e^{\lambda(s-t)} f(s) ds, \quad (3.7)$$

On va montrer que cette fonction est la seule solution de l'équation (3.6). Pour tout $t \in [0, 1]$

$$\dot{u}(t) = \frac{d}{dt} u(t) = -\lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} f(s) ds + e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t e^{\lambda s} f(s) ds \right), \quad (3.8)$$

Montrons maintenant que

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^t e^{\lambda s} f(s) ds \right) = e^{\lambda t} f(t). \quad (3.9)$$

Puisque la fonction $s \mapsto e^{\lambda s} f(s)$ est continue sur $[0, 1]$, il découle du théorème de différentiation de Lebesgue (voir Lemme 2.8) que

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^t e^{\lambda s} f(s) ds \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{\lambda s} f(s) ds = e^{\lambda t} f(t).$$

On peut également utiliser le fait que la fonction $t \mapsto \int_0^t e^{\lambda s} f(s) ds$ est absolument continue car la fonction $s \mapsto e^{\lambda s} f(s)$ est intégrable sur $[0, 1]$, et cela conduit au même résultat (pour presque tout

$t \in [0, 1]$). En revenant à l'égalité (3.8), on obtient

$$\dot{u}(t) = -\lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} f(s) ds + e^{-\lambda t} e^{\lambda t} f(t) = -\lambda u(t) + f(t),$$

ce qui montre bien que la fonction u définie par (3.7) est une solution de (3.6). En ce qui concerne l'unicité, elle découle directement du Théorème de Cauchy-Lipschitz. En effet, l'équation (3.6) peut s'écrire sous la forme

$$\dot{u}(t) = g(t, u(t)), u(0) = 0, \quad \text{avec} \quad g(t, x) = f(t) - \lambda x, \quad \text{pour tout } (t, x) \in \mathbb{R}.$$

On observe que la fonction g est continue par rapport au temps et λ -Lipschitzienne par rapport à l'état. On peut également démontrer l'unicité directement en considérant deux solutions $u_1, u_2 \in D(A)$. Alors

$$\frac{d}{dt} |(u_1 - u_2)(t)| \leq \left| \frac{d}{dt} (u_1 - u_2)(t) \right| = \lambda |(u_1 - u_2)(t)|,$$

en invoquant le lemme de Gronwall, énoncé dans le Lemme gronwall-lemma, on obtient

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq |u_1(0) - u_2(0)| e^{\lambda t}, \quad \text{pour tout } t \in [0, 1],$$

Comme $u_1(0) = u_2(0)$, on en déduit que $u_1 = u_2$.

Passons maintenant à la dissipativité de A . Soient $u \in D(A)$, $\lambda > 0$ et soit $f = (\lambda I - A)u$. D'après ce qui précède, pour tout $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \lambda |u(t)| &\leq \lambda \int_0^t e^{\lambda(s-t)} |f(s)| ds \leq \lambda e^{-\lambda t} \sup_{r \in [0,1]} |f(r)| \int_0^t e^{\lambda s} ds \\ &= e^{-\lambda t} \|f\|_{\infty} (e^{\lambda t} - 1) \leq (e^{\lambda t} - 1) \|f\|_{\mathbb{E}}, \quad \forall t \in [0, 1] \\ &\Rightarrow \lambda \sup_{t \in [0,1]} |u(t)| = \lambda \|u\|_{\mathbb{E}} \leq (e^{\lambda t} - 1) \|f\|_{\mathbb{E}} \leq \|f\|_{\mathbb{E}} = \|\lambda u - Au\|_{\mathbb{E}}, \end{aligned}$$

alors, A est dissipatif et par conséquent A est m -dissipatif. Notre objectif est à présent de montrer que

$$\overline{D(A)} = \{x \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}) : x(0) = 0\}. \quad (3.10)$$

Soit $u \in \overline{D(A)}$. Par définition de l'adhérence, il existe une suite $(u_n)_n \subset D(A)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0,1]} |u_n(t) - u(t)| = 0,$$

Comme $D(A) \subset \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ et que $u_n(0) = 0$ pour tout n , la convergence uniforme implique que $u \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} |u(0)| &\leq |u(0) - u_n(0)| + |u_n(0)|, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow |u(0)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |u(0) - u_n(0)| = |u(0) - u(0)| = 0 \end{aligned}$$

alors, $u(0) = 0$ et par suite la première inclusion est établie. Réciproquement, d'après le théorème de Stone-Weierstrass [19, Théorème 7.26], l'ensemble des polynômes définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} est dense dans $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ pour la norme de convergence uniforme. Comme cet ensemble de polynômes est inclus dans $\mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})$, il s'en suit que

$$\overline{\mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})} = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}),$$

puisque l'espace $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ est complet et par suite il est fermé.¹ Par conséquent, pour toute fonction

$$u \in \{x \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}) : x(0) = 0\},$$

il existe une suite $u_n \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})$ telle que

$$\|u - u_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ avec } u(0) = 0.$$

Comme $u_n(0)$ n'est pas nécessairement nulle, on définit la suite $v_n(t) := u_n(t) - u_n(0)$. Alors

$$v_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad v_n \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R}),$$

par suite $(v_n)_n \subset D(A)$. D'autre part

$$\begin{aligned} |v_n(t) - u(t)| &\leq |u_n(t) - u(t)| + |u_n(0)| \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - u\|_\infty &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (\|u_n - u\|_\infty + |u_n(0)|) = 0, \end{aligned}$$

puisque $|u_n(0)| \rightarrow 0$, en effet

$$|u_n(0)| \leq |u_n(0) - u(0)| + \underbrace{|u(0)|}_{=0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

L'égalité (4.20) est donc démontrée.

L'analyse précédente montrent que, malgré le caractère m -dissipatif de l'opérateur A , son domaine $D(A)$ n'est pas dense dans l'espace E . Plus précisément, on a

$$\overline{D(A)} = \{u \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}) : u(0) = 0\} \neq E = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}).$$

Par conséquent, ni le Théorème 3.15, qu'est valable dans les espaces de Hilbert, ni le résultat énoncé dans la Remarque 3.17, relatif aux espaces de Banach réflexifs, ne peuvent être appliqués ici. En effet, l'espace $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ n'est ni un espace de Hilbert ni un espace de Banach **réflexif**.

Exercice 2

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $E = L^2(\Omega; \mathbb{R})$. On définit l'opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ par

$$Au = \Delta u, \text{ pour tout } u \in D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in E\}.$$

Montrer que A est m -dissipatif sur E .

Remarque : Si Ω a une frontière bornée de classe \mathcal{C}^2 alors, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. (Voir [13, Remarque 2.6.3])

Corrigé 2

(•) Dissipativité de A

L'espace $E = L^2(\Omega; \mathbb{R})$ est un espace de Hilbert réel, on utilise le critère de dissipativité dans les espaces de Hilbert donné (3.4). Soit $u \in D(A)$ alors

$$\langle Au, u \rangle = \int_{\Omega} Au(x)u(x)dx = \int_{\Omega} \Delta u(x)u(x)dx,$$

1. Résultat : Toute sous-partie complète d'un espace métrique est fermée. Réciproquement tout fermé d'un espace complet est complet.

en appliquant la formule de Green, on obtient

$$\langle Au, u \rangle = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla u(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) u(x) dx.$$

Comme $u \in H_0^1(\Omega)$, on a $u|_{\partial\Omega} = 0$, et par conséquent le terme de bord est nul. Il s'ensuit que

$$\langle Au, u \rangle = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right)^2 dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right\|_{L^2}^2 dx = - \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \leq 0,$$

alors A est dissipatif.

(•) **Surjectivité de $I - A$** : on montre que $R(I - A) = E$, plus précisément

$$\forall f \in E, \exists u \in D(A) : u - \Delta u = f \quad \text{au sens de distributions.} \quad (3.11)$$

On introduit la formulation variationnelle du problème (3.11) : trouver $u \in D(A) \subset H_0^1(\Omega)$ tel que $u - \Delta u = f$ revient à chercher $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant (après avoir utilisé la formule de Green)

$$\int_{\Omega} u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Autrement dit, il s'agit de résoudre le problème variationnel suivant : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

où $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\ell : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par

$$a(u, v) := \int_{\Omega} u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad \ell(v) := \int_{\Omega} f v dx.$$

Application du théorème de Lax–Milgram

Il est clair que $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire et $\ell(\cdot)$ est linéaire. D'autre part, on a pour tous $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |u(x)| |v(x)| dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x)| \cdot |\nabla v(x)| dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

alors, $a(\cdot, \cdot)$ est continue. De plus

$$a(u, u) = \int_{\Omega} u^2(x) dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

donc, $a(\cdot, \cdot)$ est 1-coercive. On a aussi

$$|\ell(v)| \leq \int_{\Omega} |f(x)| |v(x)| dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

alors $\ell(\cdot)$ est continue.

Toutes les hypothèses du théorème de Lax–Milgram sont satisfaites, il existe un unique élément $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Autrement dit,

$$\int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Cette identité signifie que $u - \Delta u = f$ au sens des distributions dans Ω . De plus, comme $f \in L^2(\Omega)$, on a $\Delta u = f - u \in L^2(\Omega)$, et par conséquent

$$u \in D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

Ainsi, pour tout $f \in E$, il existe un unique $u \in D(A)$ tel que $(I - A)u = f$, ce qui démontre que

$$R(I - A) = E.$$

Chapitre 4

Étude des semi-groupes

4.1 Définitions et propriétés

Dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire, E désigne un espace de Banach réel ou complexe.

Définition 4.1. Une famille $(G(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés, c'est-à-dire $G(t) \in \mathcal{L}(E)$ pour tout $t \geq 0$, est dite un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés si elle vérifie les conditions suivantes

$$G(0) = I \quad (\text{l'identité dans } \mathcal{L}(E)) \quad (i)$$

$$G(t+s) = G(t)G(s), \forall t, s \geq 0. \quad (\text{propriété algébrique}). \quad (ii)$$

Si de plus

$$\lim_{t \downarrow 0} \|G(t)x - x\|_E = 0, \forall x \in E \quad (\text{propriété topologique}), \quad (iii)$$

alors on dit que $(G(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu ou encore un C_0 -semi-groupe. La condition (iii) exprime la continuité à droite en $t = 0$ de l'application $t \mapsto G(t)x, x \in E$. Nous verrons dans le Corollaire 4.9 que cette propriété implique en fait la continuité de la fonction $t \in [0, +\infty[\mapsto G(t)x$ pour tout $x \in E$, ce qui justifie la terminologie de C_0 -semi-groupe.

On dit également que $(G(t))_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{L}(E)$ est un groupe d'opérateurs linéaires continus si $G(0) = I$ et $G(t+s) = G(t)G(s)$ pour tous $t, s \in \mathbb{R}$ (s et t sont de signe quelconque). Si de plus

$$\lim_{t \rightarrow 0} G(t)x = x, \forall x \in E, \quad (4.1)$$

alors la famille $(G(t))_{t \geq 0}$ est appelée un groupe fortement continu.

Définition 4.2. Un semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés est dit uniformément continu si $\lim_{t \downarrow 0} G(t) = I$ dans $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire

$$\lim_{t \downarrow 0} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(E)} := \lim_{t \downarrow 0} \sup_{\|x\| \leq 1} \|G(t)x - x\|_E = 0. \quad (4.2)$$

Il s'ensuit que chaque semi-groupe uniformément continu est un C_0 -semi-groupe.

Lemme 4.3 (Théorème de Mertens pour le produit de Cauchy). ([19])

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites d'un espace de Banach E (ou un algèbre de Banach). Soit $(c_n)_n$ le produit de Cauchy de $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ défini par

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$$

On suppose que

- $\left(\sum_{n \geq 0} a_n\right)$ est absolument convergente, autrement dit, la série $\left(\sum_{n \geq 0} \|a_n\|\right)$ est convergente (la convergente absolue implique la converge simple)
- $\left(\sum_{n \geq 0} b_n\right)$ est convergente,

alors, la série $\left(\sum_{n \geq 0} c_n\right)$ est convergente et

$$\sum_{n \geq 0} c_n = \left(\sum_{n \geq 0} a_n\right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n\right)$$

Exemple 4.4.

Avant de présenter l'exemple, on montre que pour tout opérateur $A \in \mathcal{L}(E)$ et tous $t \geq 0$ et $x \in E$, la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} x,$$

est convergente dans E . Soient $n, p \in \mathbb{N}$ et soit $U_m (= U_m(t, x)) := \sum_{k=0}^m \frac{(tA)^k}{k!} x$, $m \in \mathbb{N}$ la suite des sommes partielles, alors

$$\|U_{n+p} - U_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(tA)^k}{k!} x \right\| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\|(tA)^k\|}{k!} \right) \|x\| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(t\|A\|)^k}{k!} \right) \|x\|. \quad (4.3)$$

On sait bien que, pour un réel α , la suite $V_m := \sum_{k=0}^m \frac{\alpha^k}{k!}$ est convergente et sa limite est e^α . Alors, $(V_m)_m$ est une suite de Cauchy. Il résulte alors de l'estimation (4.3) que la suite $(U_m)_m$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach E alors, elle converge dans E et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} U_m = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} x \in E.$$

D'autre part

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} x \right\| \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t\|A\|)^n}{n!} \right) \|x\| = e^{t\|A\|} \|x\|, \quad (4.4)$$

par conséquent, l'application :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} x,$$

est linéaire et bornée de E dans E , c'est-à-dire, elle appartient à $\mathcal{L}(E)$. On note cette application e^{tA} et on définit, pour tout $t \geq 0$, l'application $G(t) \in \mathcal{L}(E)$ par

$$G(t) := e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Alors, d'après (4.4)

$$\|G(t)x\| \leq e^{t\|A\|} \|x\|, \forall x \in E \quad \text{et} \quad \|G(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq e^{t\|A\|}. \quad (4.5)$$

Montrons maintenant que $(G(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu. Il est clair que $G(0) =$

$e^{0A} = I$, de plus, pour tous $t, s \geq 0$

$$\begin{aligned} G(t+s) &= e^{(t+s)A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA + sA)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k (tA)^{n-k} (sA)^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} (tA)^{n-k} (sA)^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \end{aligned}$$

avec

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k, \quad a_n = \frac{(tA)^n}{n!}, \quad b_n = \frac{(sA)^n}{n!}.$$

D'après l'analyse établie ci-dessus, il est clair que les deux séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ vérifient les conditions du Lemme 4.3 (la convergence absolue s'obtient directement de (4.4)) alors, la série $\sum_{n \geq 0} c_n$ est convergente et on a

$$G(t+s) = \sum_{n \geq 0} c_n = \left(\sum_{n \geq 0} a_n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n \right) = e^{tA} e^{sA} = G(t)G(s),$$

il vient que $(G(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe. Finalement, pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(E)} &= \|e^{tA} - I\|_{\mathcal{L}(E)} = \left\| \sum_{n \geq 0} \frac{(tA)^n}{n!} - I \right\|_{\mathcal{L}(E)} \\ &= \left\| \sum_{n \geq 1} \frac{(tA)^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{(t \|A\|)^n}{n!} \\ &= t \|A\| \sum_{n \geq 1} \frac{(t \|A\|)^{n-1}}{n!} \leq t \|A\| \sum_{n \geq 1} \frac{(t \|A\|)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= t \|A\| \sum_{n \geq 0} \frac{(t \|A\|)^n}{n!}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

alors

$$\|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(E)} \leq t \|A\| e^{t\|A\|}, \quad \forall t \geq 0$$

par passage à limite, on obtient

$$\lim_{t \downarrow 0} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(E)} = 0,$$

ce qui montre que $(G(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu.

Remarque 4.5. On a

$$\begin{aligned} (4.6) \implies \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(E)} &\leq \sum_{n \geq 0} \frac{(t \|A\|)^n}{n!} - 1 = e^{t\|A\|} - 1 \\ &\implies \lim_{t \downarrow 0} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(E)} = 0. \end{aligned}$$

Proposition 4.6. Soit $(G(t))_{t \geq 0}$ un \mathcal{C}_0 -semi-groupe alors

- (a) $t \mapsto \|G(t)\|$ est borné sur tout intervalle compact de \mathbb{R}_+ , i.e, pour tout $\alpha > 0$, il existe un réel $C_\alpha \geq 1$ tel que

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq C_\alpha, \text{ pour tout } t \in [0, \alpha].$$

- (b) Il existe deux constants $\omega \in \mathbb{R}$ (\mathbb{R}_+) et $M \geq 1$ tels que

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0. \quad (4.7)$$

Lorsque l'inégalité (4.7) est satisfaite, on dit que $(G(t))_{t \geq 0}$ est un \mathcal{C}_0 -semi-groupe de type (M, ω) .

Démonstration. Tout d'abord, on observe que $\|G(0)\|_{\mathcal{L}(E)} = \|I\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$, ce qui impose nécessairement $C_\alpha \geq 1$.

- (a) On raisonne par l'absurde. Supposons que la propriété (a) ne soit pas vérifiée, c'est-à-dire, il existe $\alpha > 0$ tel que la famille $\{G(t) : t \in [0, \alpha]\}$ ne soit pas bornée dans $\mathcal{L}(E)$. Plus précisément

$$\exists \alpha > 0, \forall C \geq 1, \exists t_0 \in [0, \alpha] : \|G(t_0)\| \geq C,$$

cela revient à dire qu'il existe une suite $(t_n)_n \subset [0, \alpha]$ convergeant vers un point t_0 telle que (on prend $C = n, n \in \mathbb{N}$)

$$\|G(t_n)\| \geq n,$$

par conséquent $(G(t_n))_n$ n'est pas borné. Le théorème de Banach–Steinhaus, énoncé dans le Théorème 2.1, assure l'existence d'un point $x_0 \in E$ tel que

$$(\|G(t_n)x_0\|)_n \text{ n'est pas borné.} \quad (4.8)$$

D'autre part, puisque $t_n \rightarrow t_0$, on peut supposer, sans perdre de généralité, que $t_n \geq t_0$ alors, en utilisant la propriété de semi-groupe (ii), on écrit

$$G(t_n)x_0 = G(t_0 + t_n - t_0)x_0 = G(t_0)G(t_n - t_0)x_0.$$

Comme $t_n - t_0 \downarrow 0$ et que $(G(t))_{t \geq 0}$ est fortement continu, on obtient de (iii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(t_n)x_0 = G(t_0)G(t_n - t_0)x_0 = G(t_0)x_0.$$

Par conséquent, la suite $(\|G(t_n)x_0\|)_n$ est bornée, ce qui contredit (4.8). Cette contradiction montre que $t \mapsto \|G(t)\|$ est bornée sur $[0, \alpha]$.

- (b) Soit $t \in [0, 1]$, d'après l'assertion (a)

$$\exists M_1 \geq 1 : \|G(t)\| \leq M_1, \forall t \in [0, 1],$$

en particulier

$$\|G(1)\| \leq M_1. \quad (4.9)$$

Considérons maintenant un réel arbitraire $t \in \mathbb{R}_+$. On peut l'écrire sous la forme

$$t = [t] + \tau \quad \text{où } \tau \in [0, 1[\quad \text{et} \quad [t] \in \mathbb{N} \text{ est la partie entière de } t,$$

En utilisant la propriété de semi-groupe (ii), on obtient

$$G(t) = G([t] + \tau) = G([t])G(\tau) = \underbrace{G(1 + 1 + \dots + 1)}_{[t] \text{ fois}} G(\tau) = (G(1))^{[t]} G(\tau).$$

En prenant les normes et en utilisant (4.9), il vient

$$\begin{aligned}\|G(t)\| &\leq \|G(1)\|^{[t]} \|G(\tau)\| \leq M_1^{[t]} M_1 \\ &\leq M_1^t M_1 = M_1 e^{t \ln M_1} \quad (\text{car } [t] \leq t),\end{aligned}$$

en posant $\omega := \ln M_1$, on obtient l'inégalité désirée. ■

Remarque 4.7. [20] On peut fournir une autre preuve de la proposition 4.6 en utilisant la définition de la continuité. En effet, en vertu de la propriété topologique (iii)

$$\forall \varepsilon >, \exists \delta > 0, \forall t \in [0, \delta] : \|G(t)x - x\| < \varepsilon.$$

Il en résulte que

$$\|G(t)x\| \leq \|G(t)x - x\| + \|x\| < \varepsilon + \|x\|, \text{ pour tout } t \in [0, \delta]$$

En prenant le supremum sur la boule unité de E , on obtient (en fixant $\varepsilon = 1$ par exemple)

$$\|G(t)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|G(t)x\| \leq \varepsilon + 1 := M, \text{ pour tout } t \in [0, \delta].$$

Maintenant, on considère un réel $t \geq 0$ alors, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$t = n\delta + \tau, \quad \tau \in [0, \delta],$$

alors

$$\|G(t)\| \leq \|G(n\delta)G(\tau)\| \leq \|G(\delta)\|^n \|G(\tau)\| \leq MM^n,$$

comme $n \leq \frac{t}{\delta}$, on obtient

$$\|G(t)\| \leq MM^{\frac{t}{\delta}} = M \exp\left(\frac{\ln M}{\delta} t\right),$$

en prenant $\omega := \frac{\ln M}{\delta}$, on arrive à

$$\|G(t)\| \leq M e^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Cette dernière inégalité montre bien que la fonction $t \mapsto \|G(t)\|$ est borné sur tout intervalle compact de \mathbb{R}_+ .

Définition 4.8. Un C_0 -semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ est dit un C_0 -semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ de contraction si

$$\|G(t)\| \leq 1 \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (4.10)$$

Par exemple, on définit, pour tout $t \geq 0$, le semi-groupe uniformément continu $G(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$ avec A est la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme A est diagonale alors

$$G(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

En utilisant la norme $\|\cdot\|_\infty$, on obtient

$$\|G(t)\|_\infty = \max\{e^{-\frac{t}{2}}, e^{-t}\} = e^{-\frac{t}{2}} \leq 1, \forall t \geq 0.$$

Le même résultat reste valable si on utilise la norme spectrale $\|\cdot\|_2$. En effet

$$\|G(t)\|_2 = \rho(G(t)) = \max\{|\lambda_1(G(t))|, |\lambda_2(G(t))|\} = \max\{e^{-\frac{t}{2}}, e^{-t}\} = e^{-\frac{t}{2}} \leq 1, \forall t \geq 0.$$

Corollaire 4.9.

(a) Soit $(G(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe sur l'espace de Banach E . Alors, pour tout $x \in E$, l'application

$$t \mapsto G(t)x \text{ est continue sur } [0, +\infty[. \quad (4.11)$$

Plus précisément, l'application $(t, x) \mapsto G(t)x$ est continue de $[0, +\infty[\times E$ dans E .

(b) Soit $(G(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu, alors

$$\lim_{s \rightarrow t} \|G(s) - G(t)\|_{\mathcal{L}(E)} = 0, \forall t > 0,$$

et pour $t = 0$, la limite est prise dans le sens $s \downarrow 0$.

Démonstration. Nous démontrons uniquement l'assertion (a). La preuve de l'assertion (b) repose sur des arguments analogues et est donc omise. Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $h \geq 0$ alors, il existe deux réels $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tels que

$$\begin{aligned} \|G(t+h)x - G(t)x\| &= \|G(t)G(h)x - G(t)x\| \leq \|G(t)\| \|G(h)x - G(t)x\| \\ &\leq Me^{\omega t} \|G(h)x - G(t)x\|, \end{aligned}$$

en passant à la limite, on obtient

$$\lim_{h \downarrow 0} \|G(t+h)x - G(t)x\| \leq Me^{\omega t} \lim_{h \downarrow 0} \|G(h)x - G(t)x\| = 0,$$

ce qui traduit la continuité à droite de l'application $[0, +\infty[\ni t \mapsto G(t)x$.

On considère maintenant deux réels $t \geq h \geq 0$ alors

$$\begin{aligned} \|G(t)x - G(t-h)x\| &= \|G(t-h+h)x - G(t-h)x\| = \|G(t-h)(G(h) - x)\| \\ &\leq \|G(t-h)\| \|G(h)x - x\| \leq Me^{\omega(t-h)} \|G(h)x - x\| \xrightarrow{h \downarrow 0} 0, \end{aligned}$$

cela implique la continuité à gauche de la fonction $t \mapsto G(t)x$ et par suite sa continuité sur \mathbb{R}_+ . ■

4.2 Générateur infinitésimal

La notion suivante joue un rôle fondamental dans la théorie des semi-groupes linéaires. Elle constitue le point de départ pour la caractérisation des opérateurs qui engendrent des semi-groupes fortement continus. Cette caractérisation est donnée par le célèbre théorème de Hille–Yosida, que nous énoncerons dans le Théorème 5.5.

Définition 4.10. Soient E un espace de Banach et $(G(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe (dans quelques références comme [6], $(G(t))_{t \geq 0}$ est juste un semi-groupe). L'opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ défini sur

$$D(A) = \left\{ x \in E : \lim_{t \downarrow 0} \frac{G(t)x - x}{t} \left(= \lim_{t \downarrow 0} \frac{G(t)x - G(0)x}{t} \right) \text{ existe dans } E \right\},$$

par

$$Ax := \lim_{t \downarrow 0} \frac{G(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} G(t)x \Big|_{t=0}, \quad \text{pour tout } x \in D(A), \quad (4.12)$$

est appelé le générateur infinitésimal, $G.\text{Inf}$ en abrégé, du semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$. Il est clair que $D(A)$ est un sous espace vectoriel de E et A est linéaire et éventuellement non borné. Dans tout ce qui suit, on pose

$$A_t := \frac{G(t) - G(0)}{t} \in \mathcal{L}(E), \quad \text{pour tout } t > 0. \quad (4.13)$$

et on écrit

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} A_t(x), \quad \text{pour tout } x \in D(A).$$

Exemple 4.11. On reprend l'Exemple 4.4 en considérant le semi-groupe uniformément continu $(G(t))_{t \geq 0}$ défini par

$$G(t) = e^{tA}, \quad t \geq 0, \quad A \in \mathcal{L}(E).$$

Montrons que le générateur infinitésimal de $(G(t))_{t \geq 0}$ est A . Soit $t > 0$, alors

$$\begin{aligned} \|A_t - A\|_{\mathcal{L}(E)} &= \left\| \frac{G(t) - I}{t} - A \right\| = \frac{1}{t} \|G(t) - I - tA\| = \frac{1}{t} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} - I - tA \right\| \\ &= \frac{1}{t} \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \right\| \\ &\leq \frac{1}{t} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = \frac{1}{t} t^2 \|A\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{(k+2)!}, \end{aligned}$$

par suite

$$\|A_t - A\|_{\mathcal{L}(E)} \leq t \|A\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = t \|A\|^2 e^{t\|A\|} \xrightarrow[t \downarrow 0]{} 0$$

alors

$$\lim_{t \downarrow 0} A_t = A \text{ dans } \mathcal{L}(E),$$

ce qui implique que $\lim_{t \downarrow 0} A_t(x) = Ax$ pour tout $x \in E$ et par conséquent A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$.

Proposition 4.12.

Soit $(G(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe de contraction sur E et soit A son générateur infinitésimal. Alors A est m -dissipatif et $D(A)$.

Démonstration. On procède en deux étapes.

Étape 1 : montrons que A est dissipatif. Pour tous $x \in D(A)$, $\lambda > 0$ et $h > 0$, on a

$$\begin{aligned} \left\| \lambda x - \frac{G(h)x - x}{h} \right\| &\geq \left(\lambda + \frac{1}{h} \right) \|x\| - \frac{1}{h} \|G(h)x\| \\ &\geq \left(\lambda + \frac{1}{h} \right) \|x\| - \frac{1}{h} \underbrace{\|G(h)\|_{\mathcal{L}(E)}}_{\leq 1} \|x\| \geq \lambda \|x\|. \end{aligned} \quad (4.14)$$

On en déduit le résultat en faisant tendre $h \downarrow 0$.

Étape 2. Montrons que

$$\forall y \in E, \exists x \in D(A) : x - Ax = y, \text{ c'est-à-dire, } R(I - A) = E.$$

Soit $Q : E \rightarrow E$ l'opérateur défini par

$$Qy := \int_0^{+\infty} e^{-t} G(t)y \, dt, \quad \forall y \in E.$$

Notons que l'opérateur Q n'est que la transformée de Laplace \mathcal{R}_λ (définie dans le Théorème 5.3) avec $\lambda = 1$, associée au \mathcal{C}_0 -semi-groupe de contraction $(G(t))_{t \geq 0}$ (ici, $M = 1$ et $\omega = 0$). Alors, $Q \in \mathcal{L}(E)$ et $\|Q\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$. Pour tous $y \in E$ et $h > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{G(h) - I}{h} Qy &= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-t} (G(t+h)y - G(t)y) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{+\infty} e^{-(t-h)} G(t)y dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-t} G(t)y dt \\ &= \frac{e^h - 1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-t} G(t)y dt - \frac{e^h}{h} \int_0^h e^{-t} G(t)y dt. \end{aligned}$$

En faisant tendre $h \downarrow 0$, on obtient

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h \downarrow 0} \underbrace{e^h \frac{1}{h} \int_0^h e^{-t} G(t)y dt}_{\rightarrow e^{-0} G(0)y = y},$$

et par suite

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{G(h) - I}{h} Qy = Qy - y.$$

Par conséquent, $Qy \in D(A)$ et $AQy = Qy - y$, c'est-à-dire $Qy - AQy = y$. D'où

$$\forall y \in E, \exists x = Qy \in D(A) : x - Ax = y.$$

■

Remarque 4.13.

Il résulte de l'inégalité (4.14) que pour tout \mathcal{C}_0 -semi-groupe de contraction, son opérateur A_t , $t > 0$, défini dans (4.13), est dissipatif.

Théorème 4.14 (Caractérisation des semi-groupes uniformément continus).

Un opérateur linéaire (non borné) $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $(G(t))_{t \geq 0}$ si, et seulement si A est borné, c'est-à-dire $A \in \mathcal{L}(E)$.

De plus, ce semi-groupe est l'unique semi-groupe uniformément continu dont A est le générateur infinitésimal et son expression est $G(t) = e^{tA}$, $\forall t \geq 0$. (Grâce au résultat d'unicité d'engendrement établi dans le Théorème 4.16).

Démonstration. Pour la condition suffisante, on suppose que A est borné, c'est-à-dire $A \in \mathcal{L}(E)$. Il découle de l'Exemple 4.11 que la famille d'opérateurs définie par $G(t) := e^{tA}$, pour tout $t \geq 0$, constitue un semi-groupe uniformément continu dont le générateur infinitésimal est l'opérateur A .

Pour la condition nécessaire, on suppose que $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $(G(t))_{t \geq 0}$. Cela signifie que l'application $t \mapsto G(t)$ est continue de \mathbb{R}_+ dans $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire que $\lim_{s \rightarrow t} G(s) = G(t)$ dans $\mathcal{L}(E)$ pour tout $t > 0$ (et pour $t = 0$, on considère $s \downarrow 0$), conformément au Corollaire 4.9. En utilisant le théorème de différentiation de Lebesgue (Voir Lemme 2.8), on déduit que

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t G(s) ds = G(0) = I,$$

autrement dit

$$\lim_{t \downarrow 0} \left\| I - \frac{1}{t} \int_0^t G(s) ds \right\|_{\mathcal{L}(E)} = 0.$$

On peut donc choisir $\rho > 0$ suffisamment petit pour que

$$\left\| I - \frac{1}{\rho} \int_0^\rho G(s) ds \right\|_{\mathcal{L}(E)} < 1.$$

En appliquant le Théorème 2.3 avec $B = I - \frac{1}{\rho} \int_0^\rho G(s) ds$, on déduit que l'opérateur $\int_0^\rho G(s) ds$, qui appartient à $\mathcal{L}(E)$, est inversible. Soit $t > 0$, Il résulte du Lemme 2.6 que

$$\begin{aligned} \left(\frac{G(t) - I}{t} \right) \int_0^\rho G(s) ds &= \frac{1}{t} \left(G(t) \int_0^\rho G(s) ds - \int_0^\rho G(s) ds \right) = \frac{1}{t} \left(\int_0^\rho G(t)G(s) ds - \int_0^\rho G(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(\int_0^\rho G(t+s) ds - \int_0^\rho G(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(\int_t^{\rho+t} G(s) ds - \int_0^\rho G(s) ds \right), \end{aligned} \quad (4.15)$$

où la dernière égalité est obtenue par le changement de variable $r = t + s$. Par conséquent

$$\frac{G(t) - I}{t} = \left(\frac{1}{t} \int_t^{\rho+t} G(s) ds - \frac{1}{t} \int_0^\rho G(s) ds \right) \left(\int_0^\rho G(s) ds \right)^{-1}.$$

(Pour justifier cette dernière égalité, on utilise les identités

$$\int_t^{\rho+t} - \int_0^\rho = \int_t^{t+\rho} - \int_0^\rho = \int_0^{\rho+t} - \int_0^t - \int_0^\rho = \int_0^\rho + \int_\rho^{\rho+t} - \int_0^t - \int_0^\rho = \int_\rho^{\rho+t} - \int_0^t \quad (4.16)$$

). En faisant tendre $t \downarrow 0$ et en utilisant de nouveau le théorème de différentiation de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{G(t) - I}{t} = (G(\rho) - I) \left(\int_0^\rho G(s) ds \right)^{-1}.$$

Cela montre que le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $(G(t))_{t \geq 0}$, que l'on note A , est

$$A = (G(\rho) - I) \left(\int_0^\rho G(s) ds \right)^{-1}.$$

Comme $(G(\rho) - I) \in \mathcal{L}(E)$ et $\left(\int_0^\rho G(s) ds \right)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, il s'ensuit que $A \in \mathcal{L}(E)$. ■

Théorème 4.15 (Propriétés fondamentales d'un \mathcal{C}_0 -semi-groupe).

Soit $(G(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ un \mathcal{C}_0 -semi-groupe et soit A son générateur infinitésimal, alors

(a₁) Pour tout $x \in D(A)$:

(a_{1,1}) $G(t)x \in D(A)$ et $AG(t)x = G(t)Ax$ pour tout $t \geq 0$.

(a_{1,2}) L'application $t \mapsto G(t)x$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ (dérivable à droite au point 0) et

$$\frac{d}{dt} G(t)x = AG(t)x = G(t)Ax.$$

(a₂)

$$\forall x \in E, \forall t \geq 0 : \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(s)x ds = G(t)x.$$

(a₃) Pour tout $x \in E$ et pour tout $t \geq 0$,

$$\int_0^t G(s)x ds \in D(A) \quad \text{et} \quad A \left(\int_0^t G(s)x ds \right) = G(t)x - x.$$

(a₄) Pour tout $x \in D(A)$ et pour tous $t, s \geq 0$

$$G(t)x - G(s)x = \int_s^t G(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AG(\tau)x d\tau.$$

(a₅) $D(A)$ est dense dans E .

(a₆) A est un opérateur fermé.

Démonstration. Soit $(G(t))_{t \geq 0}$ un \mathcal{C}_0 -semi-groupe et soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ son générateur infinitésimal.

(a₁)

(a_{1,1}) Soit $x \in D(A)$ alors, $\lim_{t \downarrow 0} \frac{G(t)x - x}{t}$ existe dans E et

$$Ax = \lim_{h \downarrow 0} \frac{G(h)x - x}{h}.$$

Soit $h > 0$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{G(h) - I}{h} G(t)x &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{G(h)G(t)x - G(t)x}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{G(t+h)x - G(t)x}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} G(t) \left(\frac{G(h)x - x}{h} \right) = G(t)Ax \quad (\text{car } x \in D(A)), \end{aligned}$$

ce qui traduit l'inclusion $G(t)x \in D(A)$. D'autre part

$$\begin{aligned} A(G(t)x) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{G(h)G(t)x - G(t)x}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{G(t+h)x - G(t)x}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} G(t) \left(\frac{G(h)x - x}{h} \right) = G(t)Ax. \end{aligned}$$

(a_{1,2}) Soit $t \geq 0$ et soit $h > 0$, alors

$$\begin{aligned} \left\| \frac{G(t+h)x - G(t)x}{h} - AG(t)x \right\| &\stackrel{(a_{1,1})}{=} \left\| G(t) \left(\frac{G(h)x - x}{h} - Ax \right) \right\| \\ &\leq \|G(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \left\| \frac{G(h)x - x}{h} - Ax \right\|, \end{aligned}$$

par passage à la limite quand $h \downarrow 0$, on obtient

$$\frac{d^+}{dt} G(t)x = AG(t)x = G(t)Ax, \quad \forall x \in D(A).$$

Maintenant, soient $t > 0$ et $h < 0$ tels que $t+h \geq 0$, donc

$$\begin{aligned} \left\| \frac{G(t+h)x - G(t)x}{h} - G(t)Ax \right\| &= \left\| \frac{G(t+h)x - G(t+h-h)x}{h} - G(t+h-h)Ax \right\| \\ &\leq \|G(t+h)\|_{\mathcal{L}(E)} \left\| \frac{G(-h)x - x}{-h} - G(-h)Ax \right\|, \end{aligned}$$

en passant à la limite lorsque $h \uparrow 0$ et en utilisant la continuité de $t \mapsto G(t)$, on déduit que

$$\frac{d^-}{dt} G(t)x = G(t)Ax = AG(t)x.$$

Par conséquent, $t \mapsto G(t)$ est dérivable et

$$\frac{d}{dt} G(t)x = AG(t)x = G(t)Ax.$$

(a₂) La propriété (a₂) est une conséquence directe de la continuité de $t \mapsto G(t)$ et le théorème de différentiation de Lebesgue.

(a₃) Soient $x \in E$ et $t \geq 0$. Pour tout $h > 0$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{G(h) - I}{h} \left(\int_0^t G(s)x ds \right) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_t^{t+h} G(s)x ds - \int_0^t G(s)x ds \right) \quad (\text{voir (4.15)}) \text{ et (4.16)}$$

en utilisant (a₂), on obtient

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{G(h) - I}{h} \left(\int_0^t G(s)x ds \right) = G(t)x - x.$$

(a₄) Soit $x \in D(A)$, alors

$$\frac{d}{d\tau} G(\tau)x = AG(\tau)x = G(\tau)Ax, \quad \forall \tau \geq 0,$$

par intégration

$$G(t)x - G(s)x = \int_s^t AG(\tau)x d\tau = \int_s^t G(\tau)Ax d\tau, \quad \text{pour tous } t, s \geq 0.$$

(a₅) On considère un élément $x \in E$ et un réel $\varepsilon > 0$. On doit démontrer l'existence d'un élément $v = v(x, \varepsilon) \in D(A)$ tel que

$$\|x - v\| < \varepsilon. \quad (4.17)$$

Tout d'abord, comme $D(A)$ est un s.e.v alors, il résulte de (a₃) et (a₂) que

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon G(t)x dt \in D(A) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon G(t)x dt = G(0)x = x.$$

Par conséquent, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a bien (4.17) avec $v := \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon G(t)x dt$.

(a₆) Soit $(x_n)_n \subset D(A)$ telle que $x_n \rightarrow x \in E$ et $Ax_n \rightarrow y \in E$. Fixons un réel $t \geq 0$. Il résulte de (a₄) que

$$G(t)x_n - G(0)x_n = \int_0^t G(\tau)Ax_n d\tau. \quad (4.18)$$

Posons $g_n(\tau) := G(\tau)Ax_n$, pour tout $\tau \in [0, t]$. Alors :

- il existe une constante $C \geq 0$ telle que $\|g_n(\tau)\| \leq Ce^{\omega\tau} \leq Ce^{\omega t}$, grâce à la propriété (4.7) et la bornitude de la suite $(Ax_n)_n$ (puisque'elle est convergente) ;
- la suite de fonction $(g_n(\cdot))_n$ converge uniformément sur $[0, t]$ vers $G(\cdot)y$. En effet

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n(\cdot) - G(\cdot)y\|_{\mathcal{C}([0,t];E)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{\tau \in [0,t]} \|G(\tau)Ax_n - G(\tau)y\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{\tau \in [0,t]} \|G(\tau)\|_{\mathcal{L}(E)} \|Ax_n - y\| \\ &\leq Ce^{\omega t} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|Ax_n - y\| = 0. \end{aligned}$$

En revenant à (4.18) et en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on

obtient

$$\begin{aligned} G(t)x - x &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t G(\tau) A x_n d\tau = \int_0^t G(\tau) y d\tau \\ \Rightarrow \frac{G(t)x - x}{t} &= \frac{1}{t} \int_0^t G(\tau) y d\tau, \quad \forall t > 0 \\ \Rightarrow Ax &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{G(t)x - x}{t} = G(0)y = y. \end{aligned}$$

Ainsi, A est fermé. ■

D'après la définition du générateur infinitésimal d'un semi-groupe, celui-ci est unique lorsqu'il existe. La question naturelle qui se pose est la suivante : un opérateur linéaire A peut-il être le générateur infinitésimal de plusieurs semi-groupes distincts ? Autrement dit, existe-t-il deux semi-groupes $(G(t))_{t \geq 0}$ et $(S(t))_{t \geq 0}$ tels que

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{G(t) - I}{t} = A = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t) - I}{t},$$

et

$$G(t) \neq S(t), \quad \text{pour au moins un } t > 0?$$

Le théorème suivant apporte une réponse négative à cette question.

Théorème 4.16 (Unicité d'engendrement). *Soient $(G(t))_{t \geq 0}$ et $(S(t))_{t \geq 0}$ deux C_0 -semi-groupes ayant le même générateur infinitésimal A . Alors*

$$G(t) = S(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Fixons $x \in D(A)$ et $t > 0$. D'après la propriété (a_1) du Théorème 4.15, on a, pour tout $\tau \in [0, t]$,

$$S(\tau)x \in D(A). \tag{4.19}$$

Considérons la fonction η définie par

$$\eta = \eta_{x,t} : [0, t] \ni \tau \mapsto \eta(\tau) = G(t - \tau)S(\tau)x \in E.$$

Soient $\tau \in [0, t]$ et $h \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \tau + h < t$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{\eta(\tau + h) - \eta(\tau)}{h} &= \frac{1}{h} (G(t - \tau - h)S(\tau + h)x - G(t - \tau)S(\tau)x) \\ &= G(t - \tau - h) \left(\frac{S(\tau + h)x - S(\tau)x}{h} \right) - \frac{G(t - \tau - h)\{S(\tau)x\} - G(t - \tau)\{S(\tau)x\}}{-h}. \end{aligned}$$

En faisant tendre $h \rightarrow 0$ et en utilisant (4.11), (4.19) ainsi que la propriété (a_1) du Théorème 4.15, on en déduit que η est dérivable sur $[0, t]$ et

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\tau}(\tau) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta(\tau + h) - \eta(\tau)}{h} = G(t - \tau)AS(\tau)x - AG(t - \tau)S(\tau)x \\ &= G(t - \tau)AS(\tau)x - G(t - \tau)AS(\tau)x = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction η est constante sur $[0, t]$ pour tout $t \geq 0$. En particulier, $\eta(0) = \eta(t)$, d'où

$$G(t)x = S(t)x, \quad \forall x \in D(A). \tag{4.20}$$

Pour conclure, montrons que cette égalité reste valable pour tout $x \in E$. Soit donc $x \in E$. Comme $D(A)$

est dense dans E , il existe une suite $(x_n)_n \subset D(A)$ telle que $x_n \rightarrow x$ dans E . On a alors

$$\begin{aligned} \|G(t)x - S(t)x\| &= \|G(t)x - G(t)x_n + G(t)x_n - S(t)x + S(t)x_n - S(t)x_n\| \\ &\leq \|G(t)x - G(t)x_n\| + \underbrace{\|G(t)x_n - S(t)x_n\|}_{=0 \text{ par (4.20)}} + \|S(t)x - S(t)x_n\|. \end{aligned}$$

En faisant tendre $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$G(t)x = S(t)x, \forall x \in E,$$

et par conséquent

$$G(t) = S(t), \forall t \geq 0 \text{ dans } \mathcal{L}(E).$$

■

Remarque 4.17. Une autre démonstration de l'unicité d'engendrement pour les semi-groupes **uniformément continus** est donnée dans [6, Théorème 1.3]. Elle repose sur la ε -définition de la continuité de la fonction $t \mapsto \|G(t)\|$.

4.3 Exercices

Exercice 4.18. Soient $(G(t))_{t \geq 0}$ et $(S(t))_{t \geq 0}$ deux \mathcal{C}_0 -semi-groupes qui commutent, c'est-à-dire

$$G(t)S(t) = S(t)G(t) \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Montrer que la famille d'opérateurs $(U(t))_{t \geq 0}$ définie par

$$U(t) := G(t)S(t), \quad t \geq 0,$$

est un \mathcal{C}_0 -semi-groupe, appelé semi-groupe produit associé à $(G(t))_{t \geq 0}$ et $(S(t))_{t \geq 0}$.

Exercice 4.19. On considère l'espace de Banach des suites p -sommables

$$\mathbf{E} = \ell_p = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}, \quad p \in [1, +\infty[.$$

muni de la norme

$$\|x\|_{\ell_p} = \|(x_n)_n\|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x = (x_n)_n \in \mathbf{E}.$$

Soit $(\alpha_n)_n$ une suite de réels strictement positifs. Pour tout $t \geq 0$, on définit l'opérateur $G(t) : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ par

$$G(t)x = G(t)((x_n)_n) = (e^{-\alpha_n t} x_n)_{n \geq 1}, \quad \forall x = (x_n)_n \in \mathbf{E}.$$

1. Montrer que $(G(t))_{t \geq 0}$ est un \mathcal{C}_0 -semi-groupe de contractions sur \mathbf{E} .
2. Déterminer le générateur infinitésimal de $(G(t))_{t \geq 0}$.
3. Montrer que le \mathcal{C}_0 -semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ est uniformément continu si et seulement si la suite $(\alpha_n)_n$ est bornée.

Exercice 4.20. Soit $\mathbf{E} = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues sur \mathbb{R}_+ qui s'annulent à l'infini, c'est-à-dire

$$\mathbf{E} = \{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}) : \forall \varepsilon > 0, \exists \text{ un compact } K_\varepsilon \subset \mathbb{R}_+ \text{ tel que } |f(s)| < \varepsilon, \forall s \in \mathbb{R}_+ \setminus K_\varepsilon \}.$$

Soit $(G(t))_{t \geq 0}$ une famille d'applications sur \mathbf{E} définie, pour tout $t \geq 0$, par

$$G(t)f(s) = e^{-s^2 t} f(s), \quad \forall s \geq 0, \forall f \in \mathbf{E}.$$

Montrer que $(G(t))_{t \geq 0}$ est un \mathcal{C}_0 -semi-groupe de contractions sur \mathbf{E} qui n'est pas uniformément continu.

Exercice 4.21. Soit $\mathbf{E} = L^p(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, avec $1 \leq p < +\infty$. Pour tout $t \geq 0$, on considère l'opérateur $G(t) : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ défini, pour tout $f \in \mathbf{E}$, par

$$G(t)f(s) = f(t + s), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la famille $(G(t))_{t \geq 0}$ est un \mathcal{C}_0 -semi-groupe de contractions sur \mathbf{E} .
2. Déterminer son générateur infinitésimal A .
3. Que se passe-t-il si l'on suppose $p = +\infty$, c'est-à-dire lorsque $\mathbf{E} = L^\infty(\mathbb{R})$?

Exercice 4.22. Soit \mathbf{E} l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs complexes qui admettent une limite finie à l'infini, c'est-à-dire

$$\mathbf{E} := \{f \in \mathcal{C}([0, +\infty[; \mathbb{C}) : \lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Pour tout $t \geq 0$, on considère l'opérateur $G(t) : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ défini, pour tout $f \in \mathbf{E}$, par

$$G(t)f(s) = f(t + s), \quad \forall s \in [0, +\infty[.$$

Montrer que $(G(t))_{t \geq 0}$ est un \mathcal{C}_0 -semi-groupe de contractions sur \mathbf{E} .

Exercice 4.23.

Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ le Générateur infinitésimal d'un \mathcal{C}_0 -semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ satisfaisant

$$\|G(t)\| \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

Montrer que

$$\|Ax\|^2 \leq 4M^2 \|A^2x\| \|x\|, \quad \forall x \in D(A^2).$$

Exercice 4.24.

Soient \mathbf{E} un espace de Banach et $(G(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(\mathbf{E})$ un \mathcal{C}_0 -semi-groupe de type (M, ω) , $\omega > 0$. Soit

$$S(t) := G(t)e^{-\omega t}, \quad t \geq 0.$$

1. Montrer que $(S(t))_{t \geq 0}$ est un \mathcal{C}_0 -semi-groupe de type $(M, 0)$ (Tout d'abord, écrivez les conditions que vous devez montrer).
2. Soit A le générateur infinitésimal de $(G(t))_{t \geq 0}$. Montrer que $(A - \omega I)$ est le générateur infinitésimal de $(S(t))_{t \geq 0}$.

Exercice 4.25.

12pts

Soit \mathbf{E} l'espace de Banach donné par

$$\mathbf{E} = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est continue et } \lim_{|s| \rightarrow +\infty} f(s) = 0 \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\mathbf{E}} = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s)|.$$

Pour tout $t \geq 0$, considérons la famille d'opérateur $G(t) : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ tel que pour tout $f \in \mathbf{E}$

$$G(t)f(s) = f(t + s), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $G(t) \in \mathcal{L}(E)$ pour tout $t \geq 0$.
2. Montrer que $(G(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe de contraction sur \mathbf{E} .
3. Montrer que $(G(t))_{t \geq 0}$ n'est pas uniformément continu.

Solution

On considère l'espace $\mathbf{E} = C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continue et } \lim_{|s| \rightarrow +\infty} f(s) = 0\}$, muni de la norme $\|f\|_{\mathbf{E}} = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s)|$.

Pour tout $t \geq 0$, l'opérateur $G(t) : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ est défini par :

$$G(t)f(s) = f(t + s), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall f \in E.$$

1. $G(t) \in \mathcal{L}(E)$ pour tout $t \geq 0$

Soient $f \in \mathbf{E}$, $t \geq 0$ et $s \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} G(t)f(s) = \lim_{|s| \rightarrow +\infty} f(t + s) = \lim_{|r| \rightarrow +\infty} f(r) = 0,$$

donc $G(t)f \in E$, ce qui montre que $G(t) : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$.

Linéarité : Soient $f, g \in \mathbf{E}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$G(t)(\alpha f + \beta g)(s) = (\alpha f + \beta g)(t + s) = \alpha f(t + s) + \beta g(t + s) = \alpha G(t)f(s) + \beta G(t)g(s).$$

Donc $G(t)$ est linéaire.

Continuité : Pour tout $f \in \mathbf{E}$:

$$\|G(t)f\|_{\mathbf{E}} = \sup_{s \in \mathbb{R}} |G(t)f(s)| = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(t + s)| = \sup_{r \in \mathbb{R}} |f(r)| = \|f\|_{\mathbf{E}}.$$

Donc $G(t)$ est borné et $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$. On conclut que $G(t) \in \mathcal{L}(E)$. (*)

2. $(G(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe de contractions sur \mathbf{E}

On vérifie les trois propriétés :

(i) $G(0) = I$: Pour tout $f \in \mathbf{E}$ et $s \in \mathbb{R}$:

$$G(0)f(s) = f(0 + s) = f(s),$$

donc $G(0) = I$.

(ii) Propriété de semi-groupe : Pour tout $t, r \geq 0$, $f \in \mathbf{E}$ et $s \in \mathbb{R}$:

$$G(t + r)f(s) = f(t + r + s) = f(t + (r + s)) = G(t)f(r + s) = G(t)(G(r)f)(s),$$

donc $G(t + r) = G(t)G(r)$.

(iii) Continuité : On montre que $\lim_{t \downarrow 0} \|G(t)f - f\|_{\mathbf{E}} = 0$ pour tout $f \in \mathbf{E}$.

Étape 1 : Pour $f \in C_c(\mathbb{R})$.

Soit $f \in C_c(\mathbb{R})$ tel que $\text{supp}(f) \subset [-a, a]$ pour un réel $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soient $t \in [-1, 1]$ et $s \in \mathbb{R}$.

- Si $|s| > a+1$, alors $s \notin [-a-1, a+1]$, donc $|s+t| > a$, donc $s+t \notin [-a, a]$, donc $s+t \notin \text{supp}(f)$, ce qui implique $f(s+t) = 0$.

Ainsi : $G(t)f(s) = f(s+t) = 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ avec $|s| > a+1$.

Par conséquent :

$$\|G(t)f - f\|_E = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(t+s) - f(s)| = \sup_{|s| \leq a+1} |f(t+s) - f(s)|.$$

Comme f est uniformément continue sur le compact $[-a-1, a+1]$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|G(t)f - f\|_E = \lim_{t \rightarrow 0} \sup_{|s| \leq a+1} |f(t+s) - f(s)| = |f(s_0) - f(s_0)| = 0,$$

où $s_0 \in [-a-1, a+1]$ est un point où le supremum est atteint. Donc :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|G(t)f - f\|_E = 0, \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R}). \quad (\star)$$

Étape 2 : Pour $f \in E$ quelconque.

Soit $f \in E$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $C_c(\mathbb{R})$ est dense dans E , il existe $g_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R})$ tel que :

$$\|f - g_\varepsilon\|_E \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2)$$

Par l'inégalité triangulaire et puisque $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$:

$$\begin{aligned} \|G(t)f - f\|_E &\leq \|G(t)(f - g_\varepsilon)\|_E + \|G(t)g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_E + \|g_\varepsilon - f\|_E \\ &\leq 2\|f - g_\varepsilon\|_E + \|G(t)g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_E \\ &\leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \|G(t)g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_E. \end{aligned}$$

D'après (\star) , puisque $g_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R})$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \delta[$:

$$\|G(t)g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_E < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On conclut que pour tout $f \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \delta[$:

$$\|G(t)f - f\|_E \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Donc $\lim_{t \downarrow 0} \|G(t)f - f\|_E = 0$, pour tout $f \in E$.

D'autre part, comme $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$, le semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 -**semi-groupe de contractions** sur E .

3. $(G(t))_{t \geq 0}$ n'est pas uniformément continu

Rappelons qu'un C_0 -semi-groupe est uniformément continu si et seulement si $\lim_{t \rightarrow 0} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(E)} = 0$.

Soit $f_n \in C_c(\mathbb{R})$ définie par $f_n(n) = 1$, $0 \leq f_n(s) \leq 1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, et $\text{supp}(f_n) \subset]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}[$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $\|f_n\|_E = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f_n(s)| = f_n(n) = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \|G(\tfrac{1}{n}) - I\|_{\mathcal{L}(E)} &= \sup_{f \in E, \|f\|_E=1} \|G(\tfrac{1}{n})f - f\|_E \\ &\geq \|G(\tfrac{1}{n})f_n - f_n\|_E \\ &= \sup_{s \in \mathbb{R}} |f_n(s + \tfrac{1}{n}) - f_n(s)| \\ &\geq |f_n(n + \tfrac{1}{n}) - f_n(n)|. \end{aligned}$$

Or $n + \frac{1}{n} \notin]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}[\supset \text{supp}(f_n)$, donc $f_n(n + \frac{1}{n}) = 0$, et $f_n(n) = 1$.

Ainsi :

$$\|G(\tfrac{1}{n}) - I\|_{\mathcal{L}(E)} \geq |0 - 1| = 1.$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|G(\tfrac{1}{n}) - I\|_{\mathcal{L}(E)} \geq 1,$$

ce qui implique $\lim_{t \downarrow 0} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(E)} \neq 0$. Par conséquent, $(G(t))_{t \geq 0}$ **n'est pas uniformément continu**.

Chapitre 5

Théorème de Hille-Yosida

5.1 Présentation du théorème

Le théorème de Hille–Yosida constitue un résultat fondamental dans la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires définis sur un espace de Banach E . Il fournit des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur linéaire (éventuellement non borné) $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ soit le générateur infinitésimal d'un \mathcal{C}_0 -semi-groupe.

En d'autres termes, ce théorème donne une caractérisation précise des opérateurs qui engendrent des \mathcal{C}_0 -semi-groupes. Ce résultat joue un rôle central dans l'étude des équations d'évolution, puisqu'il permet de relier les propriétés analytiques d'un opérateur à l'existence d'un semi-groupe décrivant l'évolution du système considéré. Avant d'énoncer ce théorème et d'en présenter la preuve, nous introduisons quelques notions préliminaires et outils techniques qui seront utilisés dans la suite, tels que l'ensemble résolvant d'un opérateur linéaire ainsi que l'approximation de Yosida. Ces notions jouent un rôle fondamental dans l'énoncé et la compréhension du théorème de Hille–Yosida.

Définition 5.1. Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire (éventuellement non borné).

1. On appelle ensemble résolvant de A l'ensemble (voir [8, 6])

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) : D(A) \subset E \rightarrow E \text{ est bijectif et } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E) \right\}.$$

Rappelons que dans ce cas, l'opérateur $(\lambda I - A)^{-1}$ n'est que la résolvante $\mathcal{R}(\lambda, A)$ de A , introduite dans le Théorème 3.6. De plus, si A est fermé, ce qu'est équivalent à dire que $A \in \mathcal{L}(E)$ (grâce au théorème du graphe fermé) alors, d'après le Théorème 2.2, l'ensemble résolvant peut également s'écrire (voir [4, 20])

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) : D(A) \subset E \rightarrow E \text{ est bijectif} \}.$$

Il est clair que $\mathcal{R}(\lambda, A) \in \mathcal{L}(E)$ pour tout $\lambda \in \rho(A)$.

2. Le spectre de A , noté $\sigma(A)$, est défini comme le complémentaire de $\rho(A)$ dans \mathbb{C} , c'est-à-dire

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

3. Soit $(G(t))_{t \geq 0}$ un \mathcal{C}_0 -semi-groupe sur E pour lequel, il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que

$$\|G(t)\| \leq M e^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Pour simplifier les notations, on introduit l'ensemble

$$\mathcal{E}_\omega^G := \{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > \omega \}. \quad (5.1)$$

Dans le cas particulier où $\omega = 0$, on note simplement \mathcal{E}_0^G .

Lemme 5.2. Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire. Pour tous $\lambda, \mu \in \rho(A)$

$$\mathcal{R}(\lambda, A) - \mathcal{R}(\mu, A) = (\mu - \lambda)\mathcal{R}(\lambda, A)\mathcal{R}(\mu, A), \quad (5.2)$$

$$\mathcal{R}(\lambda, A)\mathcal{R}(\mu, A) = \mathcal{R}(\mu, A)\mathcal{R}(\lambda, A). \quad (5.3)$$

La relation (5.2) est appelée identité de la résolvante.

Démonstration. Observons que pour tout $x \in E$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\lambda, A)x &= \mathcal{R}(\lambda, A)\overbrace{(\mu I - A)\mathcal{R}(\mu, A)}^{=I}x \\ &= \mathcal{R}(\lambda, A)((\mu - \lambda)I + (\lambda I - A))\mathcal{R}(\mu, A)x \\ &= (\mu - \lambda)\mathcal{R}(\lambda, A)\mathcal{R}(\mu, A)x + \mathcal{R}(\mu, A)x. \end{aligned}$$

En soustrayant $\mathcal{R}(\mu, A)x$ de chaque côté, on obtient précisément (5.2). Concernant l'égalité (5.3), il suffit d'échanger les rôles de λ et μ dans l'identité de la résolvante (5.2). ■

Théorème 5.3.

Soit $(G(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe sur E pour lequel, il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que

$$\|G(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

On suppose que A soit le Générateur infinitésimal de $(G(t))_{t \geq 0}$. **Alors, pour tout $\lambda \in \mathcal{E}_\omega^G$** ¹

(i) L'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto \mathcal{R}_\lambda(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t)x dt, \end{aligned} \quad (5.4)$$

est défini sur E et appartient à $\mathcal{L}(E)$ (l'intégrale est définie au sens de Riemann, voir [6, 21]). De plus

$$\|\mathcal{R}_\lambda\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{\operatorname{Re}(\lambda) - \omega}, \quad (5.5)$$

$$\mathcal{R}_\lambda(x) \in D(A) \quad \text{et} \quad A(\mathcal{R}_\lambda x) = \lambda \mathcal{R}_\lambda(x) - x, \quad \text{pour tout } x \in E. \quad (5.6)$$

(ii)

$$\lambda \in \rho(A) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(\lambda, A) = \mathcal{R}_\lambda. \quad (5.7)$$

(iii)

$$\|\mathcal{R}(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}(\lambda) - \omega)^n}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (5.8)$$

L'opérateur \mathcal{R}_λ s'appelle la transformée de Laplace de l'application $t \mapsto G(t)x$, ou la représentation intégrale de la résolvante $\mathcal{R}(\lambda, A)$ ([12]).

Démonstration.

Fixons un nombre complexe $\lambda \in \mathcal{E}_\omega^G$.

(i) Pour montrer que $D(\mathcal{R}_\lambda) = E$, il suffit de vérifier que l'intégrale impropre (généralisée) (5.4) est convergente pour tout $x \in E$. On remarque tout d'abord que l'application $t \mapsto e^{-\lambda t} G(t)x$ est continue

1. Notons que ces propriétés sont valables pour $\lambda \in \lambda \in \mathcal{E}_\omega^G$ et non nécessairement pour $\lambda \in \rho(A)$

sur \mathbb{R}_+ . Soient maintenant $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a \leq b$. Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b e^{-\lambda t} G(t)x dt \right\| &\leq \int_a^b |e^{-\lambda t}| \|G(t)\| \|x\| dt = \int_a^b e^{-t\operatorname{Re}(\lambda)} \|G(t)\| \|x\| dt \\ &\leq M \|x\| \int_a^b e^{(\omega - \operatorname{Re}(\lambda))t} dt \\ &\leq \underbrace{\frac{M \|x\|}{\omega - \operatorname{Re}(\lambda)}}_{\leq 0} \underbrace{\left[e^{\overbrace{(\omega - \operatorname{Re}(\lambda))b}^{\leq 0}} - e^{\overbrace{(\omega - \operatorname{Re}(\lambda))a}^{\leq 0}} \right]}_{\leq 0}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

En utilisant le critère de Cauchy, on déduit la convergence de l'intégrale impropre (5.4). D'autre part, il résulte de (5.9) que pour tout $x \in E$

$$\|\mathcal{R}_\lambda(x)\| = \left\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t)x dt \right\| = \left\| \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-\lambda t} G(t)x dt \right\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}(\lambda) - \omega} \|x\|.$$

Cela montre que $\mathcal{R}_\lambda \in \mathcal{L}(E)$ et

$$\|\mathcal{R}_\lambda\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{\operatorname{Re}(\lambda) - \omega}.$$

Montrons à présent que $\mathcal{R}_\lambda(x) \in D(A)$ pour tout $x \in E$, i.e.,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{G(h) - I}{h} (\mathcal{R}_\lambda(x)) \text{ existe dans } E.$$

Soient $h > 0$ et $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{G(h) - I}{h} (\mathcal{R}_\lambda(x)) &= \frac{1}{h} G(h) \mathcal{R}_\lambda(x) - \frac{1}{h} \mathcal{R}_\lambda(x) \\ &= \frac{1}{h} G(h) \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t)x dt \right) - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t)x dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t+h)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t)x dt \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda(t-h)} G(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t)x dt, \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} \frac{G(h) - I}{h} (\mathcal{R}_\lambda(x)) &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} G(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t)x dt \\ &= \frac{G(h) - I}{h} (\mathcal{R}_\lambda(x)) = \lambda \underbrace{\frac{e^{\lambda h} - 1}{\lambda h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t)x dt}_{\mathcal{R}_\lambda(x)} - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} G(t)x dt. \end{aligned}$$

En faisant $h \downarrow 0$, on obtient

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{G(h) - I}{h} (\mathcal{R}_\lambda(x)) = \lambda \mathcal{R}_\lambda(x) - x.$$

Par conséquent

$$\mathcal{R}_\lambda(x) \in D(A) \quad \text{et} \quad A(\mathcal{R}_\lambda x) = \lambda \mathcal{R}_\lambda(x) - x, \forall x \in E.$$

(ii) Il s'ensuit de (5.6) que

$$(\lambda I - A) \mathcal{R}_\lambda x = x, \forall x \in E. \quad (5.10)$$

D'autre part, en vertu du [Thérème 4.15, (a₁)] pour tout $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\lambda(Ax) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) Ax dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} G(t) x dt \\ &= [e^{-\lambda t} G(t) x]_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) x dt.\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{-\lambda t} G(t) x\| \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} M \|x\| e^{\overbrace{(\omega - \operatorname{Re}(\lambda))}^{\leq 0} t} = 0,$$

alors $\mathcal{R}_\lambda(Ax) = -x + \lambda \mathcal{R}_\lambda(x)$ et par suite

$$\mathcal{R}_\lambda(\lambda I - A)x = x, \forall x \in D(A) \quad (5.11)$$

De (5.10) et (5.11), on déduit que

$$(\lambda I - A)^{-1} = \mathcal{R}_\lambda \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathcal{R}(\lambda, A) = \mathcal{R}_\lambda \quad \text{et} \quad \lambda \in \rho(A).$$

(iii) Il résulte de cette dernière égalité et l'inégalité (5.5) que

$$\|\mathcal{R}(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E)} = \|\mathcal{R}_\lambda\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{\operatorname{Re}(\lambda) - \omega}.$$

D'autre part, à partir de l'identité de la résolvante (5.2), il s'ensuit que pour tous $\lambda, \mu \in \mathcal{E}_\omega^G$,

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{\mathcal{R}(\lambda, A) - \mathcal{R}(\mu, A)}{\lambda - \mu} = - \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \mathcal{R}(\lambda, A) \mathcal{R}(\mu, A) = -\mathcal{R}(\lambda, A)^2, \quad (5.12)$$

où la dernière formule est obtenue en utilisant l'égalité (5.7) et l'expression de \mathcal{R}_λ pour démontrer que

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda} \mathcal{R}(\mu, A)y = \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\mu t} G(t) y dt = \mathcal{R}(\lambda, A)y, \quad \text{pour tout } y \in E. \quad (5.13)$$

Alors, l'application $\mathcal{E}_\omega^G \ni \lambda \mapsto \mathcal{R}(\lambda, A)$ est différentiable (holomorphe) et

$$\frac{d}{d\lambda} \mathcal{R}(\lambda, A) = -\mathcal{R}(\lambda, A)^2. \quad (5.21)$$

En procédant par récurrence, on trouve

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} \mathcal{R}(\lambda, A) = (-1)^n n! \mathcal{R}(\lambda, A)^{n+1}. \quad (5.14)$$

D'autre part, d'après l'égalité (5.7)

$$\frac{d}{d\lambda} \mathcal{R}(\lambda, A)x = \frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)x dt = - \int_0^\infty t e^{-\lambda t} G(t)x dt.$$

En procédant à nouveau par récurrence, on obtient

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} \mathcal{R}(\lambda, A)x = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} G(t)x dt. \quad (5.15)$$

2. λ et μ sont dans \mathcal{E}_ω^G plutôt que dans $\rho(A)$, car la limite (5.12) est obtenue grâce à la propriété (5.13) qu'est valable sur \mathcal{E}_ω^G . Néanmoins, $\mathcal{R}(\lambda, A)$ est différentiable sur $\rho(A)$ (A est fermé)

La comparaison de (5.14) et (5.14) donne

$$\mathcal{R}(\lambda, A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} G(t) x dt, \text{ pour tout } \lambda \in \mathcal{E}_\omega^G, \quad (5.16)$$

d'où, pour tout $x \in E$

$$\|\mathcal{R}(\lambda, A)^n x\| \leq \frac{M\|x\|}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{(\omega - \operatorname{Re}(\lambda))t} dt = \frac{M\|x\|}{(n-1)!} \frac{(n-1)!}{(\operatorname{Re}(\lambda) - \omega)^n},$$

ce qui justifie l'inégalité (5.8) et achève la démonstration. ■

Corollaire 5.4.

Soit A le Générateur infinitésimal d'un \mathcal{C}_0 -semi-groupe de contraction. Alors, pour tout $\lambda \in \mathcal{E}_0^G$:

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda \in \mathcal{L}(E), \quad \mathcal{R}_\lambda(x) \in D(A) \text{ et } A(\mathcal{R}_\lambda x) = \lambda \mathcal{R}_\lambda(x) - x, \text{ pour tout } x \in E \\ \|\mathcal{R}_\lambda\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \lambda \in \rho(A) \text{ et } \mathcal{R}(\lambda, A) = \mathcal{R}_\lambda \\ \|\mathcal{R}(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{(\operatorname{Re}(\lambda))^n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

D'autre part, si le paramètre λ est un nombre réel alors

$$]0, +\infty[\subset \rho(A) \quad \text{et} \quad \|\mathcal{R}(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{\lambda^n}, \forall \lambda > 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (5.17)$$

Démonstration. Conséquence directe du théorème 5.3 en prenant $\omega = 0$ et $M = 1$. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de Hille-Yosida pour les \mathcal{C}_0 -semi-groupes.

Théorème 5.5 (Théorème de Hille-Yosida).

Soient E un espace de Banach et $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire (éventuellement non borné). Alors, A est le générateur infinitésimal d'un \mathcal{C}_0 -semi-groupe de contraction $(G(t))_{t \geq 0}$, $t \geq 0$ (vérifiant $\|G(t)\| \leq M e^{\omega t}$ avec $M = 1$, $\omega = 0$) si et seulement si

(Hyp₁) A est fermé et $\overline{D(A)} = E$;

(Hyp₂) $\mathcal{E}_G^0 :=]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > 0$

$$\|\mathcal{R}(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

La démonstration de ce grand théorème se fait à l'aide d'un ensemble des résultats auxiliaires que l'on énonce successivement.

Lemme 5.6. Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire vérifiant les conditions (Hyp₁) et (Hyp₂). Alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \mathcal{R}(\lambda, A)x = x, \forall x \in E.$$

Démonstration. Fixons un nombre réel $\lambda \in]0, +\infty[$ et observons que

$$\begin{aligned} \lambda \mathcal{R}(\lambda, A) &= \mathcal{R}(\lambda, A)(\lambda I - A + A) = \mathcal{R}(\lambda, A)(\lambda I - A) + \mathcal{R}(\lambda, A)A \\ &= I + \mathcal{R}(\lambda, A)A, \end{aligned}$$

alors, pour tout $x \in D(A)$

$$\|\lambda \mathcal{R}(\lambda, A)x - x\| = \|\mathcal{R}(\lambda, A)Ax\| \leq \|\mathcal{R}(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E)} \|Ax\| \leq \frac{1}{\lambda} \|Ax\|,$$

en faisant λ tendre vers $+\infty$, on obtient

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \mathcal{R}(\lambda, A)x = x, \forall x \in D(A). \quad (5.18)$$

Maintenant, comme $D(A)$ est dense dans E alors, pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_n \subset E$ telle que (x_n) converge vers x . Il est clair que

$$\begin{aligned} \|\lambda \mathcal{R}(\lambda, A)x - x\| &\leq \|\lambda \mathcal{R}(\lambda, A)x - \lambda \mathcal{R}(\lambda, A)x_n\| + \|\lambda \mathcal{R}(\lambda, A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leq 2 \|x - x_n\| + \|\lambda \mathcal{R}(\lambda, A)x_n - x_n\|. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Comme (x_n) converge vers x alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|x - x_{n(\varepsilon)}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il résulte de (5.19) que

$$\|\lambda \mathcal{R}(\lambda, A)x_{n(\varepsilon)} - x_{n(\varepsilon)}\| \leq \varepsilon + \|\lambda \mathcal{R}(\lambda, A)x_{n(\varepsilon)} - x_{n(\varepsilon)}\|, \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

D'autre part, il s'ensuit de (5.18) et l'inclusion $x_{n(\varepsilon)} \in D(A)$ que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|\lambda \mathcal{R}(\lambda, A)x_{n(\varepsilon)} - x_{n(\varepsilon)}\| = 0.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $\|\lambda \mathcal{R}(\lambda, A)x - x\| \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$. La convergence est ainsi établie sur E tout entier et par conséquent $\lambda \mathcal{R}(\lambda, A)$ converge vers I dans $\mathcal{L}(E)$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$. ■

Nous introduisons maintenant une classe importante d'opérateurs linéaires bornés qui se rapprochent d'un opérateur A au sens du lemme 5.7 ci-dessous. Pour un réel $\lambda > 0$, on pose

$$A_\lambda = \lambda A \mathcal{R}(\lambda, A) = \lambda^2 \mathcal{R}(\lambda, A) - \lambda I. \quad 3$$

A_λ s'appelle *l'approximation de Yosida de A* .

Lemme 5.7.

Sous les conditions (Hyp₁) et (Hyp₂) :

$$A_\lambda \in \mathcal{L}(E), \quad \text{pour tout } \lambda > 0. \quad (5.20)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda x = Ax, \quad \text{pour tout } x \in D(A). \quad (5.21)$$

Démonstration. La propriété (5.20) est une conséquence directe de l'inclusion $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et l'égalité $A_\lambda = \lambda^2 \mathcal{R}(\lambda, A) - \lambda I$.

On a

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)\mathcal{R}(\lambda, A) &= \lambda \mathcal{R}(\lambda, A) - A\mathcal{R}(\lambda, A) = I, \\ \mathcal{R}(\lambda, A)(\lambda I - A) &= \lambda \mathcal{R}(\lambda, A) - \mathcal{R}(\lambda, A)A = I, \end{aligned}$$

3. $\lambda A \mathcal{R}(\lambda, A) = \lambda(\lambda I - (\lambda I - A))\mathcal{R}(\lambda, A) = \lambda^2 \mathcal{R}(\lambda, A) - \lambda I$

alors A et $\mathcal{R}(\lambda, A)$ commutent sur $D(A)$, i.e., $A\mathcal{R}(\lambda, A) = \mathcal{R}(\lambda, A)A$. Fixons $x \in D(A)$, il résulte du Lemme 5.6 que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda A \mathcal{R}(\lambda, A)x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \mathcal{R}(\lambda, A)(Ax) = Ax.$$

■

Sous les hypothèses (Hyp₁) et (Hyp₂), le Lemme 5.7 assure que $A_\lambda \in \mathcal{L}(E)$. D'après l'Exemple 4.4 ou le Théorème 4.14, l'opérateur A_λ est alors le générateur infinitésimal d'un unique semi-groupe uniformément continu, noté $(G_\lambda(t))_{t \geq 0}$, défini par

$$G_\lambda(t) := e^{tA_\lambda}, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

De plus $(G_\lambda(t))_{t \geq 0}$ est de contraction. En effet

$$\|G_\lambda(t)\| = \|e^{tA_\lambda}\| = \left\| e^{t\lambda^2 \mathcal{R}(\lambda, A) - t\lambda I} \right\| \leq \|e^{-t\lambda I}\| \cdot \left\| e^{t\lambda^2 \mathcal{R}(\lambda, A)} \right\|$$

Comme $e^{-t\lambda I} = e^{-t\lambda} I$, alors $\|e^{-t\lambda I}\| = e^{-t\lambda}$. Par ailleurs,

$$\|G_\lambda(t)\| \leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|\mathcal{R}(\lambda, A)\|} \leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda} = 1,$$

où l'on a utilisé l'estimation $\|\mathcal{R}(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$. Enfin, grâce à (5.3) :

$$\text{les opérateurs } A_\lambda, A_\mu, e^{tA_\lambda} \text{ et } e^{tA_\mu} \text{ commutent pour tous } \lambda, \mu > 0. \quad (5.22)$$

Lemme 5.8. *Supposons que les conditions (Hyp₁) et (Hyp₂) soient satisfaites. Alors*

$$\|G_\lambda(t)x - G_\mu(t)x\| \leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|, \quad \text{pour tous } t \geq 0, \lambda, \mu > 0, x \in E. \quad (5.23)$$

Démonstration. Soient $\lambda, \mu > 0, t \geq 0$ et $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} G_\lambda(st) G_\mu((1-s)t)x &= \frac{d}{ds} \left(e^{stA_\lambda} - e^{(1-s)tA_\mu} x \right) \\ &= tA_\lambda G_\lambda(st) G_\mu((1-s)t)x - tA_\mu G_\lambda(st) G_\mu((1-s)t)x \\ &= tG_\lambda(st) G_\mu((1-s)t) (A_\lambda x - A_\mu x), \end{aligned} \quad (5.24)$$

où l'on a utilisé la propriété (5.22). D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d}{ds} G_\lambda(st) G_\mu((1-s)t)x ds &= G_\lambda(st) G_\mu((1-s)t)x \Big|_{s=0}^{s=1} \\ &= G_\lambda(t) G_\mu(0)x - G_\lambda(0) G_\mu(t)x = G_\lambda(t)x - G_\mu(t)x. \end{aligned}$$

En combinant avec (5.24), on obtient

$$G_\lambda(t)x - G_\mu(t)x = t \int_0^1 G_\lambda(st) G_\mu((1-s)t) (A_\lambda x - A_\mu x) ds.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|G_\lambda(t)x - G_\mu(t)x\| &\leq t \int_0^1 \|G_\lambda(st)G_\mu((1-s)t)(A_\lambda x - A_\mu x)\| ds \\ &\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\| \int_0^1 \underbrace{\|G_\lambda(st)\|}_{\leq 1} \underbrace{\|G_\mu((1-s)t)\|}_{\leq 1} ds \\ &\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|. \end{aligned}$$

■

5.2 Démonstration du théorème

Condition nécessaire

Supposons que l'opérateur $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ soit le générateur infinitésimal d'un \mathcal{C}_0 -semi-groupe de contractions $(G(t))_{t \geq 0}$ sur E . La propriété (Hyp₁) découle directement des propriétés (a₅) et (a₆) énoncées dans le Théorème 4.15. Quant à la propriété (Hyp₂), elle est une conséquence immédiate du Corollaire 5.4.

Condition suffisante

Supposons que l'opérateur $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ satisfasse les conditions (Hyp₁) et (Hyp₂). Soient $\lambda > 0$ et A_λ l'approximation de Yosida de A . Par Lemme 5.7, on a $A_\lambda \in \mathcal{L}(E)$ et $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda x = Ax$ pour tout $x \in D(A)$. De plus, l'opérateur A_λ génère un semi-groupe uniformément continu de contraction $G_\lambda(t) := e^{tA_\lambda}$ pour tout $t \geq 0$. Par le Lemme 5.8, on a

$$\|G_\lambda(t)x - G_\mu(t)x\| \leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|, \quad \text{pour tous } t \geq 0, \lambda, \mu > 0, x \in E.$$

Soit $\mathfrak{J} := [a, b]$ un intervalle compact de \mathbb{R}_+ . Alors

$$\sup_{t \in \mathfrak{J}} \|G_\lambda(t)x - G_\mu(t)x\| \leq b(\|A_\lambda x - Ax\| + \|A_\mu x - Ax\|), \quad \text{pour tout } x \in D(A).$$

Par conséquent, pour tout $t \in \mathfrak{J}$ et tout $x \in D(A)$, la famille $(G_\lambda(t)x)_{\lambda > 0}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet E . Elle converge donc dans E lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$. De plus, cette convergence est uniforme sur tout intervalle compact \mathfrak{J} de \mathbb{R}_+ .

On définit alors l'application $G_0(t) : D(A) \rightarrow E$, pour tout $t \in \mathfrak{J}$, par

$$G_0(t)x := \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} G_\lambda(t)x, \quad \text{pour tout } x \in D(A). \quad (5.25)$$

Alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sup_{t \in \mathfrak{J}} \|G_\lambda(t)x - G_0(t)x\| = 0, \quad \text{pour tout } x \in D(A). \quad (5.26)$$

Il est clair que $G_0(t)$, pour $t \in \mathfrak{J}$, est un opérateur linéaire sur le sous-espace vectoriel $D(A)$. De plus, comme chaque $G_\lambda(t)$ est une contraction, on obtient

$$\|G_0(t)x\| = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|G_\lambda(t)x\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|G_\lambda(t)\| \|x\| \leq \|x\|, \quad \text{pour tout } x \in D(A). \quad (5.27)$$

Ainsi, $G_0(t)$ est un opérateur linéaire borné sur $D(A)$ pour tout $t \in \mathfrak{J}$. La densité de $D(A)$ dans E assure alors l'existence d'une unique extension linéaire bornée de $G_0(t)$ à tout l'espace E , que l'on note

$G(t) \in \mathcal{L}(E)$, telle que pour tout $t \in \mathcal{I}$,

$$G(t) \Big|_{D(A)} = G_0(t), \quad \|G(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \|x\|, \quad \|G(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1. \quad (5.28)$$

De plus, d'après (5.25), on a pour tout $x \in D(A)$

$$G(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} G_\lambda(t)x, \quad \text{pour tout } x \in D(A). \quad (5.29)$$

Comme cette procédure peut être répétée sur tout intervalle compact de \mathbb{R}_+ , on obtient finalement l'existence d'un unique opérateur linéaire continu $G(t)$ vérifiant les propriétés (5.28) et (5.29) pour tout $t \in [0, +\infty[$. Plus précisément, pour tout $x \in E$ et tout $t \geq 0$, grâce à la densité de $D(A)$ dans E , on définit

$$G(t)x := \lim_{n \rightarrow +\infty} G_0(t)x_n,$$

où $(x_n)_n$ est une suite de $D(A)$ convergeant vers x . Il est clair que cette limite est indépendante de la suite choisie. En effet, soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de $D(A)$ convergeant vers x . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|G_0(t)x_n - G_0(t)y_n\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|G_0(t)(x_n - y_n)\| \stackrel{(5.27)}{\leq} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\|x_n - x\| + \|x - y_n\|) = 0.$$

De plus, $G(t)$ est une contraction pour tout $t \geq 0$. En effet, par continuité de la norme

$$\|G(t)x\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|G_0(t)x_n\| \stackrel{(5.27)}{\leq} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

Montrons maintenant que $(G(t))_{t \geq 0}$ est un \mathcal{C}_0 -semi-groupe.

(•) $G(0)x = x$ pour tout $x \in E$.

Il résulte de (5.25) et du fait que $(G_\lambda(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu que, pour tout $x \in D(A)$,

$$G(0)x = G_0(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} G_\lambda(0)x = x.$$

Soit maintenant $x \in E$ et $(x_n)_n \subset D(A)$ une suite telle que $x_n \rightarrow x$. Alors

$$G(0)x = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_0(0)x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x.$$

(•) $G(t+s)x = G(t)G(s)x$ pour tout $x \in E$ et tous $t, s \geq 0$.

Soient $t, s \geq 0$ et $x \in D(A)$. Alors

$$G(t+s)x = G_0(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} G_\lambda(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} G_\lambda(t)G_\lambda(s)x. \quad (5.30)$$

Mais, par **commutativité**

$$\begin{aligned} \|G_\lambda(t)G_\lambda(s)x - G(t)G(s)x\| &= \|G_\lambda(t)G_\lambda(s)x - G_\lambda(t)G(s)x + G_\lambda(t)G(s)x - G(t)G(s)x\| \\ &= \left\| G_\lambda(t) \left(G_\lambda(s)x - G(s)x \right) + \left(G_\lambda(t) - G(t) \right) G(s)x \right\| \\ &\leq \underbrace{\|G_\lambda(t)\|_{\mathcal{L}(E)}}_{\leq 1} \|G_\lambda(s)x - G(s)x\| + \underbrace{\|G(s)\|_{\mathcal{L}(E)}}_{\leq 1} \|G_\lambda(t)x - G(t)x\| \\ &\leq \|G_\lambda(s)x - G(s)x\| + \|G_\lambda(t)x - G(t)x\|. \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $\lambda \rightarrow +\infty$ et en utilisant (5.29) et (5.30), on déduit que

$$G(t+s)x = G(t)G(s)x, \quad \text{pour tout } x \in D(A).$$

Par la continuité de l'application $G(t)$ et la densité de $D(A)$ dans E , on obtient la dernière égalité sur tout l'espace E .

(•) $\lim_{t \downarrow 0} \|G(t)x - x\| = 0$ pour tout $x \in E$.

Soient $x \in E$ et $y \in D(A)$, alors

$$\begin{aligned} \|G(t)x - x\| &\leq \|G(t)x - G(t)y\| + \|G(t)y - G_\lambda(t)y\| + \|G_\lambda(t)y - y\| + \|x - y\| \\ &\leq \|G(t)y - G_\lambda(t)y\| + \|G_\lambda(t)y - y\| + 2\|x - y\|. \end{aligned}$$

Soient $T > 0$ et $\varepsilon > 0$. Par la densité de $D(A)$ dans E , on peut choisir $y = x_\varepsilon \in D(A)$ tel que

$$\|x - x_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

De plus, pour λ suffisamment grand, c'est-à-dire $\lambda > \lambda_0$ pour un certain $\lambda_0 > 0$, grâce à (5.26) et (5.28), on peut supposer que

$$\|G(t)x_\varepsilon - G_\lambda(t)x_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{pour tout } t \in [0, T] \text{ et tout } \lambda > \lambda_0.$$

Par conséquent

$$\forall \varepsilon > 0, \forall T > 0, \exists x_\varepsilon \in D(A), \exists \lambda_0 > 0 : \forall t \in [0, T], \forall \lambda > \lambda_0 : \|G(t)x - x\| < \frac{3\varepsilon}{4} + \|G_\lambda(t)x_\varepsilon - x_\varepsilon\|$$

D'autre part, comme $(G_\lambda(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu, on a $\lim_{t \downarrow 0} G_\lambda(t)x_\varepsilon = x_\varepsilon$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall t \in [0, \delta] : \|G_\lambda(t)x_\varepsilon - x_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

On en déduit alors que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall t \in [0, \delta] : \|G(t)x - x\| < \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\lim_{t \downarrow 0} \|G(t)x - x\| = 0 \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Cela montre que $(G(t))_{t \geq 0}$ est bien un \mathcal{C}_0 -semi-groupe de contractions.

Il reste à montrer que A est le générateur du semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$. Notons B le générateur infinitésimal de $(G(t))_{t \geq 0}$ et montrons que $A = B$.

Soit $x \in D(A)$. D'après la propriété (a₄) du Théorème 4.15, on a

$$\begin{aligned} G(t)x - x &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (G_\lambda(t)x - x) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (G_\lambda(t)x - G_\lambda(0)x) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t G_\lambda(s)A_\lambda x ds. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Pour tout $x \in D(A)$ et tout $s \in [0, t]$ (qu'est compact), on obtient

$$\begin{aligned} \|G_\lambda(s)A_\lambda x - G(s)Ax\| &\leq \|G_\lambda(s)A_\lambda x - G_\lambda(s)Ax\| + \|G_\lambda(s)Ax - G(s)Ax\| \\ &\leq \|A_\lambda x - Ax\| + \|G_\lambda(s)Ax - G(s)Ax\| \\ &\leq \|A_\lambda x - Ax\| + \|G_\lambda(s) - G(s)\| \|Ax\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0 \text{ uniformément sur le compact } [0, t] \end{aligned}$$

On peut donc passer à la limite sous le signe intégral dans (5.31), ce qui donne

$$G(t)x - x = \int_0^t G(s)Ax ds, \quad \text{pour tout } x \in D(A).$$

En faisant tendre t vers 0^+ et en utilisant la propriété (a_2) du Théorème 4.15, on obtient

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{G(t)x - x}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t G(s)Ax ds = G(0)Ax = Ax.$$

Ainsi $x \in D(B)$ et $Bx = Ax$ pour tout $x \in D(A)$. On en déduit que

$$D(A) \subset D(B) \quad \text{et} \quad Bx = Ax \quad \text{pour tout } x \in D(A).$$

Chapitre 6

Problème de Cauchy abstrait

Bibliographie

- [1] Melnikova, I. V., Filinkov, A. (2001). Abstract Cauchy problems : three approaches. Chapman and Hall/CRC.
- [2] A. Intissar. Analyse fonctionnelle & théorie spectrale : Pour les opérateurs compacts non auto-adjoints : Exercices avec solutions. Toulouse : Cépaduès, 1997.
- [3] M.H. Mortad, Counterexamples in operator theory. Birkhäuser. 2022
- [4] H. Brezis. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. 2011.
- [5] Brezis, H. (1983). Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.
- [6] A. Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations-Springer-Verlag, 1992.
- [7] R. Dautray, J.L. Lions, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 5 Evolution Problems I. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000.
- [8] Goldstein, J. A. (2017). Semigroups of linear operators and applications. Courier Dover Publications
- [9] Sinha, K. B., & Srivastava, S. (2017). Theory of semigroups and applications. Springer Singapore.
- [10] I.I. Vrabie. (2003). Co-semigroups and applications (Vol. 191). Elsevier.
- [11] E.B. Davies. (2012). Linear Operators and Their Spectra Web Supplement, version 32.
- [12] K.J. Engel & R. Nagel. (2006). A short course on operator semigroups. Springer Science & Business Media.
- [13] Cazenave, T., & Haraux, A. (1998). An introduction to semilinear evolution equations (Vol. 13). Oxford University Press.
- [14] I. Miyadera, Nonlinear semigroups. American Mathematical Soc., 1992.
- [15] K. Schmüdgen, Unbounded Self-Adjoint Operators on Hilbert Space, vol. 265. Springer, Berlin (2012). GTM
- [16] J. Weidmann, Linear Operators in Hilbert Spaces. Springer, Berlin (1980)
- [17] N.U. Ahmed, Semigroup theory with applications to systems and control, Longman Scientific & Technical, Wiley, 1991.
- [18] I. Cioranescu, Geometry of Banach spaces, duality mappings and nonlinear problems. Springer Science & Business Media, 2012.
- [19] W. Rudin, Principles of mathematical analysis. 3rd ed., 1976.
- [20] L. Gasinski, N.S. Papageorgiou, Nonlinear analysis. CRC Press, (2005).
- [21] K. Yosida, Functional analysis. Springer Science & Business Media, 2012.
- [22] A. C. McBride, Semigroups of linear operators : An introduction, 1987.